Capitolo 6

Funzioni

6.1 Concetto di funzione e definizioni preliminari

Definizione 6.1 *Dati due insiemi non vuoti D e C, si dice applicazione o funzione una qualsiasi legge (relazione) che associa ad ogni elemento x di D* un solo *elemento y di C e scriveremo $f : D \to C$ oppure $y = f(x)$. D si chiama dominio e C codominio.*

Quindi la legge che associa a ciascun figlio la madre (naturale) è una funzione, così come la relazione che lega una persona al proprio naso. Invece, la legge che associa la madre ai propri figli non è una funzione perché ad un elemento del dominio (una madre) potrebbero essere associati più figli. Ovviamente, la legge che lega le madri di figli unici ai loro figli è una funzione.

Definizione 6.2 *Data la funzione $y = f(x)$, x si dice* variabile indipendente *e y* variabile dipendente.

Definizione 6.3 *Siano $f : D \to C$ e $A \subseteq D$. Si definisce insieme delle immagini o semplicemente immagine di A mediante f, e si indica con $f(A)$, il sottoinsieme $B \subseteq C$ definito da $B = f(A) = \{y \in C : (\exists x \in A : y = f(x))\}$*

Si osservi che con il termine *immagine* si intende il valore y del codominio corrispondente ad un particolare valore x del dominio. Per *controimmagine* si intende il viceversa, ovvero il valore x del dominio corrispondente ad un particolare valore y del codominio. Si noti che le controimmagini di y possono essere più di una. Per esempio, data la funzione $y = x^2$, l'immagine di $x = 3$ è $y = 9$, mentre le controimmagini di $y = 25$ sono $x = -5$ e $x = 5$. Se $A = [1; 4)$ allora $f(A)$, ovvero l'insieme delle immagini di A tramite f è $B = f(A) = [1; 16)$.

Definizione 6.4 *Una funzione si dice iniettiva se $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ oppure, equivalentemente, $f(x_1) \neq f(x_2) \Longrightarrow x_1 \neq x_2$. Quindi $x_1 \neq x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

In pratica questo significa che ogni elemento dell'insieme immagine "proviene" da un unico elemento del dominio. Per esempio, la funzione $y = x^2$ non è iniettiva perché $y = 4$ può essere l'immagine sia di $x = -2$ sia di $x = 2$.

Definizione 6.5 *Una funzione si dice suriettiva se $f(D) = C$, ovvero $\forall y \in C \;\; \exists x \in D : y = f(x)$.*

In pratica, per una funzione suriettiva il codominio coincide con l'insieme delle immagini, ovvero *ogni* elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio. Un esempio di funzione suriettiva è $y = x$.

Definizione 6.6 *Una funzione si dice biiettiva se essa è iniettiva e suriettiva.*

Le funzioni biiettive sono dette anche *biunivoche* e sono facilmente riconoscibili perché sono corrispondenze $1 \leftrightarrow 1$ come la relazione che associa ad ogni persona il suo naso (a meno di malformazioni o menomazioni fisiche), quella che associa a ciascun numero reale la sua rappresentazione sull'asse delle ascisse, quella che associa a ciascun numero il suo triplo, etc. Ad esempio, funzioni matematiche biiettive sono $y = x^n$ con $n \in \mathbb{N}, n$ dispari, $y = \sqrt[n]{x}$ con $n \in \mathbb{N}$, $y = \mathrm{e}^x$, $y = \log x$, $y = \arctan x$, mentre non sono biiettive le funzioni $y = x^n$ con $n \in \mathbb{N}, n$ pari, $y = \sin x$, $y = \tan x$. Si noti che le funzioni non biiettive possono essere rese biiettive restringendole ad un sottoinsieme $\bar{D}$ del loro dominio D. La funzione ristretta a tale sottoinsieme si indica con $f|_{\bar{D}}$. Per esempio, $f(x) = x^2$ non è biiettiva nel suo dominio $D = \mathbb{R}$, ma lo diventa restringendola ad un nuovo dominio $\bar{D} = [0; +\infty)$.

Definizione 6.7 *Data una funzione iniettiva $y = f(x)$, esiste* una ed una sola *applicazione da $f(D)$ in D, detta* funzione inversa *ed indicata con f^{-1}, che ad ogni $y \in f(D)$ associa $x \in D : f(x) = y$. Tale definizione si può anche riformulare nel modo seguente (totalmente equivalente): data una funzione biiettiva $y = f(x)$, con $x \in D$ e $y \in C$, si definisce funzione inversa di f e la si indica con f^{-1} la funzione che associa ad ogni elemento $y \in C$* il solo *elemento $x \in D : f(x) = y$.*

Quindi, ad esempio, la funzione $y = x$ ammette inversa per ogni $x \in D = \mathbb{R}$ e la sua inversa $x = f^{-1}(y)$ è $x = y$; la funzione $y = \log x$, che ha per dominio $D = (0; +\infty)$, ammette inversa e si ha $x = f^{-1}(y) = \mathrm{e}^y$; la funzione $y = x^2$ ha per dominio $D = \mathbb{R}$ ma su questo intervallo non è invertibile in quanto ad ogni valore $y > 0$ corrispondono due controimmagini: la funzione inversa, pertanto, è $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ se $x \geq 0$, mentre è $x = f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ se $x \leq 0$; la funzione $y = \sin x$ ha per dominio $D = \mathbb{R}$ ed è invertibile purché si restringa il suo dominio ad un intervallo sul quale $\sin x$ è iniettiva, per esempio $\bar{D} = [-\pi/2; \pi/2]$: in questo caso la funzione inversa è $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$.

Definizione 6.8 *Funzione composta: date $f : D \to C$ e $g : C \to Z$, si definisce funzione composta $h : D \to Z$ la funzione $h(x) = g(f(x))$, indicata anche con $h = g \circ f$.*

In pratica, scelto un valore della variabile indipendente x, si calcola $f(x)$ e lo si dà come argomento in entrata a g ottenendo il valore finale $g(f(x))$ che, dipendendo da x, viene conglobato in un'unica espressione chiamata $h(x)$. Per esempio se $f = (\cdot)^2$ e $g = \sin(\cdot)$, allora $h = g \circ f = g(f(x)) = \sin(x^2)$; viceversa $h = f \circ g = f(g(x)) = (\sin x)^2$. Pertanto, la composizione di funzioni *non è commutativa*.

Esercizio 6.9 *Si dimostri che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x/2 - 1$ è biiettiva e si determini la funzione inversa.*

Risoluzione. Bisogna dimostrare che $f(x)$ è sia iniettiva che suriettiva.
Iniettiva: $f(x_1) \neq f(x_2) \Longrightarrow x_1/2 - 1 \neq x_2/2 - 1 \Longleftrightarrow x_1 \neq x_2$.
Suriettiva: $y = f(x)$ può assumere tutti i valori di $\mathbb{R}$ e si può sempre determinare il corrispondente $x \in \mathbb{R}$, ossia $\forall y \in C \;\; \exists x \in D : y = f(x)$.
Funzione inversa: $x = 2y + 2$. ■

Esercizio 6.10 *Si dimostri che $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(x) = x + 23$ è iniettiva ma non suriettiva, mentre $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è biiettiva.*

Risoluzione.
(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Iniettiva: $f(x_1) \neq f(x_2) \Longrightarrow x_1 + 23 \neq x_2 + 23 \Longleftrightarrow x_1 \neq x_2$.
Non suriettiva: da $f(x) = x + 23$, affinché possa esistere $x \in \mathbb{N} : f(x) = y$, ossia $x + 23 = y$ ammetta una soluzione $x \in \mathbb{N}$ per $y \in \mathbb{N}$ fissata, dovrebbe essere $y \geq 23$. Siccome non vale il $\forall y \in C$ della definizione, la funzione non è suriettiva.
(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
Iniettiva: come sopra.
Suriettiva: lo è perché $\forall y \in \mathbb{Z}\ \ \exists x \in \mathbb{Z} : y = f(x)$. ■

Esercizio 6.11 *Si dimostri che $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ ($\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) definita da*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \text{ è dispari} \\ x-1 & \text{se } x \text{ è pari} \end{cases}$$

è biiettiva e si determini la funzione inversa.

Risoluzione. Bisogna dimostrare che $f(x)$ è sia iniettiva che suriettiva.
Iniettiva. Bisogna suddividere in 3 casi: x_1 e x_2 entrambi pari, entrambi dispari e uno pari e uno dispari. Supponiamo x_1 e x_2 pari, $x_1 \neq x_2$. Allora si ha $f(x_1) = x_1 - 1$ e $f(x_2) = x_2 - 1$, pertanto $f(x_1) \neq f(x_2)$. Se x_1 e x_2 sono dispari, e $x_1 \neq x_2$, si ha $f(x_1) = x_1+1$ e $f(x_2) = x_2+1$, pertanto $f(x_1) \neq f(x_2)$. Infine, considerando x_1 pari e x_2 dispari si ha che $f(x_1)$ è dispari e $f(x_2)$ pari, per cui è ancora $f(x_1) \neq f(x_2)$. La funzione è quindi iniettiva.
Suriettiva: si verifica che $y = f(x)$ può assumere tutti i valori di $\mathbb{N}^+$, ossia si può sempre determinare il corrispondente $x \in \mathbb{N}^+$ tale che $y = f(x)$.
Funzione inversa:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y+1 & \text{se } y \text{ è dispari} \\ y-1 & \text{se } y \text{ è pari} \end{cases}$$

Si noti che f^{-1} coincide con f. ■

Esercizio 6.12 *Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + x + 1$, si determini la l'immagine di $\mathbb{R}$ tramite f e si verifichi se f è invertibile oppure no. Nel caso non lo sia, esiste un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ tale che $f_{|D}$ sia invertibile?*

Risoluzione.
Immagine: l'immagine di f non è nient'altro che $C = f(\mathbb{R})$, ovvero l'insieme delle $y \in \mathbb{R}$ tali per cui l'equazione $x^2 + x + 1 = y$ abbia almeno una soluzione reale ($x \in \mathbb{R}$). A tal fine, si può osservare che la parabola $y = x^2 + x + 1$ ha concavità verso l'alto e il vertice di coordinate $V(-1/2; 3/4)$; quindi si avranno soluzioni reali solo per $y \geq 3/4$ e pertanto $C = f(D) = [3/4; +\infty[$. Alternativamente si può calcolare il discriminante Δ dell'equazione $x^2 + x + 1 - y = 0$ e imporre che sia $\Delta \geq 0$. Così facendo si ottiene $1 - 4(1 - y) \geq 0$, che porta ancora a $y \geq 3/4$, ovvero $C = f(D) = [3/4; +\infty[$.
Iniettiva: $x_1 \neq x_2$ non implica necessariamente $f(x_1) \neq f(x_2)$ in quanto, fissata $y \in C \wedge y \neq 3/4$, i valori di x tali che $y = f(x)$ sono due. Infatti, $f(x_1) \neq f(x_2) \Longrightarrow x_1^2 + x_1 + 1 \neq x_2^2 + x_2 + 1 \Longleftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) \neq 0 \Longrightarrow (x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq -x_2 - 1)$. In altre parole, $x_1 \neq x_2 \not\Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e pertanto f non è iniettiva. Tuttavia, restringendo il dominio di f a $D =]-\infty; -1/2]$ o a $D = [-1/2; +\infty[$ $f_{|D}$ è iniettiva (si noti che $x = -1/2$ è l'asse di simmetria della parabola). ■

Esercizio 6.13 *Data la funzione* $f : [-1;0[\to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = 1/x^2$*, si determini l'immagine* $C = f([-1;0[)$ *e, nel caso la funzione* $f : [-1;0[\to C$ *sia biiettiva, si determini la funzione inversa.*

Risoluzione.
Immagine: si noti che, $\forall\epsilon > 0$ si ha $1/x^2 < 1/(x+\epsilon)^2$ se e solo se $x < -\epsilon/2$, ovvero solo per valori negativi della x. In altre parole, $1/x^2$ è una funzione crescente per $x < 0$ e quindi $f([-1;0[) = [1;+\infty[$.
Iniettiva: $f(x_1) \neq f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in [-1;0[$ equivale a $1/x_1^2 \neq 1/x_2^2 \iff x_1^2 \neq x_2^2 \implies x_1 \neq \pm x_2$. Essendo $x_1, x_2 \in [-1;0[$, ossia entrambe negative, l'unica soluzione accettabile è $x_1 \neq x_2$ e pertanto $f : [-1;0[\to C$ è iniettiva.
Suriettiva: la funzione $f : [-1;0[\to C$ è certamente suriettiva in quanto C è l'immagine di $[-1;0[$ tramite f, ossia $\forall y \in C \ \exists x \in [-1;0[: y = f(x)$.
Funzione inversa: $f^{-1} : [1;+\infty[\to [-1;0[$ definita da $x = -1/\sqrt{y}$. ■

Esercizio 6.14 *Siano* $f(x) = 1/(1+x^4)$ *e* $g(x) = x^2$*. Determinare* $f \circ g$ *e* $g \circ f$*.*

Risoluzione.

$$f \circ g = f(g(x)) = \frac{1}{1+(x^2)^4} = \frac{1}{1+x^8}$$

$$g \circ f = g(f(x)) = \left(\frac{1}{1+x^4}\right)^2 = \frac{1}{(1+x^4)^2} \quad ■$$

Esercizio 6.15 *Siano* f, g *le funzioni radice cubica e la funzione che aggiunge 1, ovvero* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *e* $g(x) = x+1$*. Determinare* $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *verificando se la composizione è possibile (ovvero se i domini non sono incompatibili).*

Risoluzione. $f \circ g = f(g(x)) = \sqrt[3]{x+1}$ e $g \circ f = g(f(x)) = \sqrt[3]{x} + 1$. I domini non hanno problemi di compatibilità. ■

TODO

6.2 Grafico di una funzione e sue caratteristiche

Definizione 6.16 *Sia* $f : D \to C$ *una funzione reale di variabile reale con* $D \subseteq \mathbb{R}$ *e* $C \subseteq \mathbb{R}$*. Chiamiamo* grafico *di* f *l'insieme delle coppie ordinate* $(x, f(x)) \in D \times C$*.*

Pertanto, un sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è il grafico di una funzione se ogni retta verticale lo interseca al massimo in un punto (si veda la definizione di funzione 6.1).

Al fine di tracciare il grafico qualitativo di una funzione, spesso risulta utile sapere se essa è simmetrica (rispetto all'asse y o all'origine) e se è periodica in modo da studiarla su un intervallo più piccolo rispetto al dominio.

Definizione 6.17 *Una funzione si dice* pari *se* $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D$*.*

Pertanto, il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle y. Esempi di funzioni pari sono $y = x^n, n \in \mathbb{N}, n$ pari; $y = \cos x$; $y = |x|$.

Definizione 6.18 *Una funzione si dice* dispari *se* $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D$*.*

Pertanto, il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine degli assi. Esempi di funzioni dispari sono $y = x^n, n \in \mathbb{N}, n$ dipari; $y = \sin x$; $y = |x|/x$.

Evidentemente, esistono funzioni che non sono né pari né dispari come ad esempio $f(x) = x^3 - 1$.

Definizione 6.19 *Una funzione si dice* periodica *di periodo $T \in \mathbb{R}$ se $\forall x, (x+T) \in D$ si ha $f(x+T) = f(x)$.*

Pertanto, il grafico di una funzione periodica si ripete uguale dopo un intervallo delle x pari a T. Esempi di funzioni periodiche di periodo $T = 2\pi$ sono $y = \sin x$ e $\cos x$, mentre $y = \tan x$ e $y = \cot x$ hanno periodo $T = \pi$.

Definizione 6.20 *Un funzione di dice* crescente *su un intervallo $[a, b] \in D$ se $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Definizione 6.21 *Un funzione di dice* decrescente *su un intervallo $[a, b] \in D$ se $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Definizione 6.22 *Un funzione di dice* monotona *(crescente o decrescente) su un intervallo $[a, b] \in D$ se, in tale intervallo, è sempre crescente o sempre descrescente.*

Si osservi che *strettamente* crescente o decrescente, i.e. strettamente monotona, indica la disuguaglianza stretta, ovvero che la funzione non può avere tratti costanti. Le funzioni $y = a^x$ e $y = \log_a x$ con $a > 1$ sono monotone strettamente crescenti nel loro dominio, mentre le funzioni $y = a^x$ e $y = \log_a x$ con $0 < a < 1$ sono monotone strettamente decrescenti nel loro dominio.

Definizione 6.23 *Data una funzione $y = f(x)$, di dice che $c \in D$ è uno* zero *di f se $f(c) = 0$.*

Gli zeri della funzione $f(x) = x^2 - 4$ sono $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$; gli zeri della funzione $f(x) = \sin(4x)$ sono le soluzione dell'equazione $4x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $x = k\pi/4$.

Definizione 6.24 *Una funzione f si dice* convessa *(ovvero che volge la* concavità verso l'alto*) su un intervallo $[a, b] \in D$ se il segmento congiungente il grafico di due punti qualsiasi $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$, con $x_1, x_2 \in [a, b]$, sta tutto al di sopra del corrispondente arco di grafico.*

Definizione 6.25 *Una funzione f si dice* concava *(ovvero che volge la* concavità verso il basso*) su un intervallo $[a, b] \in D$ se il segmento congiungente il grafico di due punti qualsiasi $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$, con $x_1, x_2 \in [a, b]$, sta tutto al di sotto del corrispondente arco di grafico.*

In base alle definizioni precedenti, le funzioni $y = \mathrm{e}^x$ e $y = x^2 - 1$ sono convesse nel loro dominio, mentre le funzioni $y = \log x$ e $y = -x^2 - 1$ sono concave nel loro dominio.

Definizione 6.26 *Si dice* massimo *della funzione f il numero M tale che $M = f(x_M) \geq f(x); \forall x \in D$. Il punto $x = x_M$ si dice* punto di massimo. *Se la condizione $M = f(x_M) \geq f(x)$ è verificata solo localmente, ossia per $x \in [x_M - \delta, x_M + \delta]$ (essendo $\delta > 0$) allora $x = x_M$ è un punto di* massimo locale o relativo.

Definizione 6.27 *Si dice* minimo *della funzione f il numero m tale che $m = f(x_m) \leq f(x); \forall x \in D$. Il punto $x = x_m$ si dice* punto di minimo. *Se la condizione $m = f(x_m) \leq f(x)$ è verificata solo localmente, ossia per $x \in [x_m - \delta, x_m + \delta]$ (essendo $\delta > 0$) allora $x = x_m$ è un punto di* minimo locale relativo.

Osservazione 6.28 *Si faccia molta attenzione al fatto che il punto di massimo e di minimo di una funzione su un intervallo $[a; b] \in D$ possono trovarsi agli estremi dell'intervallo stesso. Per esempio i punti di massimo e di minimo della funzione $y = x^2 + 1$ sull'intervallo $[-1; 3]$ sono $x_M = 3$ e $x_m = 0$, mentre i rispettivi massimo e minimo sono $M = 10$ e $m = 1$.*

Definizione 6.29 *Si dice che una funzione f è* definita a tratti *se il suo dominio è suddiviso nell'unione di sottoinsiemi in ciascuno dei quali il valore di $f(x)$ è assegnato mediante una diversa espressione analitica.*

Per esempio, sono funzioni definite a tratti le seguenti:

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = [x] \quad \text{(funzione parte intera di } x)$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x+1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Osservazione 6.30 *Tra funzioni è possibile eseguire le comuni operazioni algebriche di somma, differenza, prodotto e rapporto, ma si deve prestare attenzione al dominio della funzione risultante. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni definite rispettivamente su D_f e D_g, allora la loro somma $f(x)+g(x)$, differenza $f(x)-g(x)$ e prodotto $f(x)g(x)$ sono definite su $D = D_f \cap D_g$; il loro rapporto $f(x)/g(x)$, invece, è definito su $D \setminus A$ dove $D = D_f \cap D_g$ e $A = \{x \in D : g(x) = 0\}$.*

Esercizio 6.31 *Determinare eventuali simmetrie (funzione pari o dispari) e/o periodicità delle seguenti funzioni:*

1. $f(x) = x^3$	*2.* $f(x) = x^2 - 1$	*3.* $f(x) = \lvert x\rvert^5 - x^2 + 1$	*4.* $f(x) = x^3 - 1$
5. $f(x) = \sin x$	*6.* $f(x) = \cos x$	*7.* $f(x) = \tan x$	*8.* $f(x) = \lvert 7e^{ix}\rvert$

Risoluzione.

1. $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \Longrightarrow f(x) = x^3$ è dispari.

2. $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x) \Longrightarrow f(x) = x^2 - 1$ è pari.

3. $f(-x) = |-x|^5 - (-x)^2 + 1 = |x|^5 - x^2 + 1 \Longrightarrow f(x) = |x|^5 - x^2 + 1$ è pari.

4. $f(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 1$ non è né pari né dispari.

5. $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x) \Longrightarrow f(x) = \sin x$ è dispari; siccome $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, allora $T = 2\pi$.

6. $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x) \Longrightarrow f(x) = \cos x$ è pari; siccome $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, allora $T = 2\pi$.

7. $f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x) \Longrightarrow f(x) = \tan x$ è dispari; siccome $\tan(x + \pi) = \tan(x)$, allora $T = \pi$.

8. $f(-x) = |7\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}| = |7\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}| = |7\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| = f(x) \Longrightarrow f(x) = |7\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|$ è pari; siccome $f(x + 2\pi) = f(x)$, allora $T = 2\pi$ (si pensi ad un numero complesso in forma esponenziale).

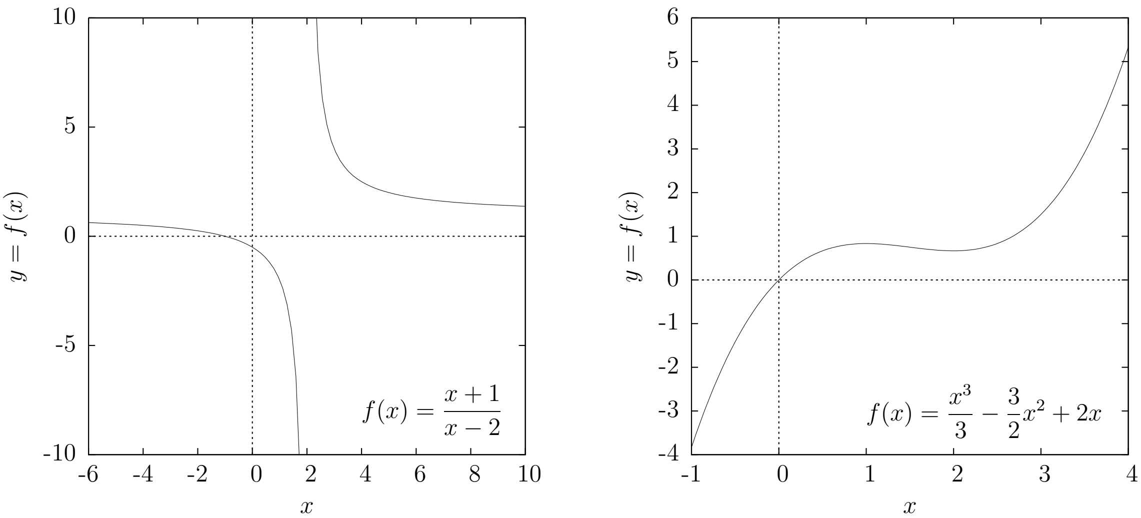

Figura 6.1: Grafico di $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (sinistra) e di $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ (destra).

■

Esercizio 6.32 *Per le funzioni $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (funzione omografica) e $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ determinare, dall'analisi del loro grafico riportato in figura 6.1 (rispettivamente a sinistra e a destra), gli intervalli di crescenza/decrescenza, massimi/minimi e gli intervalli su i quali esse risultano concave o convesse.*

Risoluzione.
Il dominio di $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ è $D = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; si noti che la funzione omografica è un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti con centro in $O'(2,1)$ e asintoti $x = 2$ e $y = 1$. Pertanto, il grafico è quello riportato in figura 6.1 di sinistra dal quale si osserva che $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ è decrescente per $x \in D$, ovvero sui due intervalli $x < 2$ e $x > 2$, è priva di massimi o minimi, è concava (concavità rivolta verso il basso) per $x < 2$ ed è convessa (concavità verso l'alto) per $x > 2$. La funzione è illimitata sia inferiormente che superiormente.
Il dominio di $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$, che è un polinomio di terzo grado, è $D = \mathbb{R}$; dalla figura 6.1 di destra si ha che $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ è crescente per $x < 1$ e per $x > 2$, mentre è decrescente per $1 < x < 2$. Pertanto, la funzione ha un punto di massimo relativo in $x = 1$ e un punto di minimo relativo in $x = 2$, ma è illimitata sia inferiormente che superiormente, ovvero non ammette né estremo inferiore né estremo superiore. La concavità è verso il basso (funzione concava) per $x < 3/2$, verso l'alto (funzione convessa) per $x > 3/2$. ■

TODO

6.3 Funzioni elementari: caratteristiche e grafico

Per ciascuna delle funzioni di base sono riportati il grafico e le caratteristiche principali.

La funzione "gradino di Heaviside". La funzione definita a tratti

$$f(x) = H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

prende il nome di gradino di Heaviside e viene spesso usata in elettronica o in teoria dei segnali perché corrisponde a "spento" prima dello zero e "acceso" a zero o dopo lo zero. Il suo dominio

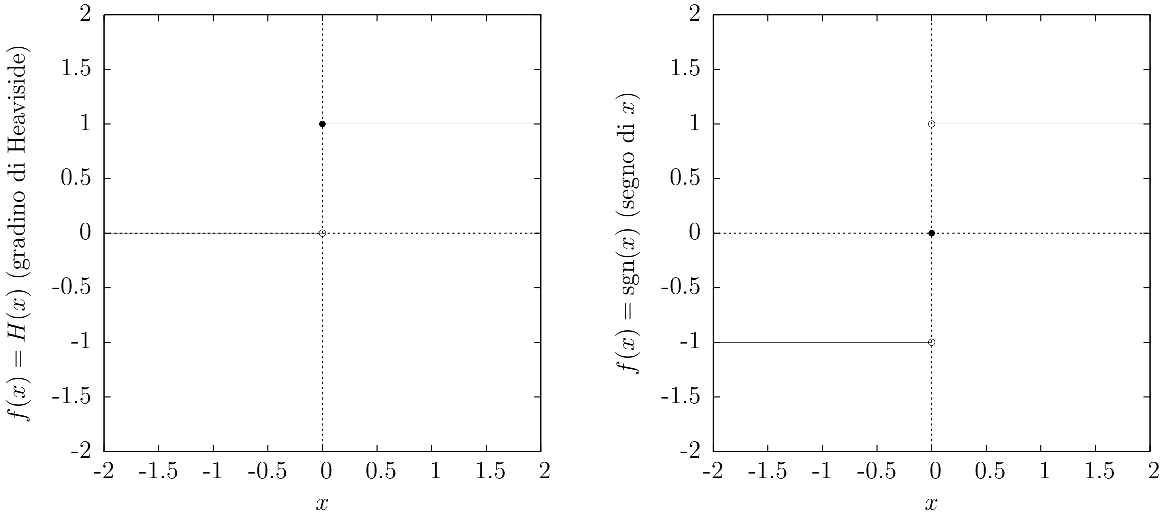

Figura 6.2: La funzione "gradino di Heaviside" $f(x) = H(x)$ (sinistra) e la funzione "segno di x" $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ (destra).

è $D = \mathbb{R}$ e la sua inversa non esiste. Il grafico è riportato in figura 6.2 (sinistra). Come si può notare la funzione non è né pari, né dispari, né periodica.

La funzione "segno di x". La funzione definita a tratti

$$f(x) = \mathrm{sgn}\,(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

prende il nome di segno di x perché restituisce il segno della variabile indipendente. Il suo dominio è $D = \mathbb{R}$ e la sua inversa non esiste. Il grafico è riportato in figura 6.2 (destra). Come si può notare, la funzione è dispari e quindi simmetrica rispetto all'origine, ma non è periodica.

La funzione "valore assoluto (o modulo) di x". La funzione definita a tratti

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

prende il nome di valore assoluto (o modulo) di x perché restituisce la variabile indipendente quando essa positiva o nulla e la variabile cambiata di segno quando essa è negativa. In altre parole, il valore assoluto rende un'espressione *sempre non negativa* (quindi positiva o nulla). Il suo dominio è $D = \mathbb{R}$ e la sua inversa, essendo la funzione non iniettiva, non esiste; tuttavia se si restringe il dominio a $x \geq 0$ oppure a $x \leq 0$ l'inversa esiste. Il grafico è riportato in figura 6.3 (sinistra). La funzione è pari e, quindi, simmetrica rispetto all'asse y, ma non periodica.

La funzione "rampa". La funzione definita a tratti

$$f(x) = \mathrm{ramp}(x) = \max(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

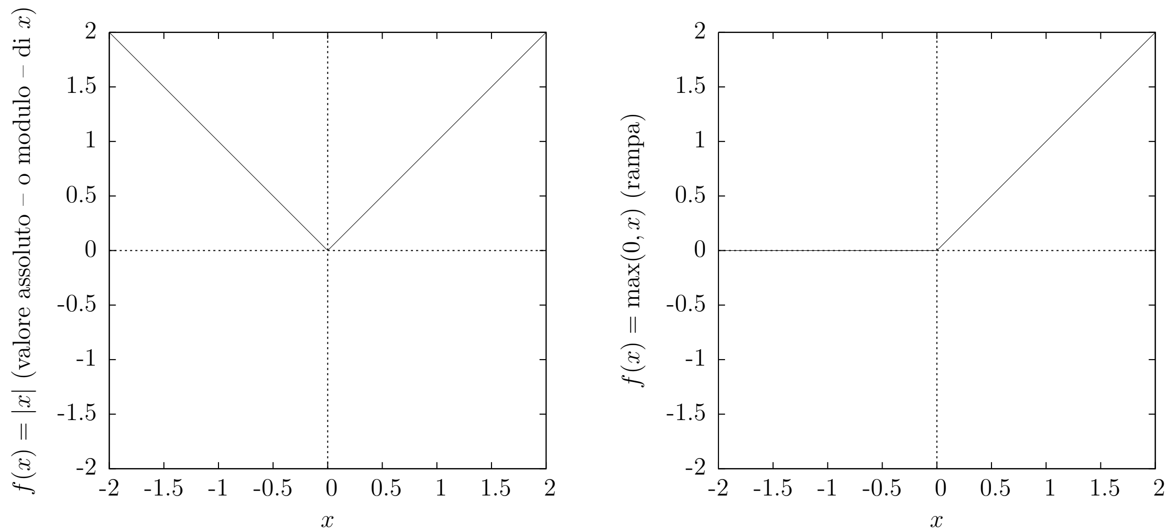

Figura 6.3: La funzione "valore assoluto" $f(x) = |x|$ (sinistra) e la funzione "rampa" $f(x) = \max(0, x)$ (destra).

prende il nome di rampa perché, come evidente dalla figura 6.3 (destra), il suo grafico è una rampa e viene spesso usata in elettronica o in teoria dei segnali perché corrisponde a "spento" prima di zero e ad una crescita lineare altrove. Il suo dominio è $D = \mathbb{R}$ e la sua inversa, essendo la funzione non iniettiva, non esiste; tuttavia se si restringe il dominio a $x \geq 0$ l'inversa esiste. Il grafico è riportato in figura 6.3 (destra). La funzione non è né pari, né dispari, né periodica.

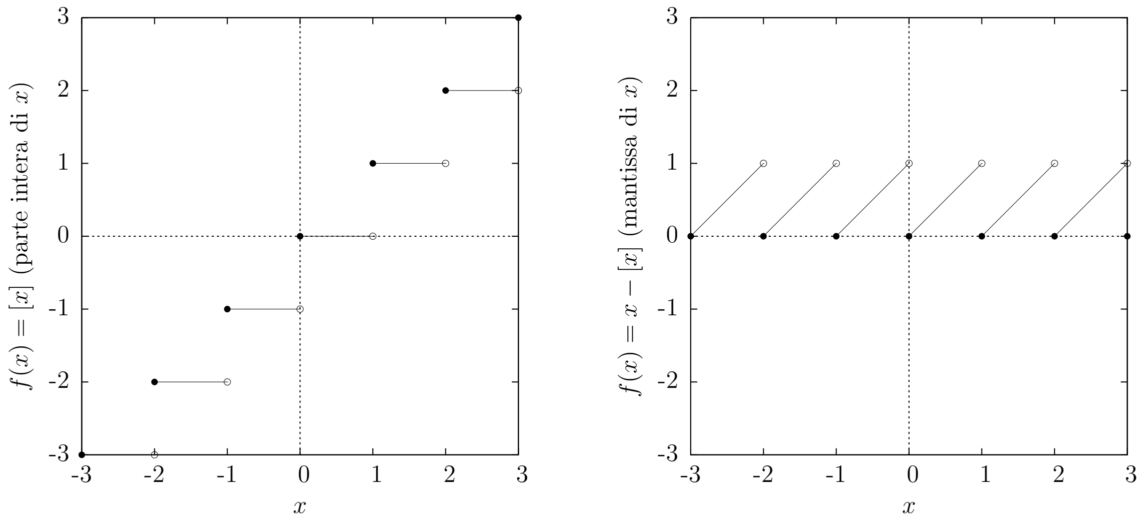

Figura 6.4: La funzione "parte intera di x" $f(x) = [x]$ (sinistra) e la funzione "mantissa di x" $f(x) = x - [x]$ (destra).

La funzione "parte intera di x". La funzione parte intera di x corrisponde all'arrotondamento per difetto al numero intero relativo più basso (quindi a sinistra) e si indica con $f(x) = [x]$. Pertanto, $[1/2] = 0$, $[\pi] = 3$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[1.99999] = 1$, $[-\pi] = -4, [-e] = -3$. Il suo dominio è $D = \mathbb{R}$ e la sua inversa, essendo la funzione costante a tratti, non esiste. Il grafico è riportato in figura 6.4 (sinistra). La funzione non è né pari, né dispari, né periodica.

La funzione "mantissa di x". La funzione mantissa di x corrisponde alla parte decimale del valore di x, ovvero a x diminuita della sua parte intera, i.e. $f(x) = x - [x]$. Pertanto, $f(1/2) = 0.5$, $f(\pi) = 0.14159265358979\ldots$, $f(\sqrt{2}) = 0.4142135623731\ldots$, $f(1.99999) = 0.99999$, $f(-\pi) = 0.858407346410207\ldots$, $f(-e) = 0.281718171540955\ldots$. Il suo dominio è $D = \mathbb{R}$ e la sua inversa, essendo la funzione non iniettiva, non esiste. Restringendo la funzione a $[0;1)$, però, essa diventa invertibile e l'inversa coincide con la funzione stessa. Il grafico è riportato in figura 6.4 (destra). La funzione è sempre positiva e non è né pari, né dispari, però è periodica di periodo 1 (come ovvio dalla definizione di mantissa).

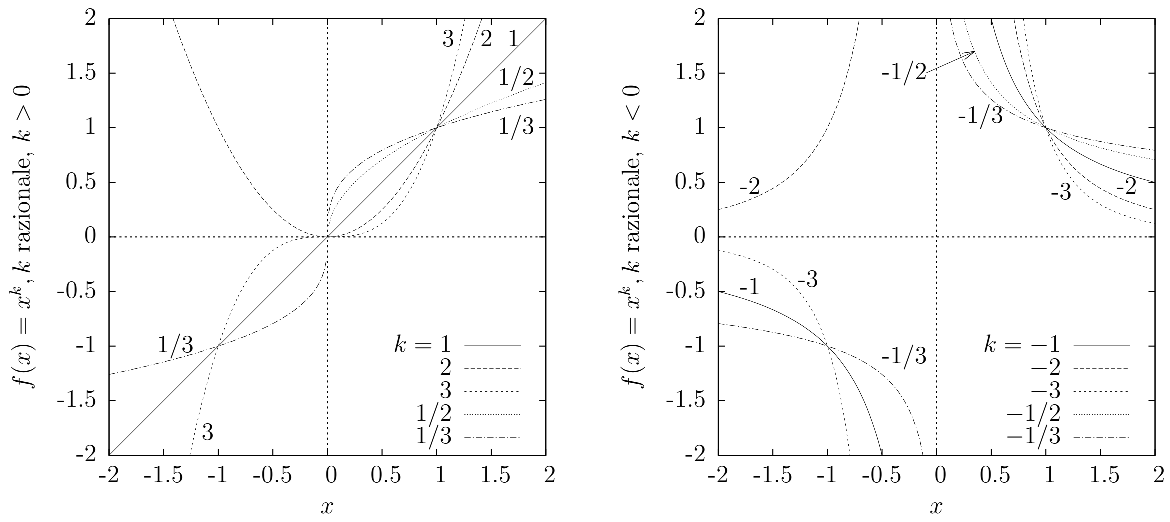

Figura 6.5: La funzione potenza $f(x) = x^k, k \in \mathbb{Q}$. Si osservi come variano le curve al variare sia del segno di k ($k > 0$ a sinistra e $k < 0$ a destra), e al variare del $|k|$.

La funzione "potenza di x". La funzione potenza si presenta nella forma $f(x) = x^\alpha$, tuttavia le sue caratteristiche variano sensibilmente a seconda della natura dell'esponente α.

(a) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

Funzioni di questo tipo sono $y = x, y = x^2, y = x^3$ etc. e, indipendentemente da n, il loro dominio è $D = \mathbb{R}$. Se n è dispari la funzione $f(x) = x^n$ è dispari, e quindi simmetrica rispetto all'origine, e invertibile. Se invece n è pari, la funzione è pari, simmetrica rispetto all'asse delle y, e per questo non invertibile. Tuttavia, restringendo la funzione a $x \geq 0$ o a $x \leq 0$, essa può essere invertita. Il grafico di $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ è riportato in figura 6.5 (sinistra) per $n = k = 1, 2, 3$ (si osservi che le altre curve non corrispondono a $n \in \mathbb{N}$). Si noti che, nonostante tutti i grafici passino per i punti $(1,1)$ e $(-1,1)$ quando n è pari oppure per i punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$ se n è dispari, al crescere di n i grafici di $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ risultano sempre più "schiacciati" vicino all'origine e sempre più "esplosivi" per $x > 1$.

(b) $f(x) = x^k, k \in \mathbb{Z}, k < 0$.

Funzioni di questo tipo sono $y = 1/x, y = 1/x^2, y = 1/x^3$ etc.; il loro dominio è $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Se k è dispari la funzione $f(x) = x^k = 1/x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) è dispari, e quindi simmetrica rispetto all'origine, e invertibile. Se invece k è pari, la funzione è pari, simmetrica rispetto all'asse delle y, e per questo non invertibile. Tuttavia, restringendo la funzione a $x > 0$ o a $x < 0$, essa può essere invertita. Il grafico di $f(x) = x^k, k \in \mathbb{Z}, k < 0$ è riportato in figura 6.5

(destra) per $k = -1, -2, -3$ (si osservi che le altre curve non corrispondono a $k \in \mathbb{Z}$).
(c) $f(x) = x^k, k \in \mathbb{Q}, k > 0$.
Siccome l'esponente è razionale positivo, la funzione può essere riscritta come $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ con $\frac{m}{n} > 0$. Siccome le radici con indice negativo o nullo non esistono, necessariamente deve essere $n > 0$, da cui $m > 0$ ($m/n > 0$). In conclusione, sia m che n sono naturali positivi. Pertanto, se n è dispari il dominio è $D = \mathbb{R}$. Inoltre, se anche m è dispari allora la funzione è dispari, simmetrica rispetto all'origine e invertibile. Per il grafico si veda, ad esempio, il caso $y = x^{1/3}$ in figura 6.5 (sinistra). Nel caso n dispari ed m pari la fuzione è pari e quindi simmetrica rispetto all'asse y e non invertibile. Tuttavia sono invertibili le sue restrizioni a $x \geq 0$ oppure $x \leq 0$. Se, invece, n è pari allora si tratta di una radice con indice pari. Pertanto, se m è pari il dominio è $D = \mathbb{R}$, la funzione è pari, simmetrica rispetto all'asse y e non inveribile a meno di non considerare una sua restrizione a $x \geq 0$ oppure a $x \leq 0$. Se n è pari e m è dispari, il dominio è $D = [0, +\infty)$, la funzione è invertibile ma non è simmetrica. Per il grafico si veda, ad esempio, il caso $y = x^{1/2}$ in figura 6.5 (sinistra).
(d) $f(x) = x^k, k \in \mathbb{Q}, k < 0$.
Siccome l'esponente è razionale negativo, la funzione può essere riscritta come $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ con $\frac{m}{n} < 0$, ma siccome le radici devono avere indice positivo, certamente si ha $n > 0$ e $m < 0$. In conclusione, se $m = h$ con $h \in \mathbb{N}$ e $h > 0$, si ottiene $\frac{m}{n} = -\frac{h}{n}$ da cui $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = x^{-\frac{h}{n}} = 1/\sqrt[n]{x^h}$, con sia n che h numeri naturali. Pertanto, se n è dispari il dominio è $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Inoltre, se anche m (e quindi h) è dispari allora la funzione è dispari, simmetrica rispetto all'origine e invertibile. Per il grafico si veda, ad esempio, il caso $y = x^{-1/3}$ in figura 6.5 (destra). Nel caso n dispari ed m (i.e. h) pari la fuzione è pari e quindi simmetrica rispetto all'asse y e non invertibile. Tuttavia sono invertibili le sue restrizioni a $x \geq 0$ oppure $x \leq 0$. Se, invece, n è pari allora si tratta di una radice con indice pari. Pertanto, se m (e quindi h) è pari il dominio è $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, la funzione è pari, simmetrica rispetto all'asse y e non inveribile a meno di non considerare una sua restrizione a $x \geq 0$ oppure a $x \leq 0$. Se n è pari e m (e quindi h) è dispari, il dominio è $D = (0, +\infty)$, la funzione è invertibile ma non è simmetrica. Per il grafico si veda, ad esempio, il caso $y = x^{-1/2}$ in figura 6.5 (destra).
(e) $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \alpha > 0$.
Si osservi che l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è quello dei numeri irrazionali (ovvero quelli reali non razionali). Siccome le potenze con esponente non razionale sono definite solo per basi positive, il dominio è $D = [0, +\infty)$, la funzione è strettamente crescente, sempre positiva e invertibile.
(f) $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \alpha < 0$.
Come per il caso (e) queste funzioni sono definite solo per basi positive, però siccome la variabile x è al denominatore (a causa dell'esponente negativo), dal dominio si deve escludere $x = 0$, quindi $D = (0, +\infty)$. La funzione è strettamente decrescente, sempre positiva e invertibile.

La funzione "esponenziale". La funzione esponenziale, da non confondere con la funzione potenza, è del tipo $f(x) = a^x$ con $a > 0$. Il dominio è $D = \mathbb{R}$, la funzione è sempre positiva e invertibile (se $a = 1$ la funzione è $y = 1$ e non è invertibile). Se $0 < a < 1$ allora $f(x)$ è strettamente decrescente mentre se $a > 1$ allora $f(x)$ è strettamente crescente. Il grafico, per vari valori di a, è riportato in figura 6.6 (sinistra).

La funzione "logaritmo". La funzione logaritmo, $f(x) = \log_a x$ con $a > 0, a \neq 1$, è definita solo per x positive, quindi $D = (0; +\infty)$. Essa è sempre invertibile, inoltre se $0 < a < 1$ è strettamente decrescente mentre se $a > 1$ è strettamente crescente. Il grafico, per vari valori di a, è riportato in figura 6.6 (destra).

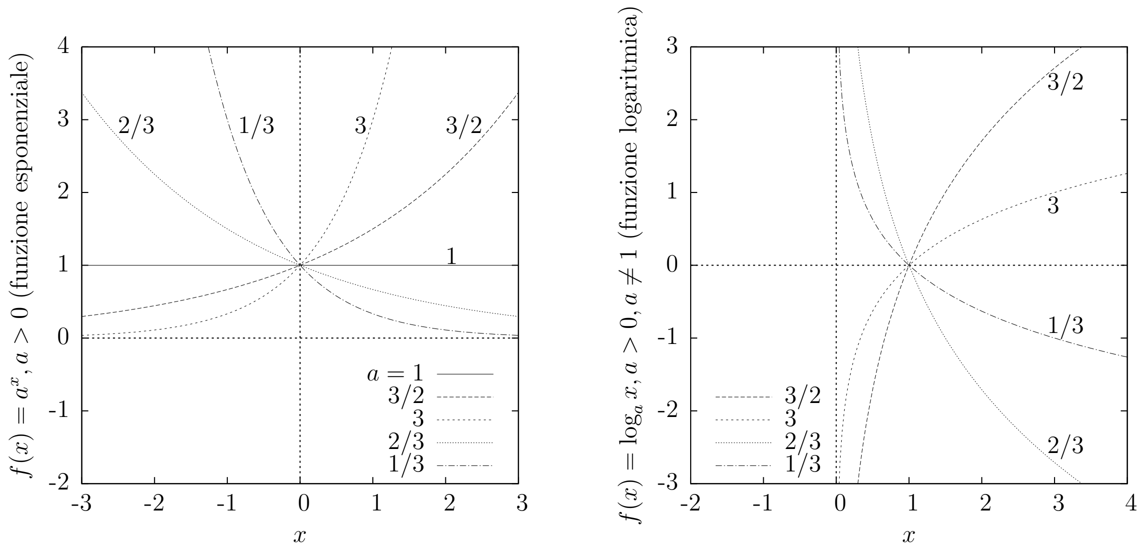

Figura 6.6: La funzione esponenziale $f(x) = a^x, a > 0$ (sinistra) e la funzione logaritmica $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ (destra).

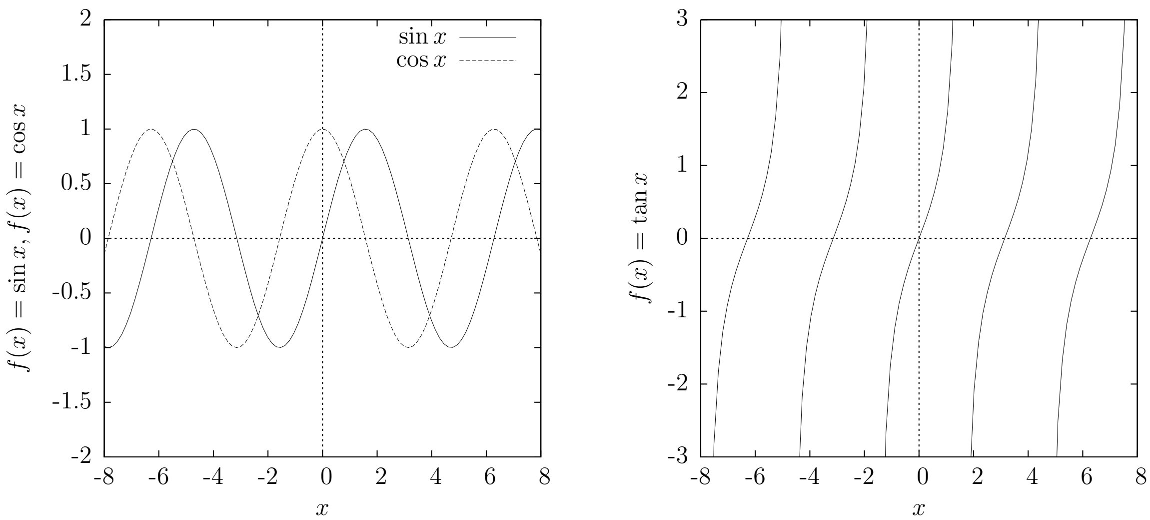

Figura 6.7: Le funzioni seno e coseno $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \cos x$ (sinistra) e la funzione tangente $f(x) = \tan x$ (destra).

La funzione "seno di x". La funzione seno ha come dominio tutto l'asse reale, $D = \mathbb{R}$, è dispari, simmetrica rispetto all'origine, periodica di periodo 2π e invertibile solo se ristretta ad un intervallo del tipo $[-\pi/2 + 2k\pi; \pi/2 + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$. Il grafico è riportato in figura 6.7 (sinistra, linea continua). Si noti che il seno assume tutti i valori compresi tra -1 e 1, estremi inclusi.

La funzione "coseno di x". La funzione coseno ha come dominio tutto l'asse reale, $D = \mathbb{R}$, è pari, simmetrica rispetto all'asse y, periodica di periodo 2π e invertibile solo se ristretta ad un intervallo del tipo $[2k\pi; \pi + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$. Il grafico è riportato in figura 6.7 (sinistra, linea tratteggiata). Si noti che il coseno assume tutti i valori compresi tra -1 e 1, estremi inclusi.

La funzione "tangente di x". La funzione tangente ha come dominio $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, è dispari, simmetrica rispetto all'origine, periodica di periodo π e invertibile solo se ristretta ad un intervallo del tipo $(-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi), k \in \mathbb{Z}$. Il grafico è riportato in figura 6.7 (destra).

La funzione "cotangente di x". La funzione cotangente ha come dominio $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi\}$, è dispari, simmetrica rispetto all'origine, periodica di periodo π e invertibile solo se ristretta ad un intervallo del tipo $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

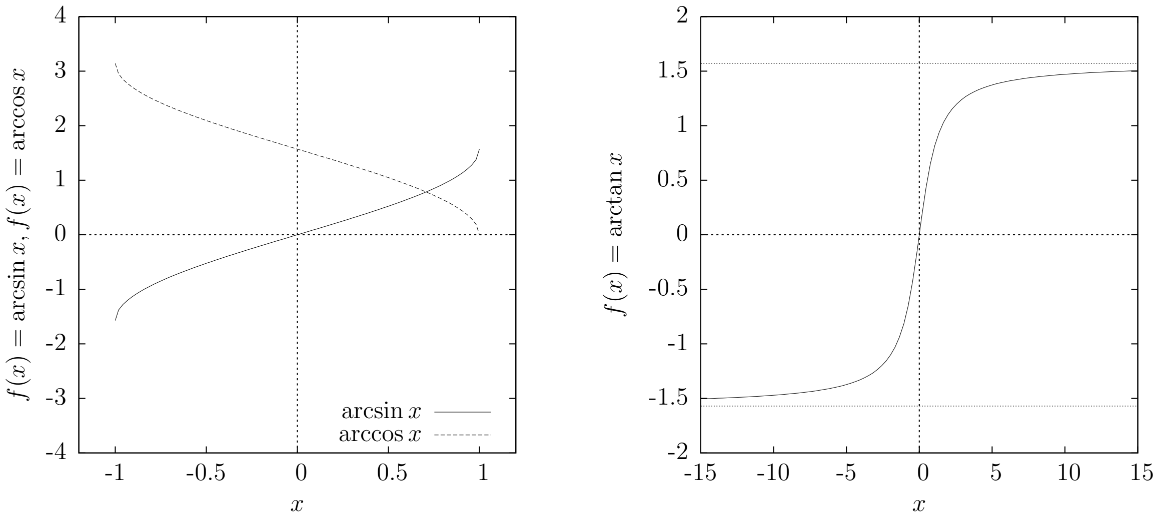

Figura 6.8: Le funzioni arcoseno e arco-coseno $f(x) = \arcsin x$ e $f(x) = \arccos x$ (sinistra) e la funzione arcotangente $f(x) = \arctan x$ (destra).

La funzione "arcoseno di x". La funzione arcoseno ha come dominio $D = [-1; 1]$, è dispari, simmetrica rispetto all'origine, non periodica e invertibile. Il grafico è riportato in figura 6.8 (sinistra, linea continua). Si noti che l'arcoseno è sempre crescente e assume tutti i valori compresi tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, estremi inclusi.

La funzione "arcocoseno di x". La funzione arcocoseno ha come dominio $D = [-1; 1]$, non è né pari né dispari, non è periodica ma è invertibile. Il grafico è riportato in figura 6.8 (sinistra, linea tratteggiata). Si noti che l'arcocoseno è sempre descrescente e assume tutti i valori compresi tra 0 e π, estremi inclusi.

La funzione "arcotangente di x". La funzione arcotangente ha come dominio $D = \mathbb{R}$, è dispari, simmetrica rispetto all'origine, non è periodica ma è invertibile. Il grafico è riportato in figura 6.8 (destra). Si noti che l'arcotangente è sempre descrescente e assume tutti i valori compresi tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, *estremi esclusi*: pertanto, essa ha due asintoti orizzontali, un estremo inferiore e un estremo superiore, ma non ha né massimo né minimi.

TODO

TODO

6.4 Dominio di funzioni

Determinare il *dominio* o *insieme di definizione* o *campo di esistenza* di una funzione significa trovare tutti i valori della variabile indipendente x per i quali l'espressione analitica di $f(x)$ ha significato. Questo equivale ad un sistema in cui sono riportate tutte le condizioni che devono verificarsi simultaneamente.
Le funzioni per le quali il dominio non è tutto $\mathbb{R}$ sono:

1. $\sqrt[2n]{\varphi(x)} \Longrightarrow \varphi(x) \geq 0$
2. $[\varphi(x)]^{\alpha}, \alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \varphi(x) \geq 0$
3. $\dfrac{1}{\varphi(x)} \Longrightarrow \varphi(x) \neq 0$
4. $\log_a \varphi(x), a > 0, a \neq 1 \Longrightarrow \varphi(x) > 0$
5. $\tan \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
6. $\cot \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
7. $\arcsin \varphi(x) \Longrightarrow -1 \leq \varphi(x) \leq 1$
8. $\arccos \varphi(x) \Longrightarrow -1 \leq \varphi(x) \leq 1$

Funzioni per le quali il dominio è tutto $\mathbb{R}$ sono i polinomi, le potenze con esponente naturale ($[\varphi(x)]^n, n \in \mathbb{N}$), le esponenziali ($a^{\varphi(x)}$), le radici con indice dispari ($\sqrt[2n+1]{\varphi(x)}$), seno e coseno ($\sin \varphi(x)$, $\cos \varphi(x)$) e arcotangente ($\arctan \varphi(x)$).

Esercizio 6.33 *Determinare il dominio di* $f(x) = \sqrt{x(1-x^2)}$.

Risoluzione. Deve essere $x(1-x^2) \geq 0 \Longrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [0, 1]$. ■

Esercizio 6.34 *Determinare il dominio di* $f(x) = \sqrt{\log x}$.

Risoluzione. Deve essere $\begin{cases} \log x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Longrightarrow x \in [1, +\infty[$. ■

Esercizio 6.35 *Determinare il dominio di* $f(x) = \log\left[(\log x - 1)^{\pi}\right]$.

Risoluzione. Deve essere $\begin{cases} \log x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Longrightarrow x \in]e, +\infty[$. ■

Esercizio 6.36 *Determinare il dominio di* $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log^2 x - 4}{\log x + 1}}$.

Risoluzione. Deve essere $\begin{cases} \dfrac{\log^2 x - 4}{\log x + 1} \geq 0 \\ \log x + 1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Longrightarrow x \in [\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}[\cup [e^2, +\infty[$. ■

Esercizio 6.37 *Determinare il dominio di* $f(x) = \arcsin[\log(x-1) - \log x]$.

Risoluzione. Deve essere $\begin{cases} -1 \leq \log(x-1) - \log x \leq 1 \\ x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Longrightarrow x \in [\frac{e}{e-1}, +\infty[.$ ■

Esercizio 6.38 *Determinare per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *la funzione* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+2k-3}$ *ha come dominio* $\mathbb{R}$.

Risoluzione. Deve essere $x^2+x+2k-3 \neq 0$, ovvero l'equazione di secondo grado non deve avere radici reali, i.e. $\Delta < 0 \Longrightarrow k > \dfrac{13}{8}$. ■

TODO

6.5 Grafico di una funzione dal grafico di un'altra

Supponiamo noti $a \in \mathbb{R}$ e il grafico della funzione $f(x)$, allora i seguenti grafici si ottengono piuttosto facilmente:

1. $y = -f(x)$. Basta "ribaltare" il grafico di f rispetto all'asse delle x.

2. $y = f(x) + a$. Basta traslare il grafico di f verso l'alto di $|a|$ se $a > 0$ o verso il basso di $|a|$ se $a < 0$.

3. $y = af(x)$. Basta "dilatare" verticalmente il grafico di f se $|a| > 1$ o "contrarlo" (sempre verticalmente) se $|a| < 1$. Durante tale operazione è necessario fare attenzione al segno di a: se $a > 0$ la funzione va solo "dilatata" o "contratta", altrimenti va cambiato anche il segno ("ribaltamento" rispetto all'asse x).

4. $y = f(-x)$. Basta "ribaltare" il grafico di f rispetto all'asse delle y.

5. $y = f(x + a)$. Basta traslare il grafico di f orizzontalmente di $|a|$ verso sinistra se $a > 0$, verso destra se $a < 0$.

6. $y = f(ax)$. Basta "contrarre" orizzontalmente il grafico di f se $|a| > 1$ o "dilatarlo" (sempre orizzontalmente) se $|a| < 1$. Durante tale operazione è necessario fare attenzione al segno di a: se $a > 0$ la funzione va solo "contratta" o "dilatata", altrimenti va anche "ribaltata" rispetto all'asse y.

7. $y = f^{-1}(x)$ (funzione inversa). Se $f(x)$ è biunivoca (iniettiva e suriettiva) basta tracciare il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta $y = x$ (bisettrice del primo e quarto quadrante). Se f non è biunivoca, bisogna restringere f ad un dominio sul quale sia biunivoca e poi procedere come sopra.

8. $y = |f(x)|$. Dalla definizione di valore assoluto segue che le parti positive del grafico di f rimangono tali mentre le parti negative vanno "ribaltate" rispetto all'asse x, ovvero rese positive.

9. $y = f(|x|)$. Questa funzione è evidentemente pari, per cui basta "ribaltare" rispetto all'asse y il grafico di f corrispondente a $x \geq 0$.

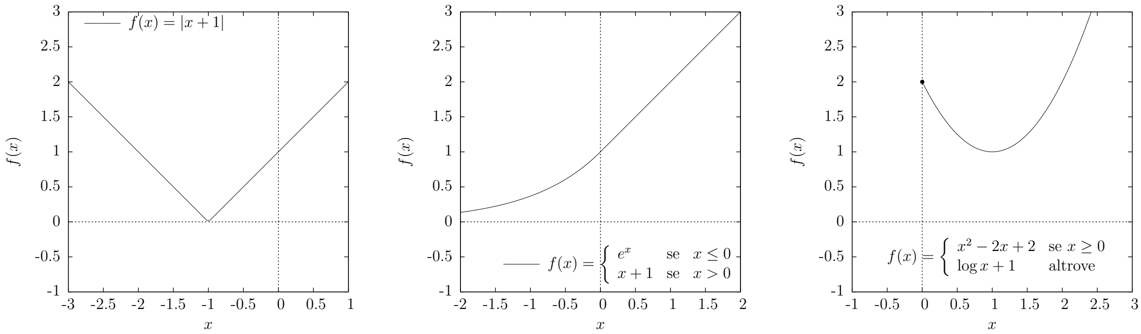

Figura 6.9: Grafico delle funzioni dell'esercizio 6.39.

Esercizio 6.39 *Dopo averne determinato il dominio, tracciare il grafico delle seguenti funzioni:*

1. $f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x+1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ \log x + 1 & \text{altrove} \end{cases}$

Risoluzione.
1. Si osservi che la funzione $f(x) = |x+1|$ è la funzione $y = |x|$ traslata a sinistra di 1. Il suo dominio è $D = \mathbb{R}$. Il grafico è riportato in figura 6.9 (sinistra).
2. La funzione è un esponenziale crescente per $x \leq 0$ e una retta per $x > 0$, quindi il dominio è $D = \mathbb{R}$. Il grafico è riportato in figura 6.9 (centro).
3. Si osservi che l'espressione per $x < 0$ ha come dominio $x > 0$ e, pertanto, l'unica espressione accettabile è quella per $x \geq 0$, che implica $D = [0; +\infty)$. Il grafico è riportato in figura 6.9 (destra).
■

Esercizio 6.40 *Dal grafico di* $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ *riportata in figura 6.1 (destra), dedurre il grafico di* $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(x) + 1$, $y = f(x-1)$, $y = 2f(x)$ *e* $y = f(2x)$.

Risoluzione. Con riferimento alla figura 6.10 di sinistra, $y = -f(x)$ si ottiene "ribaltando" $f(x)$ rispetto all'asse x; $y = f(-x)$ si ottiene "ribaltando" $f(x)$ rispetto all'asse y; $y = |f(x)|$ si ottiene "ribaltando" le parti negative di $f(x)$ rispetto all'asse x in modo da considerare $f(x)$ quando questa è positiva e $-f(x)$ altrove. Con riferimento alla figura 6.10 di destra, $y = f(x)+1$ si ottiene traslando $f(x)$ verso l'alto di 1; $y = f(x-1)$ si ottiene traslando $f(x)$ verso destra di 1; $y = 2f(x)$ si ottiene "dilatando" $f(x)$ in verticale, i.e. moltiplicando ogni suo valore per 2; $y = f(2x)$ si ottiene "contraendo" $f(x)$ in orizzontale, i.e. dimezzando la x a y fissata. ■

Esercizio 6.41 *Dal grafico della funzione* $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ *riportata in figura 6.1 (sinistra), dedurre il grafico di* $y = f(x-2)$, $y = f(|x|)$ *e* $y = |f(|x|)|$.

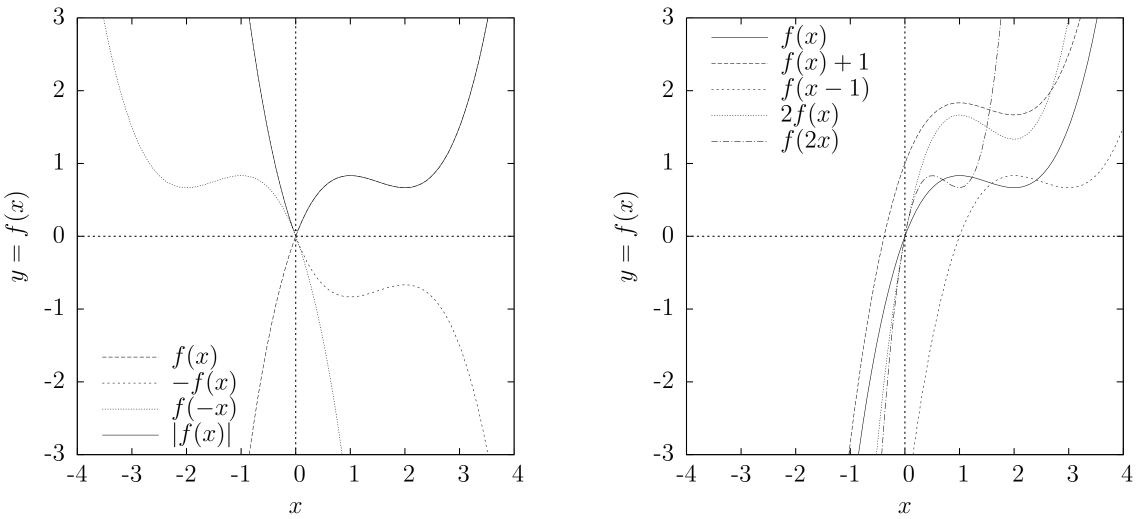

Figura 6.10: Grafici di $y = f(x)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = |f(x)|$ (sinistra) e $y = f(x)$, $y = f(x) + 1$, $y = f(x - 1)$, $y = 2f(x)$ e $y = f(2x)$ (destra) con $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$.

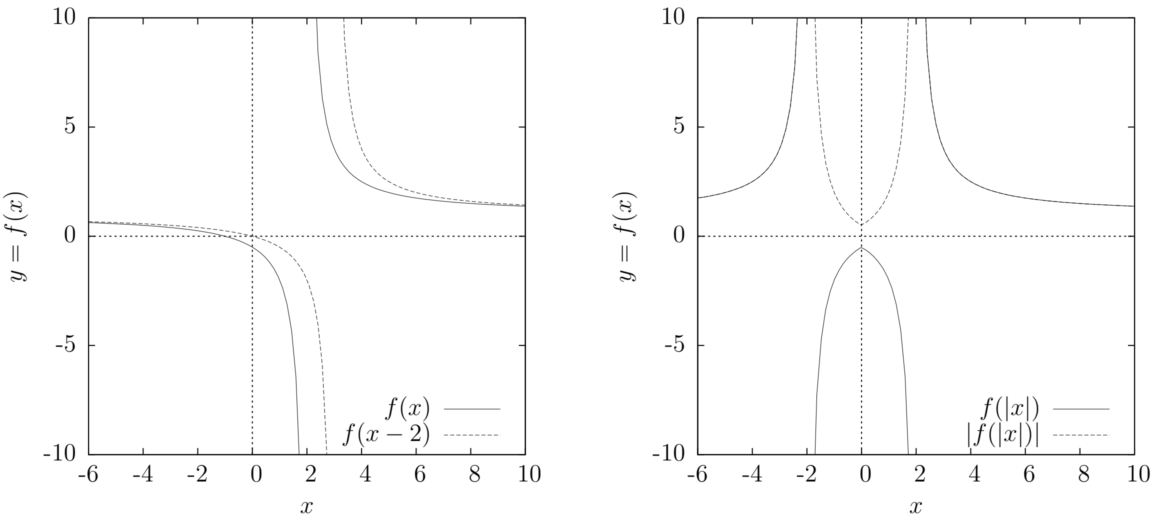

Figura 6.11: Grafici di $y = f(x)$ e $y = f(x - 2)$ (sinistra); $y = f(|x|)$ e $y = |f(|x|)|$ (destra) con $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

Risoluzione. In figura 6.11 è riportata per comodità (a sinistra) $f(x)$. $y = f(x - 2)$ si ottiene traslando $f(x)$ verso destra di 2 (si veda la figura di sinistra). $y = f(|x|)$ si ottiene "ribaltando" attorno all'asse y il grafico di $f(x)$ *corrispondente ad* $x > 0$ come visibile in figura 6.11 (destra); $y = |f(|x|)|$ è il valore assoluto di $y = f(|x|)$ per cui basta "ribaltare" rispetto all'asse x le parti negative di quest'ultima (figura 6.11 di destra). ∎