Capitolo 7

Limiti e continuità

7.1 Il concetto di limite

Il concetto di limite è certamente tra i meno immediati e, purtroppo, causa spesso molto sconcerto tra gli studenti perché la sua defizione sembra del tutto astrusa. In realtà il limite è uno strumento utilissimo per capire il comportamento di una funzione in vicinanza di un punto nel quale essa non può essere calcolata. Inoltre, tramite esso è possibile definire altri concetti basilari dell'analisi matematica come continuità, derivabilità, etc.

Definizione 7.1 *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Chiamiamo* intorno *di x_0 e lo indichiamo con $I(x_0)$ un qualsiasi intervallo aperto contenente il punto x_0.*

Per esempio, se $x_0 = -2$ allora l'intervallo $(-4; 3)$ è un intorno di -2 in quanto lo contiene. In generale, se $\delta_1, \delta_2 > 0$, un intorno può essere scritto come

$$I(x_0) = (x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2) = \{x \in \mathbb{R} \colon x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_2\}.$$

Intorni particolari sono:

- intorno circolare di x_0, se $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Questo si verifica quando il punto x_0 è esattamente al centro dell'intorno come per esempio per $I(-2) = (-3; -1)$. Si osservi che gli intorni circolari possono essere scritti come $I_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \colon |x - x_0| < \delta\}$.
- intorno sinistro di x_0, se $\delta_2 = 0$. Questo significa che il punto x_0 è l'estremo destro dell'intorno, ad esempio $I(-2) = (-4; -2)$.
- intorno destro di x_0, se $\delta_1 = 0$. Questo significa che il punto x_0 è l'estremo sinistro dell'intorno, ad esempio $I(-2) = (-2; 3)$.
- intorno di $-\infty$, se $I = (-\infty; a)$, $a \in \mathbb{R}$. In pratica, sono intorni di $-\infty$ e si indicano con $I(-\infty)$ tutti gli intervalli del tipo $x < a$, indipendetemente dal segno di a, come ad esempio $I(-\infty) = (-\infty; 3)$.
- intorno di $+\infty$, se $I = (b; +\infty)$, $b \in \mathbb{R}$. In pratica, sono intorni di $+\infty$ e si indicano con $I(+\infty)$ tutti gli intervalli del tipo $x > b$, indipendetemente dal segno di b, come ad esempio $I(+\infty) = (3; +\infty)$.
- intorno di ∞, se $I = I^-(-\infty) \cup I^+(+\infty)$. In altre parole, sono intorni di infinito (senza il segno) tutte le unioni di intervalli di meno infinito e più infinito del tipo

$$x < a \vee x > b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b.$$

Per introdurre il concetto di limite, immaginiamo di voler calcolare il valore di una funzione nell'intorno di un punto x_0 nel quale essa non è definita. Per esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

non è definita in $x_0 = 3$, ma vogliamo vedere come si comporta "abbastanza vicino" a $x_0 = 3$. Per

x	2.900	2.990	2.999	3.100	3.010	3.001
$f(x)$	0.900	0.990	0.999	1.100	1.010	1.001

Tabella 7.1: Valori assunti da $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$ nell'intorno di $x_0 = 3$.

far questo, utilizzando la calcolatrice, calcoliamo (si veda la tabella 7.1) i valori assunti da $f(x)$ man mano che ci si avvicina a 3 da sinistra $(2.9, 2.99, 2.999)$ oppure da destra $(3.1, 3.01, 3.001)$. Si osserva facilmente che il valore di $f(x)$ tende in modo sempre più evidente al valore 1, per difetto se ci si avvicina a 3 da sinistra, per eccesso se l'avvicinamento avviene da destra. Molto qualitativamente si può quindi affermare che $f(x)$ "tende" a $\ell = 1$ per x che "tende" a $x_0 = 3$.

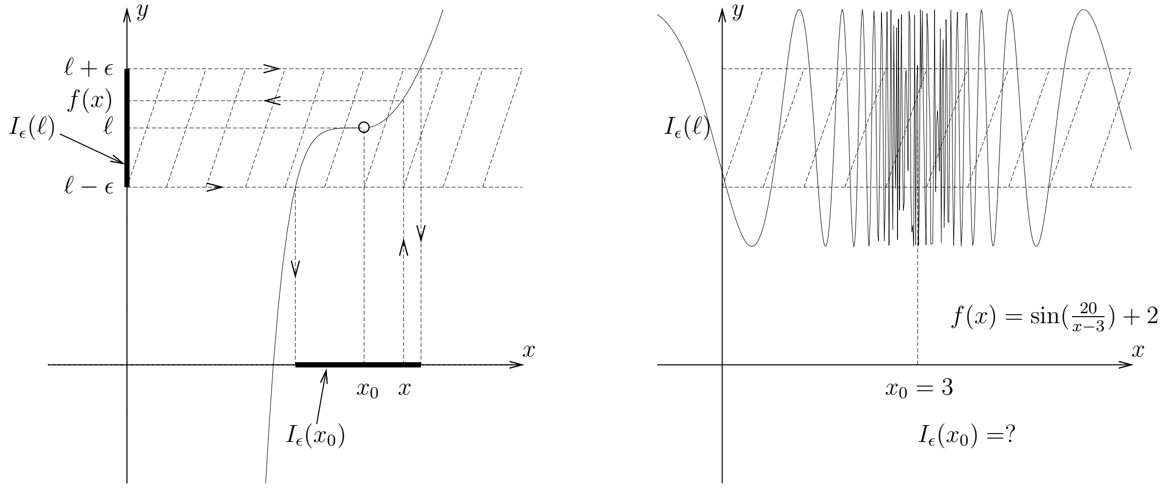

Figura 7.1: Limite finito ℓ per x che tende ad un valore finito x_0 (sinistra), non esistenza del limite (destra).

Cerchiamo di generalizzare questi fatti. Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in un intorno $I(x_0)$, escluso al più il punto x_0. Diremo che *il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale a ℓ* e scriveremo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se succede quanto segue. Con riferimento alla figura 7.1 di sinistra, scelto un numero positivo e arbitrario ϵ, consideriamo un intorno di ℓ di ampiezza ϵ che indichiamo con $I_\epsilon(\ell) = (\ell - \epsilon; \ell + \epsilon)$; esso è un intorno sull'asse y (in figura si veda il segmento ingrossato tra $\ell - \epsilon$ e $\ell + \epsilon$) e non è altro che una striscia orizzontale (si veda il tratteggio) che contiene ℓ. In corrispondenza di $I_\epsilon(\ell)$ è allora possibile determinare un intorno di x_0 che dipende da ϵ e che indichiamo con $I_\epsilon(x_0)$ in modo tale che scelto un valore $x \in I_\epsilon(x_0) \subseteq I(x_0)$ si ha che $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$. Per capire come si origina l'intorno $I_\epsilon(x_0)$, si notino in figura 7.1 le frecce orizzontali che partono rispettivamente da $\ell + \epsilon$ e $\ell - \epsilon$, intercettano il grafico di $f(x)$ e scendono verso l'asse x individuando proprio l'intorno $I_\epsilon(x_0)$, che graficamente corrisponde al segmento ingrossato sull'asse x. Si noti altresì la freccia che parte da $x \in I_\epsilon(x_0) \subseteq I(x_0)$, intercetta il grafico della funzione, e termina sull'asse y in corrispondenza del valore $f(x)$ che è proprio contenuto nella striscia tratteggiata che corrisponde all'intorno $I_\epsilon(\ell)$.

A cosa serve tutta questa procedura? La conclusione di tutto il ragionamento è che, se esiste il limite, quando si sceglie x "abbastanza vicino" a x_0 ($x \in I_\epsilon(x_0) \subseteq I(x_0)$) allora la funzione $f(x)$ rimane "confinata" in una striscia orizzontale ($f(x) \in I_\epsilon(\ell)$) dalla quale non può sfuggire. Non solo: siccome ϵ è scelto in modo del tutto arbitrario (purché positivo), se la procedura è vera per ogni ϵ, rimpicciolendo sempre di più il suo valore si costringe la funzione nell'intorno $I_\epsilon(x_0)$ ad essere contenuta in una striscia sempre più stretta ovvero, al limite, è possibile conoscere il comportamento di $f(x)$ nell'intorno di x_0 anche se non è definita in $x = x_0$.

Osservazione 7.2 *In modo molto qualitativo si può dire che una funzione ammette limite nell'intorno di un punto x_0 se il suo grafico può essere confinato, nell'intorno di x_0, in una striscia orizzontale piccola a piacere (figura 7.1 di sinistra).*

Osservazione 7.3 *Il limite di una funzione può anche non esistere e questo succede se non è possibile confinare il grafico della funzione in una striscia orizzontale piccola a piacere, ovvero per ϵ piccolo "quanto si vuole" (figura 7.1 di destra).*

Infatti, con riferimento alla figura 7.1 di destra, la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{20}{x-3}\right) + 2$$

non ammette limite per x che tende a $x_0 = 3$ in quanto è possibile applicare la procedura precedente solo con strisce centrate su $y = 2$ e aventi ampiezza $\epsilon > 1$, mentre se $\epsilon < 1$ non è mai possibile determinare un intorno $I_\epsilon(3)$ in modo tale che per ogni $x \in I_\epsilon(3)$ il grafico della funzione sia confinato in una striscia orizzontale. Pertanto, siccome la procedura non può essere applicata *per ogni* intorno (i.e. ϵ piccolo a piacere), il limite per x che tende a 3 di $f(x) = \sin(\frac{20}{x-3}) + 2$ *non esiste*.

7.2 Definizione e verifica del limite di funzione

Dopo la precedente disquisizione qualitativa sul concetto di limite, introduciamo ora la definizione di limite in modo formale utilizzando la nozione di intorno.

Definizione 7.4 *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno $J(x_0)$ escluso al più il punto x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$ oppure $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$). Si dice che il limite per x che tende a x_0 è uguale a ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$ oppure $\ell = +\infty$ oppure $\ell = -\infty$) e scriviamo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se per ogni intorno $I(\ell)$ di ℓ esiste un intorno $I(x_0) \subseteq J(x_0)$, con $I(x_0)$ dipendente da $I(\ell)$, tale che per ogni $x \neq x_0$ con $x \in I(x_0)$ si abbia $f(x) \in I(\ell)$.

Osservazione 7.5 *Si notino, nella defnzione 7.4, il* per ogni *intorno $I(\ell)$ e il* per ogni *$x \in I(x_0)$.*

Osservazione 7.6 *È ora chiaro che la "striscia" nella quale rimane confinato il grafico di $f(x)$ è semplicemente un intorno di ℓ (dove ℓ può essere sia un numero finito sia ∞).*

Osservazione 7.7 *Il limite si dice* destro *o* da destra *e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

se l'intorno di x_0 *è un intorno destro; viceversa il limite si dice* sinistro *o* da sinistra *e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

se l'intorno di x_0 *è un intorno sinistro.*

Osservazione 7.8 *Affinché il limite* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *esista (con* $x_0 \in \mathbb{R}$ *oppure* $x_0 = +\infty$ *oppure* $x_0 = -\infty$ *e* $\ell \in \mathbb{R}$ *oppure* $\ell = +\infty$ *oppure* $\ell = -\infty$*), è necessario che il limite destro ed il limite sinistro esistano e siano uguali. In formule,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Osservazione 7.9 *Il limite si dice* per eccesso *e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$$

se l'intorno di ℓ *è un intorno destro, ovvero se* $f(x) > \ell$ *nell'intorno di* x_0*. Il limite si dice* per difetto *e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$$

se l'intorno di ℓ *è un intorno sinistro, ovvero se* $f(x) < \ell$ *nell'intorno di* x_0*.*

Siccome sia x_0 che ℓ possono essere dei numeri reali al finito oppure $+\infty$ o $-\infty$, sono possibili numerose combinazioni, diseguito riportate.

Definizione 7.10 [Limite finito per x che tende ad un valore finito]. *Sia* $f(x)$ *una funzione definita in un intorno* $J(x_0)$ *escluso al più il punto* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Si dice che il limite per* x *che tende a* x_0 *di* $f(x)$ *è uguale a* $\ell \in \mathbb{R}$ *e scriviamo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un intorno* $I_\epsilon(x_0) \subseteq J(x_0)$ *tale che per ogni* $x \neq x_0$ *con* $x \in I_\epsilon(x_0)$ *si abbia* $|f(x) - \ell| < \epsilon$*.*

Per verificare questo tipo di limite, quindi, bisogna mostrare che preso $\epsilon > 0$ è possibile determinare un intorno di x_0 che dipende da ϵ in modo che per ogni x di questo intorno si abbia $|f(x) - \ell| < \epsilon$. In altre parole, bisogna determinare l'intorno $I_\epsilon(x_0)$ che soddisfa $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

Esercizio 7.11 *Si verifichi, tramite la definizione di limite, che*

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 1.$$

Risoluzione. Scelto $\epsilon > 0$ cerchiamo per quali valori di x si ha che

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} - 1 \right| < \epsilon.$$

Scomponendo il numeratore si ha $\left|\frac{x^2-5x+6}{x-3}-1\right| < \epsilon \iff \left|\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}-1\right| < \epsilon \iff$ $|x-2-1| < \epsilon \iff -\epsilon < x-3 < \epsilon \iff 3-\epsilon < x < 3+\epsilon$. Pertanto, $I_\epsilon(3) = (3-\epsilon; 3+\epsilon)$ garantisce che per ogni $x \in I_\epsilon(3)$ si abbia $|f(x)-\ell| < \epsilon$. Il limite è quindi verificato. ■

Esercizio 7.12 *Si verifichi, tramite la definizione di limite, che*

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{x-1} = 3$$

Risoluzione. Il lettore mostri che, scelto $\epsilon > 0$, da $|f(x)-\ell| < \epsilon$ si ottiene $1-\epsilon/2 < x < 1+\epsilon/2$, che è un intorno di $x_0 = 1$. ■

Definizione 7.13 [Limite finito per x che tende a più infinito]. *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno $J(+\infty)$. Si dice che il limite per x che tende a più infinito di $f(x)$ è uguale a $\ell \in \mathbb{R}$ e scriviamo*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno $I_\epsilon(+\infty) \subseteq J(+\infty)$ tale che per ogni $x \in I_\epsilon(+\infty)$ si abbia $|f(x)-\ell| < \epsilon$.

Osservazione 7.14 *Graficamente, il caso di limite finito per x che tende a più infinito è riportato in figura 7.2 di sinistra. Si noti che la striscia che contiene ℓ può essere resa piccola a piacere prendendo ϵ piccolo a piacere ma, nonostante l'intorno di $+\infty$ diventi sempre più piccolo (ovvero l'estremo inferiore si sposti sempre più a destra), per ogni x appartente all'intorno di $+\infty$ si ha che $f(x)$ è contenuta nella striscia orizzontale.*

Definizione 7.15 [Limite finito per x che tende a meno infinito]. *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno $J(-\infty)$. Si dice che il limite per x che tende a meno infinito di $f(x)$ è uguale a $\ell \in \mathbb{R}$ e scriviamo*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno $I_\epsilon(-\infty) \subseteq J(-\infty)$ tale che per ogni $x \in I_\epsilon(-\infty)$ si abbia $|f(x)-\ell| < \epsilon$.

Osservazione 7.16 *Il lettore avrà notato che in alcuni testi si trova $x \to \infty$, ovvero l'infinito compare senza il segno. Questo significa che si sta considerando un intorno di ∞ (sull'asse x), ovvero un intorno del tipo $x < a \vee x > b$ con $a < b$, e che si ottiene come risultato ℓ sia quando si calcola il limite $x \to +\infty$ sia quando si calcola il limite $x \to -\infty$. In formule vale, quindi, l'equivalenza*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell.$$

Esercizio 7.17 *Si verifichi, tramite la definizione di limite, che*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x-3} = 2.$$

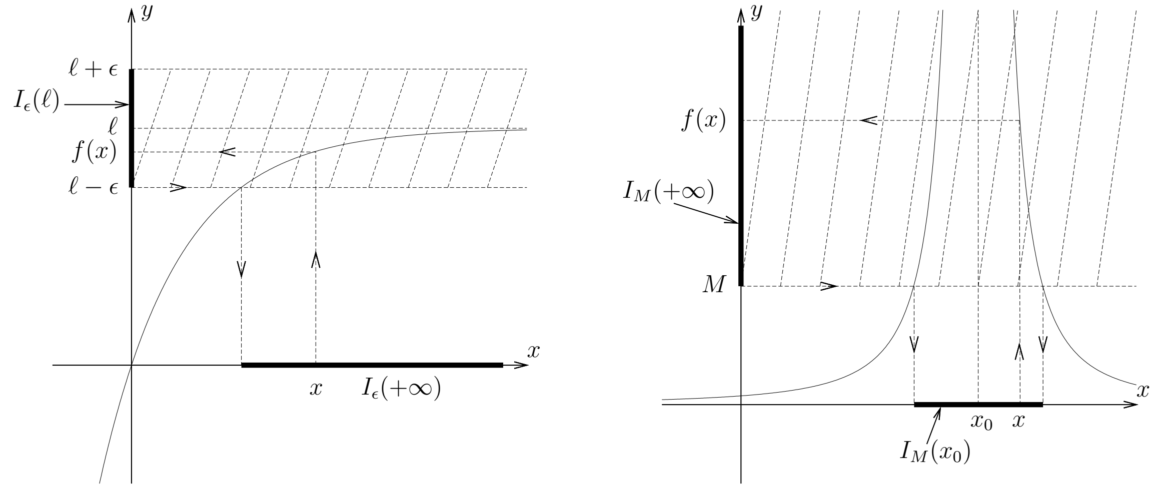

Figura 7.2: Limite finito ℓ per x che tende ad infinito (sinistra) e limite infinito per x che tende ad un numero finito x_0 (destra).

Risoluzione. Scelto $\epsilon > 0$ cerchiamo per quali valori di x si ha che

$$\left| \frac{2x}{x-3} - 2 \right| < \epsilon.$$

Svolgendo i calcoli si ottiene $\left| \frac{2x}{x-3} - 2 \right| < \epsilon \iff \left| \frac{2x - 2x + 6}{x-3} \right| < \epsilon \iff \left| \frac{6}{x-3} \right| < \epsilon \iff \frac{6}{|x-3|} < \epsilon$. Siccome sia ϵ che $|x-3|$ sono positivi, è possibile riscrivere la disuguaglianza come $|x-3| > \frac{6}{\epsilon} \iff x - 3 < -\frac{6}{\epsilon} \vee x - 3 > \frac{6}{\epsilon} \iff x < 3 - \frac{6}{\epsilon} \vee x > 3 + \frac{6}{\epsilon}$. Pertanto, $I_\epsilon(+\infty) = (3 + 6/\epsilon; +\infty)$ garantisce che per ogni $x \in I_\epsilon(+\infty)$ si ha che $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Il limite è quindi verificato. Si osservi che nel caso $x \to -\infty$ si sarebbe dovuto prendere l'intorno $I_\epsilon(-\infty) = (-\infty; 3 - 6/\epsilon)$, mentre nel caso $x \to \infty$ (senza segno) si sarebbe dovuto prendere l'intorno di infinito (senza il segno) $I_\epsilon(\infty) = (-\infty; 3 - 6/\epsilon) \cup (3 + 6/\epsilon; +\infty)$. ■

Esercizio 7.18 *Si verifichi, tramite la definizione di limite, che*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

Risoluzione. Il lettore verifichi che, scelto $\epsilon > 0$, imponendo $|f(x) - \ell| < \epsilon$ si ottiene $x < -1/\epsilon$, che è un intorno di $-\infty$ che dipende da ϵ. ■

Definizione 7.19 [Limite più infinito per x che tende ad un valore finito]. *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno $J(x_0)$ escluso al più il punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale a più infinito e scriviamo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I_M(x_0) \subseteq J(x_0)$ tale che per ogni $x \neq x_0$ con $x \in I_\epsilon(x_0)$ si abbia $f(x) > M$.

Osservazione 7.20 *Questo caso è riportato in figura 7.2 di destra. Si osservi che la "striscia" orizzontale è il semipiano dei punti di ordinata maggiore di M. Infatti, se il limite esiste, si può aumentare a piacere il valore di M ottendo come conseguenza il rimpicciolimento dell'intorno $I_M(x_0)$ per ogni x del quale si ha che $f(x)$ è comunque contenuta nella striscia considerata, ovvero $f(x) > M$.*

Definizione 7.21 [Limite meno infinito per x che tende ad un valore finito]. *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno $J(x_0)$ escluso al più il punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale a meno infinito e scriviamo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I_M(x_0) \subseteq J(x_0)$ tale che per ogni $x \neq x_0$ con $x \in I_\epsilon(x_0)$ si abbia $f(x) < -M$.

Osservazione 7.22 *In alcuni testi si trova la scrittura*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Questo significa che anziché considerare gli intorni nell'insieme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ si stanno considerando gli intorni in $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sebbene la definizione di limite 7.4 rimanga assolutamente valida ed identica in entrambi i casi, si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^* \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{in} \quad \dot{\mathbb{R}}.$$

Esercizio 7.23 *Si verifichi, tramite la definizione di limite, che*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

Risoluzione. Verificare la definizione significa mostrare che per ogni $M > 0$ è possibile determinare un intorno destro di $x_0 = 1$, ovvero un intorno del tipo $(1; a)$ $a > 1$, tale che per ogni $x \in I_M(1)$ e $x \neq 1$ si abbia $f(x) > M$. Pertanto, scelto $M > 0$ cerchiamo per quali valori di x si ha che

$$\frac{1}{x-1} > M.$$

Siccome siamo alla ricerca di un intorno destro di $x_0 = 1$, supponiamo $x > 1$ e, pertanto, $x - 1 > 0$. Si faccia attenzione al fatto che questa condizione deve poi essere messa a sistema con il risultato trovato. Svolgendo i calcoli si ottiene $\frac{1}{x-1} > M \iff x - 1 < \frac{1}{M} \iff x < 1 + \frac{1}{M}$, che va messa a sistema con la condizione $x > 1$ ottenendo cosl̀a soluzione $1 < x < 1 + \frac{1}{M}$ Pertanto, $I_M(1) = (1; 1 + 1/M)$ garantisce che per ogni $x \in I_M(1)$ si abbia $f(x) > M$. Il limite è quindi verificato. ■

Esercizio 7.24 *Si verifichi, tramite la definizione di limite, che*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Risoluzione. Seguendo l'esecizio precedente ed introducendo le opportune modifiche, si deve mostrare che per ogni $M > 0$ è possibile determinare un intorno sinistro di $x_0 = 1$, ovvero un intorno del tipo $(b; 1)$ $b < 1$, tale che per ogni $x \in I_M(1)$ e $x \neq 1$ si abbia $f(x) < -M$. Pertanto, scelto $M > 0$ cerchiamo per quali valori di x si ha che

$$\frac{1}{x-1} < -M.$$

Siccome siamo alla ricerca di un intorno sinistro di $x_0 = 1$, supponiamo $x < 1$ e, pertanto, $x - 1 < 0$. Come prima, questo impone che la soluzione della disequazione vada poi messa a sistema con la condizione $x < 1$. Svolgendo i calcoli si ottiene
$\frac{1}{x-1} < -M \iff \frac{-1}{x-1} > M \iff x-1 > \frac{-1}{M} \iff x-1 > -\frac{1}{M} \iff x > 1 - \frac{1}{M}$, che va messa a sistema con la condizione $x < 1$ ottenendo cosìa soluzione $1 - \frac{1}{M} < x < 1$ Pertanto, $I_M(1) = (1 - 1/M; 1)$ garantisce che per ogni $x \in I_M(1)$ si abbia $f(x) < -M$. Il limite è quindi verificato. ■

Esercizio 7.25 *Si verifichi, tramite la definizione di limite, che*

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{4x - x^2 - 4} = -\infty$$

Risoluzione. Scelto $M > 0$, verifiche cha da $\frac{1}{4x - x^2 - 4} < -M$ si ottiene ottiene come soluzione un intorno completo di 2. Si ha
$\frac{1}{4x-x^2-4} < -M \iff \frac{1}{-x^2+4x-4} < -M \iff -\frac{1}{x^2-4x+4} < -M \iff \frac{1}{(x-2)^2} > M \iff (x-2)^2 < \frac{1}{M} \iff -\frac{1}{\sqrt{M}} < x-2 < \frac{1}{\sqrt{M}} \iff 2 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 2 + \frac{1}{\sqrt{M}}$, che è un intorno completo di 2 che dipende da M e che, in particolare, diventa sempre più "piccolo" al crescere di M. Il limite è, quindi, verificato. ■

Definizione 7.26 [Limite più infinito per x che tende a più infinito]. *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno $J(+\infty)$. Si dice che il limite per x che tende a più infinito di $f(x)$ è uguale a più infinito e scriviamo*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I_M(+\infty) \subseteq J(+\infty)$ tale che per ogni $x \in I_M(+\infty)$ si abbia $f(x) > M$.

Definizione 7.27 [Limite meno infinito per x che tende a più infinito]. *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno $J(+\infty)$. Si dice che il limite per x che tende a più infinito di $f(x)$ è uguale a meno infinito e scriviamo*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I_M(+\infty) \subseteq J(+\infty)$ tale che per ogni $x \in I_M(+\infty)$ si abbia $f(x) < -M$.

Definizione 7.28 [Limite più infinito per x che tende a meno infinito]. *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno $J(-\infty)$. Si dice che il limite per x che tende a meno infinito di $f(x)$ è uguale a più infinito e scriviamo*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I_M(-\infty) \subseteq J(-\infty)$ tale che per ogni $x \in I_M(-\infty)$ si abbia $f(x) > M$.

Definizione 7.29 [Limite meno infinito per x che tende a meno infinito]. *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno $J(-\infty)$. Si dice che il limite per x che tende a meno infinito di $f(x)$ è uguale a meno infinito e scriviamo*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I_M(-\infty) \subseteq J(-\infty)$ tale che per ogni $x \in I_M(-\infty)$ si abbia $f(x) < -M$.

Esercizio 7.30 *Si verifichi, tramite la definizione di limite, che*

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Risoluzione. Scelto $M > 0$, da $x^3 < -M$ si ottiene immediatamente $x < -\sqrt[3]{M}$, che è un intorno di $-\infty$ che dipende da M. ■

7.3 Limiti delle funzioni elementari

Il lettore può verificare facilmente i seguenti limiti delle funzioni elementari (o semplicemente dedurli dal grafico delle rispettive funzioni riportati nella sezione 6.3):

1. Gradino di Heaviside, $f(x) = H(x)$:
   $\lim_{x\to-\infty} H(x) = 0, \quad \lim_{x\to0^-} H(x) = 0, \quad \lim_{x\to0^+} H(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} H(x) = 1.$
2. Segno di x, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$:
   $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sgn}(x) = -1, \quad \lim_{x\to0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1, \quad \lim_{x\to0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sgn}(x) = 1.$
3. Valore assoluto (o modulo) di x, $f(x) = |x|$:
   $\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty, \quad \lim_{x\to0} |x| = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty.$

4. Rampa di x, $f(x) = \mathrm{ramp}(x)$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ramp}(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to0} \mathrm{ramp}(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ramp}(x) = +\infty.$

5. Parte intera di x, $f(x) = [x]$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} [x] = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to n} [x] = \nexists \quad \text{se } n \in \mathbb{N}, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} [x] = +\infty.$

6. Mantissa di x, $f(x) = x - [x]$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} x - [x] = \nexists, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x - [x] = \nexists.$

7. Potenza di x con esponente naturale, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$:
(a) n pari: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty.$
(b) n dispari: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty.$

8. Potenza di x con esponente intero negativo, $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$:
(a) n pari: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0^+, \quad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0^+.$
(b) n dispari: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0^-, \quad \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0^+.$

9. Potenza di x con esponente razionale positivo, $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, $n, m \in \mathbb{N}$:
(a) m pari, $\forall\, n$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x^m} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x^m} = +\infty.$
(b) m dispari, n pari: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x^m} = +\infty, \quad (x \to -\infty \quad \text{non ha significato}).$
(c) m dispari, n dispari: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x^m} = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x^m} = +\infty.$

10. Potenza di x con esponente razionale negativo, $f(x) = x^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, $n, m \in \mathbb{N}$:
(a) m pari, $\forall\, n$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = 0^+, \quad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = 0^+.$
(b) m dispari, n pari: $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = 0^+, \quad (x < 0 \quad \text{non ha significato}).$
(c) m dispari, n dispari: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = 0^-, \quad \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = 0^+.$

11. Potenza di x con esponente irrazionale positivo, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \alpha > 0$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty, \quad (x \to -\infty \quad \text{non ha significato}).$

12. Potenza di x con esponente irrazionale negativo, $f(x) = x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \alpha > 0$:
$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0^+, \quad (x < 0 \quad \text{non ha significato}).$

13. Esponenziale di x, $f(x) = a^x$:
(a) $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0^+.$
(b) $a > 1$: $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0^+, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$

14. Logaritmo di x, $f(x) = \log_a x$:
(a) $0 < a < 1$: $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$, ($x \leq 0$ non ha significato).
(b) $a > 1$: $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$, ($x \leq 0$ non ha significato).

15. Seno di x, $f(x) = \sin x$:
$\lim_{x\to -\infty} \sin x = \nexists$, $\lim_{x\to +\infty} \sin x = \nexists$.

16. Coseno di x, $f(x) = \cos x$:
$\lim_{x\to -\infty} \cos x = \nexists$, $\lim_{x\to +\infty} \cos x = \nexists$.

17. Tangente di x, $f(x) = \tan x$:
$\lim_{x\to -\infty} \tan x = \nexists$, $\lim_{x\to \left(k\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$, $\lim_{x\to \left(k\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} \tan x = \nexists$.

18. Cotangente di x, $f(x) = \cot x$:
$\lim_{x\to -\infty} \cot x = \nexists$, $\lim_{x\to (k\pi)^-} \cot x = -\infty$, $\lim_{x\to (k\pi)^+} \cot x = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} \cot x = \nexists$.

19. Arcotangente di x, $f(x) = \arctan x$:
$\lim_{x\to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

7.4 Algebra dei limiti e calcolo dei limiti

Se $x_0 \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ allora:

1. $$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] + \left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right], \qquad \text{ma} \quad +\infty - \infty = ?$$

2. $$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] - \left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right], \qquad \text{ma} \quad +\infty - \infty = ?$$

3. $$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right], \qquad \text{ma} \quad 0 \cdot (\pm\infty) = ?$$

4. $$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]}{\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]}, \qquad \text{ma} \quad \frac{0}{0} = ?, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$$

5. $$\lim_{x\to x_0} \left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]}, \qquad \text{ma} \quad 0^0 = ?, \quad (\pm\infty)^0 = ?, \quad 1^{\pm\infty} = ?$$

Le forme del tipo $+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, 0^0, $(\pm\infty)^0$ e $1^{\pm\infty}$ sono dette *forme indeterminate* in quanto non è possibile conoscere, a priori, il risultato di queste operazioni. Per poter risolvere le forme indeterminate sono necessari alcuni "trucchi", riassunti nella sezione seguente.

Esercizio 7.31 *Si calcolino, se esistono, i limiti*

1. $\lim_{x\to 1} x^3 + x - 5$, 2. $\lim_{x\to 1} x^3 - \frac{1}{x}$, 3. $\lim_{x\to 1} (x-1)^3 + \frac{1}{(x-1)^2}$, 4. $\lim_{x\to +\infty} x^3 + x - 5$,

5. $\lim_{x\to-\infty} -x^3 - x - 5$, 6. $\lim_{x\to+\infty} \sin x$, 7. $\lim_{x\to+\infty} x + \sin x$, 8. $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Risoluzione.
1. Siccome per $x \to 1$ si ha che $x^3 \to 1, x \to 1, -5 = -5$, allora $\lim_{x\to1} x^3+x-5 = 1+1-5 = -3$.
2. Siccome per $x \to 1$ si ha che $x^3 \to 1, \frac{1}{x} \to 1$, allora $\lim_{x\to1} x^3 - \frac{1}{x} = 1 - 1 = 0$.
3. Siccome per $x \to 1$ si ha che $(x-1)^3 \to 0, \frac{1}{(x-1)^2} \to +\infty$, allora $\lim_{x\to1}(x-1)^3 + \frac{1}{(x-1)^2} = 0 + \infty = +\infty$.
4. Siccome per $x \to +\infty$ si ha che $x^3 \to +\infty, x \to +\infty, -5 = -5$, allora $\lim_{x\to+\infty} x^3 + x - 5 = +\infty + \infty - 5 = +\infty$.
5. Siccome per $x \to -\infty$ si ha che $x^3 \to -\infty, x \to -\infty, -5 = -5$, allora $\lim_{x\to-\infty} -x^3 - x - 5 = -(-\infty) - (-\infty) - 5 = +\infty + \infty - 5 = +\infty$.
6. Si osservi che quando $x \to +\infty$, sappiamo per certo che $|\sin x| \le 1$ (ovvero che il seno è sempre compreso tra -1 e 1 estremi inclusi), ma non sappiamo che valore assuma. Per questo motivo è $\lim_{x\to+\infty} = \nexists$.
7. Per $x \to +\infty$, come visto, il limite del seno non esiste ma il seno è un valore limitato $-1 \le \sin x \le 1$, mentre $x \to +\infty$; pertanto $\lim_{x\to+\infty} x + \sin x = +\infty + k$ $(-1 \le k \le 1)$ da cui $\lim_{x\to+\infty} x + \sin x = +\infty$.
8. Siccome per $x \to +\infty$ si ha che $\frac{1}{x} \to 0$, allora $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0$. ■

Esercizio 7.32 *Si calcolino, se esistono, i limiti*

1. $\lim_{x\to1^+} x - 1$, 2. $\lim_{x\to1^+} x^3 - \frac{1}{x}$, 3. $\lim_{x\to1^+} (x-1)^3 + \frac{1}{x-1}$, 4. $\lim_{x\to1^+} \log(x-1)$,

5. $\lim_{x\to-1^+} e^{\frac{1}{x+1}}$, 6. $\lim_{x\to-1^-} e^{\frac{1}{x+1}}$, 7. $\lim_{x\to1} e^{\frac{1}{x-1}}$, 8. $\lim_{x\to-1^-} \left[\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x+1}\right]$.

Risoluzione.
1. Si ricordi che 1^+ significa, qualitativamente, un numero "un po' più a destra di 1". Pertanto, $\lim_{x\to1^+} x - 1 = 1^+ - 1 = 0^+$. Si osservi che in molti testi non viene specificato il fatto che il risultato è un limite *per eccesso* ma spesso risulta utile saperlo (in particolare nello studio di funzione).
2. Siccome per $x \to 1^+$ si ha che $x^3 \to 1^+, \frac{1}{x} \to 1^-$ (perché 1^- è un numero "un po' più a sinistra di 1" e, quindi, minore di 1), allora $\lim_{x\to1} x^3 - \frac{1}{x} = 1^+ - (1^-) = 0^+$.
3. Per $x \to 1^+$ si ha $(x-1)^3 \to 0^+$, mentre per capire come si comporta il rapporto $\frac{1}{x-1}$ occorre osservare che quando $x \to 1^+$ si ha $x - 1 \to 0^+$ per cui $\frac{1}{x-1} \to +\infty$. Pertanto, $\lim_{x\to1^+} (x-1)^3 + \frac{1}{(x-1)^2} = 0^+ + \infty = +\infty$.
4. Siccome per $x \to 1^+$ si ha che $x - 1 \to 0^+$, allora $\lim_{x\to1^+} \log(x-1) = -\infty$.
5. Si osservi che $-1^+ = (-1)^+$ ovvero -1^+ è un numero a destra di -1 e quindi $-1^+ > -1$.

Pertanto, quando $x \to -1^+$ si ha $(x+1) \to 0^+$ e, quindi, $\dfrac{1}{x+1} \to +\infty$ da cui $\lim\limits_{x\to -1^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$.
6. Come nel caso precedente, si osservi che $-1^- = (-1)^-$ ovvero -1^- è un numero a sinistra di -1 e quindi $-1^- < -1$. Pertanto, quando $x \to -1^-$ si ha $(x+1) \to 0^-$ e, quindi, $\dfrac{1}{x+1} \to -\infty$ da cui $\lim\limits_{x\to -1^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} = 0^+$.
7. Per quanto visto nei casi dei limiti 5 e 6 si ha $\lim\limits_{x\to 1^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} = 0^+$ pertanto, essendo il limite destro e sinistro diversi, si ha $\lim\limits_{x\to 1^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} = \nexists$.
8. Sappiamo già (si veda il caso 6) che quando $x \to -1^-$ si ha $\dfrac{1}{x+1} \to -\infty$ per cui
$\lim\limits_{x\to -1^-} \left[\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right) - \dfrac{1}{x+1}\right] = k - (-\infty) = +\infty$ essendo $-1 \le k \le 1$. ■

Esercizio 7.33 *Si calcolino, se esistono, i limiti*

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-5}{2x^2+1}$, 2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x^2-2x+1}$, 3. $\lim\limits_{x\to 1} (x+1)\log(2-x)$, 4. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+1)^{x-2}$,

5. $\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$, 6. $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2+1)^{\frac{1}{x-1}}$, 7. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{\log(x-1)}$, 8. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\log(x-1)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}}$.

Risoluzione.
1. Siccome quando $x \to 1$ si ha che $(x^3+x-5) \to -3$ e $(2x^2+1) \to 3$, il risultato è $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-5}{2x^2+1} = \dfrac{-3}{3} = -1$.
2. Siccome quando $x \to 1$ si ha che $(x^2+1) \to 2$ e $x^2-2x+1 = (x-1)^2 \to +\infty$, il risultato è $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x^2-2x+1} = \dfrac{2}{+\infty} = 0^+$.
3. Quando $x \to 1$ si ha $(x+1) \to 2$ e $(2-x) \to 1$ da cui $\log(2-x) \to 0$. Pertanto, $\lim\limits_{x\to 1} (x+1)\log(2-x) = 2 \cdot 0 = 0$.
4. Siccome quando $x \to 1$ si ha che $(x^2+1) \to 2$ e $(x-2) \to -1$, il risultato è $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+1)^{x-2} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$.
5. Quando $x \to 1^-$ si ha $(x-1) \to 0^-$ e $\dfrac{1}{x-1} \to -\infty$ da cui $\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} \to 0^+$. Pertanto, $\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} = 0^- \cdot 0^+ = 0^-$.
6. Siccome quando $x \to 1^-$ si ha che $(x^2+1) \to 2^-$ (dove 2^- indica un numero “appena a sinistra di 2”) e $\dfrac{1}{x-1} \to -\infty$, il risultato è $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2+1)^{\frac{1}{x-1}} = (2^-)^{-\infty} = 0^+$.
7. Quando $x \to 1^+$ si ha $(x-2) \to -1^+$ e $(x-1) \to 0^+$ da cui $\log(x-1) \to -\infty$. Pertanto, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{\log(x-1)} = -1^+ \cdot (-\infty) = +\infty$.
8. Quando $x \to 1^+$ si ha $(x-1) \to 0^+$ da cui $\log(x-1) \to -\infty$, mentre $(1-x) \to 0^-$ da cui $\dfrac{1}{1-x} \to -\infty$, che implica $\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}} \to 0^+$. Pertanto, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\log(x-1)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}} = \dfrac{-\infty}{0^+} = (-\infty) \cdot \dfrac{1}{0^+} = (-\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$. ■

Esercizio 7.34 *Si calcolino, se esistono, i limiti*

$$1.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x},\qquad 2.\ \lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x\sin x,\qquad 3.\ \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x\sin x,\qquad 4.\ \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x(\sin x+2),$$

$$5.\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+\cos(\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x-1},\qquad 6.\ \lim_{x\to0}\frac{1}{x},\qquad 7.\ \lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},\qquad 8.\ \lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}.$$

Risoluzione.
1. Quando $x\to+\infty$ il limite di $\sin x$ non esiste ma è limitato tra -1 e 1, mentre $x\to+\infty$. Pertanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{k}{+\infty}=k\cdot\dfrac{1}{+\infty}=k\cdot0^+=0$ con $-1\le k\le1$. Si noti che il limite è 0 senza il segno perché il segno di k è ignoto.
2. Quando $x\to-\infty$ il limite di $\sin x$ non esiste ma è limitato tra -1 e 1, mentre $\mathrm{e}^x\to0^+$. Pertanto, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x\sin x=0\cdot k=0$, con $-1\le k\le1$. Si noti che, come prima, il limite è 0 senza il segno perché il segno di k è ignoto.
3. Quando $x\to+\infty$ il limite di $\sin x$ non esiste ma è limitato tra -1 e 1, mentre $\mathrm{e}^x\to+\infty$. Pertanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x\sin x=(+\infty)\cdot k=\nexists$ in quanto $|k|\le1$ ma il segno di k è ignoto e, quindi, il risultato potrebbe essere $+\infty$ oppure $-\infty$ ma non ci è dato di saperlo.
4. Quando $x\to+\infty$ il limite di $\sin x$ non esiste ma è un numero compreso tra -1 e 1, per cui $(\sin x+2)$ è un numero k compreso tra 1 e 3. Come nel caso precedente $\mathrm{e}^x\to+\infty$, ma siccome moltiplica $k>0$ adesso il limite è calcolabile e si ha $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x(\sin x+2)=(+\infty)\cdot k=+\infty$ in quanto $1\le k\le3$.
5. Quando $x\to-\infty$ si ha $x^3\to-\infty$, $\mathrm{e}^x\to0^+$, $\mathrm{e}^{-x}\to\mathrm{e}^{+\infty}=+\infty$. Quindi, siccome $\cos(\mathrm{e}^{-x})$ quando $x\to+\infty$ è in modulo minore o uguale a 1, si ha $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+\cos(\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x-1}=\dfrac{-\infty+k}{0-1}=\dfrac{-\infty}{-1}=+\infty$, con $-1\le k\le1$.
6. Siccome il limite destro vale $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ e quello sinistro $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, allora $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\nexists$.
7. Siccome il limite destro vale $+\infty$ e quello sinistro 0, allora $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\nexists$.
8. Siccome $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x=0^+$ e $\lim\limits_{x\to0^-}\sin x=0^-$ si ha $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sin x}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{\sin x}=-\infty$. Essendo il limite destro diverso da quello sinistro, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin x}=\nexists$. ■

7.5 Alcune tecniche per la risoluzione delle forme indeterminate

Questa sezione riassume le tecniche utilizzabili con le nozioni note fino a questo punto mentre per le tecniche che utilizzano il concetto di derivata si rimanda al capitolo [TODO].

Forme indeterminate del tipo $+\infty-\infty$
Per risolvere queste forme indeterminate basta raccogliere l'infinito "più grande" fra quelli presenti. Nel caso dei polinomi è facile riconoscere la quantità da raccogliere perché corrisponde al monomio di grado massimo. Nel caso di differenze di radicali, invece, può risultare utile

moltiplicare e dividere l'espressione di cui si vuole calcolare il limite per la somma dei radicali, alla stregua di quando si "razionalizzano" i denominatori.

Esercizio 7.35 *Si calcolino, se esistono, i limiti*

$$1. \lim_{x\to+\infty} x^3 - x, \qquad 2. \lim_{x\to-\infty} x^2 + x, \qquad 3. \lim_{x\to-\infty} -x^2 - 5x^5 + 2, \qquad 4. \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\sin(\mathrm{e}^{-x})}{\log x^2 - \log x^4}.$$

Risoluzione.
1. Si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - x = +\infty - (+\infty) = +\infty - \infty$, che è una forma indeterminata. Per risolverla raccogliamo x^3 ottenendo $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right]$. Siccome $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, il limite diventa $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} [x^3 \cdot (1-0)] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \cdot 1 = +\infty$.
2. Si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + x = +\infty + (-\infty) = +\infty - \infty$, che è una forma indeterminata. Per risolverla raccogliamo x^2 ottenendo $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + x = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. Siccome $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, il limite diventa $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} [x^2 \cdot (1+0)] = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \cdot 1 = +\infty$.
3. Si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 - 5x^5 + 2 = -(+\infty) - (-\infty) + 2 = -\infty + \infty$, che è un forma indeterminata. Come al solito, raccogliamo il monomio di grado massimo, che in questo caso è x^5. Si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 - 5x^5 + 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[x^5\left(-\frac{1}{x^3} - 5 + \frac{2}{x^5}\right)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5(0-5+0) = -\infty \cdot (-5) = +\infty$.
4. Dagli esercizi precedenti è ormai chiaro che quando $x \to -\infty$ il limite di $\sin(\mathrm{e}^{-x}) = \sin(\mathrm{e}^{+\infty}) = \sin(+\infty)$ non esiste però è un numero k tale che $|k| \le 0$. Concentriamoci, quindi, sul denominatore. Applicando le proprietà dei logaritmi, si ha che $\log x^2 - \log x^4 = 2\log|x| - 4\log|x| = -2\log|x|$. Pertanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin(\mathrm{e}^{-x})}{\log x^2 - \log x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{k}{-2\log|x|} = \frac{k}{-\infty} = 0$. Si osservi non è specificato se si tratti di zero per eccesso (0^+) o per difetto (0^-) poiché non è noto il segno di k. ■

Generalizzando i risultati di questi esercizi segue che

Osservazione 7.36 *Il limite per $x \to \pm\infty$ di polinomio è lo stesso del limite del monomio di grado massimo.*

Esercizio 7.37 *Si calcolino, se esistono, i limiti*

$$1. \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \qquad 2. \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}.$$

Risoluzione.
1. Si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = +\infty - \infty$, che è una forma indeterminata. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ si ha $\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$. Pertanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$.

2. Si ha $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1} = +\infty - \infty$, che è una forma indeterminata. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}$ si ha $\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2-1)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2-1-x^2-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}$. Pertanto, $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-2}{+\infty} = 0^-$. ■

Forme indeterminate del tipo $0\cdot(\pm\infty)$

Siccome $(\pm\infty) = \frac{1}{0^\pm}$ e $0^\pm = \frac{1}{(\pm\infty)}$, le forme indeterminate del tipo $0\cdot(\pm\infty) = 0\cdot\frac{1}{0^\pm} = \frac{1}{(\pm\infty)}\cdot(\pm\infty)$ sono sempre riconducibili a $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, alle quali si rimanda.

Forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$

Si osservi che se $x \to x_0$ (con $x_0 \in \mathbb{R}$) causa una forma del tipo $\frac{0}{0}$ significa che $x = x_0$ è uno zero sia del numeratore che del denominatore. Pertanto, se la frazione che dà origine alla forma indeterminata è algebrica basta scomporre numeratore e denominatore facendo comparire il fattore $(x - x_0)$ che sarà poi eliso in modo da eliminare il problema. Se, invece, la frazione non è algebrica e si tratta, per esempio, di radicali, risulta comodo moltiplicare numeratore e denominatore per fattori opportuni.

Esercizio 7.38 *Si calcolino, se esistono, i limiti*

$$1.\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}, \qquad 2.\ \lim_{x\to0}\frac{x^3+x^2-x}{x^2+2x}, \qquad 3.\ \lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

Risoluzione.

1. Siccome per $x\to1$ si ha $(x^2-3x+2)\to0$ e $(x-1)\to0$, allora $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{0}{0}$. Questo significa che sia il numeratore che il denominatore sono divisibili per $x-1$. Infatti, scomponendo il numeratore si ha $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$. Pertanto, $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to1} x-2 = -1$.

2. Per $x\to0$ tutti i termini del numeratore e del denominatore si annullano. Raccogliendo x (la variabile elevata all'esponente di grado minimo), si ha $\lim_{x\to0}\frac{x^3+x^2-x}{x^2+2x} = \lim_{x\to0}\frac{x(x^2+x-1)}{x(x+2)} = \lim_{x\to0}\frac{x^2+x-1}{x+2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

3. Per $x\to1$ si ha una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Si osservi che il numeratore può essere riscritto come $(x-1) = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$. Pertanto, $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to1}\sqrt{x}+1 = 2$. ■

Forme indeterminate del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Dagli esempi riportati di seguito è facile desumere il modo di procedere nel caso in cui la forma indeterminata risulti come conseguenza di un rapporto di polinomi (funzioni razionali fratte).

Esercizio 7.39 *Si calcolino, se esistono, i limiti*

$$1.\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-x^3+x+1}{3x^3+1},\qquad 2.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x^2+2}{1+x-3x^3},\qquad 3.\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{3x^3+1}.$$

Risoluzione.
1. Al numeratore, utilizzando quanto visto per le forme indeterminate del tipo $+\infty-\infty$, si ottiene $-\infty$; al denominatore $-\infty$ per cui si ha $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-x^3+x+1}{3x^3+1}=\frac{-\infty}{-\infty}$, che è una forma indeterminata. Per risolverla utilizziamo ancora l'idea di raccogliere sia a numeratore che a denominatore la potenza di grado massimo: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-x^3+x+1}{3x^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^3\left(2+\frac{1}{x^3}\right)}=$
$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(1-0+0+0)}{1\cdot(3+0)}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty.$
2. Risolvendo il limite del numeratore e del denominatore si ottiene $\frac{+\infty}{-\infty}$, che è una forma indeterminata. Raccogliendo sia a numeratore che a denominatore la potenza di grado massimo si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x^2+2}{1+x-3x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-3\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1\cdot(1-0+0)}{1\cdot(0+0-3)}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}.$
3. Risolvendo i limiti a numeratore e denominatore si ha $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{3x^3+1}=\frac{+\infty}{-\infty}$. Raccogliendo la potenza di grado massimo sia a numeratore che a denominatore si ottiene $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{3x^3+1}=$
$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(3+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1\cdot(1+0)}{x(3+0)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3x}=0^-.$ ■

Quanto visto nei tre esempi precedenti è generalizzabile come segue.

Osservazione 7.40 *Il limite per $x\to\pm\infty$ di un rapporto di polinomi è ∞ se il numeratore ha grado maggiore del denominatore, un numero $\ell\neq 0$se i due gradi sono uguali, 0 se il grado del numeratore è minore di quello del denominatore. Il segno di ∞ e di $\ell\neq 0$ dipendono dai segni dei coefficienti di grado massimo del numeratore e del denominatore.*

Esercizio 7.41 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin^2 x+\sin x-4}{\cos x}$$

Risoluzione. Si noti che $3\sin^2 x+\sin x-4=(\sin x-1)(3\sin x+4)$, per cui, moltiplicando numeratore e denominatore per $\sin x+1$, si ottiene $-(\cos x)^2(3\sin x+4)/[\cos x(\sin x+1)]$, da cui il limite 0. ■

Esercizio 7.42 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x \to +\alpha} \frac{\cos x - \cos \alpha}{x - \alpha}$$

Risoluzione. Ricordando che $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$, si ha $-\sin \alpha$. ■

Esercizio 7.43 *Si calcolino, se esistono, i limiti*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 - x - 1}$, 2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 - x - 1}$.

Risoluzione.
1. Svolgendo i limiti dei due radicali si ottiene una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Per risolverla moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - x - 1}$ ottendendo
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 - x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 - x - 1}\right) \dfrac{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - x - 1}}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - x - 1}} =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(2x^2 - 1) - (2x^2 - x - 1)}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - x - 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 1 - 2x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - x - 1}} =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - x - 1}} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$, che è ancora una forma indeterminata (seppur di tipo diverso da quella iniziale). Procedendo come noto, raccogliamo la potenza di grado massimo ottenendo $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - x - 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}} =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{|x|\sqrt{(2-0)} + |x|\sqrt{(2-0-0)}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{|x| 2\sqrt{2}}$.
Tuttavia, siccome $x > 0$ ($x \to +\infty$) si ha $|x| = x$ e quindi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{|x| 2\sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x 2\sqrt{2}} =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
2. Svolgendo gli stessi passaggi del punto 1, e notando che se $x \to -\infty$ allora $x < 0$ e $|x| = -x$, si arriva a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{|x| 2\sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{-x 2\sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. ■

Forme indeterminate del tipo 0^0, $(+\infty)^0$ e $1^{\pm\infty}$

Le forme indeterminate di questo tipo si risolvono osservando che, sotto l'ipotesi $f(x) > 0$, vale la seguente identità

$$[f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = \mathrm{e}^{g(x) \log f(x)},$$

da cui

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to x_0} [g(x) \log f(x)]}.$$

Pertanto, il problema si sposta sul limite $\lim\limits_{x \to x_0} [g(x) \log f(x)]$, che causerà certamente una forma indeterminata del tipo $0(\pm\infty)$, da risolvere con le tecniche viste in precedenza.

Esercizio 7.44 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to 1} x^{x/(1-x)}$$

Risoluzione. Dopo aver notato che $x^{x/(1-x)} = \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}\log x}$, con il cambio di variabile $x = y + 1$ si ottiene $1/e$. ■

Esercizio 7.45 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to 0} |x|^{1/x}$$

Risoluzione. $\nexists$ perché il limite destro vale 0 e quello sinistro $+\infty$. ■

7.6 Limiti notevoli

Principali limiti notevoli (si lascia allo studente la loro dimostrazione):

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\log a}, \quad a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\} \qquad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a, \qquad a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\} \qquad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = k, \qquad k\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Esercizio 7.46 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Risoluzione. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\cos x + 1$, si ottiene $1/2$ ■

Esercizio 7.47 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{x+2}$$

Risoluzione. A seguito della sostituzione $y = x + 2$ si ottiene 1 ■

Esercizio 7.48 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x+1}-1}{5x}$$

Risoluzione. 1/25 ■

Esercizio 7.49 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-3}{x+4}\right)^{\frac{x^2-1}{2x}}$$

Risoluzione. $1/\sqrt{\mathrm{e}^7}$ ■

Esercizio 7.50 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{\sqrt[6]{x^2+1}-1}$$

Risoluzione. 6 ■

Esercizio 7.51 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[7]{x}-1}$$

Risoluzione. Dopo aver posto $y = x - 1$, si ottiene 7/5 ■

Esercizio 7.52 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan x}{\log(1+3x^2)}$$

Risoluzione. 1/3 ■

Esercizio 7.53 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(2^x-3^x)}{1-\cos(3x)}$$

Risoluzione. Si osservi che $\dfrac{x(2^x-3^x)}{1-\cos(3x)} = \dfrac{x^2 3^x \dfrac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right]}{x}}{9x^2 \dfrac{1-\cos(3x)}{9x^2}}$, da cui il limite $\dfrac{2}{9}\log(2/3)$. ■

7.7 Funzioni continue

Definizione 7.54 [Funzione continua] *Una funzione $f(x)$ definita in un intorno del punto x_0 si dice* continua *nel punto x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ovvero se*

1. *il limite destro esiste ed è finito, i.e. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$;*
2. *il limite sinistro esiste, è finito, ed è uguale al limite destro, i.e. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$;*
3. *la funzione esiste in x_0 ed il suo valore in quel punto è uguale al valore del limite, i.e. $f(x_0) = \ell$.*

Esercizio 7.55 *Si dica se la funzione $x^2 - 1$ è continua in $x_0 = 3$.*

Risoluzione. Siccome $\lim_{x \to 3^-} x^2 - 1 = \lim_{x \to 3^+} x^2 - 1 = 8$, il limite sinistro e destro esistono finiti e sono uguali tra loro. Inoltre, $f(3) = 8$. Essendo $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$, la definizione 7.54 è verificata e, quindi, la funzione $f(x) = x^2 - 1$ è continua nel punto $x_0 = 3$. ∎

Osservazione 7.56 *Se almeno una delle tre condizioni della definizione 7.54 non è soddisfatta, allora la funzione si dice* discontinua *nel punto x_0.*

Esercizio 7.57 *Si dica se la funzione $e^{\frac{1}{x}}$ è continua in $x_0 = 0$.*

Risoluzione. Siccome $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$,la condizione 1 della definizione 7.54 non è soddisfatta e, pertanto, la funzione è discontinua nel punto $x_0 = 0$. Si osservi che in questo caso non ci si è nemmeno preoccupati di verificare quanto sia $f(0)$. ∎

Definizione 7.58 *Una funzione $f(x)$ definita in un intorno sinistro del punto x_0 si dice* continua da sinistra *se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Una funzione $f(x)$ definita in un intorno destro del punto x_0 si dice* continua da destra *se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.*

Definizione 7.59 *Una funzione si dice* continua su un intervallo $[a; b]$ *se è continua in ogni punto dell'intervallo $]a; b[$, continua da sinistra in $x = a$ e continua da destra in $x = b$.*

Definizione 7.60 [Tipi di discontinuità] *Una funzione discontinua in un punto x_0 (si veda l'osservazione 7.56) ricade in uno dei seguenti casi.*

1. *Discontinuità di* **prima specie***: limite destro e sinistro sono finiti ma diversi tra loro. Chiamiamo salto il numero positivo* $S = \left| \left[\lim_{x \to x_0^+} f(x) \right] - \left[\lim_{x \to x_0^-} f(x) \right] \right|$.
2. *Discontinuità di* **seconda specie***: almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) o è infinito o non esiste.*

3. *Discontinuità di* **terza specie** *(o eliminabile): il limite destro e sinistro coincidono e sono finiti, e quindi il limite esiste finito, ma* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$*.*
   In tal caso la esiste un prolungamento per continuità $g(x)$ *della* $f(x)$ *definito dalla funzione a tratti*
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0. \end{cases}$$

Esercizio 7.61 *Si verifichi la continuità o meno della funzione*
$$f(x) = \begin{cases} x\cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Risoluzione. $f(x)$ è continua perché $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$. ■

Esercizio 7.62 *Si verifichi la continuità o meno della funzione*
$$f(x) = \frac{1}{2 - e^{1/x}}.$$

Risoluzione.
$x = 0$: discontinuità di prima specie essendo $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1/2$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (salto $S = 1/2$).
$x = 1/\log 2$: discontinuità di seconda specie essendo $\lim_{x \to (1/\log 2)^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to (1/\log 2)^+} f(x) = +\infty$. ■

Esercizio 7.63 *Determinare per quale valore di* $a \in \mathbb{R}$ *la funzione*
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & x > 1 \end{cases}$$
è continua in $x = 1$*.*

Risoluzione. $a = 1$. ■

Esercizio 7.64 *Determinare per quale valore di* $a \in \mathbb{R}$ *la funzione*
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + ax)}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$
è continua in $x = 0$*.*

Risoluzione. $a = 2$. ■

Esercizio 7.65 *Studiare la continuità della funzione*
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}.$$

Risoluzione. Discontinuità eliminabile in $x = 2$. Il prolungamento è

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & x \neq 2 \\ \\ -1 & x = 2 \end{cases}$$

■

Esercizio 7.66 *Dire quante soluzioni ammette l'equazione $e^x + x^3 = 0$ e determinare un intervallo ragionevole in cui esse sono localizzate.*

Risoluzione. $e^x = -x^3$, una sola soluzione, $x_0 \in [-1; 0]$. ■