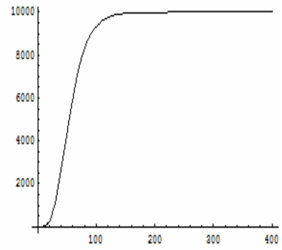
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 103 – maggio 2006



Una proposta di discretizzazione dell'equazione di Gompertz

di Simone Zucchet [1]

[*Segue dal n. 102*] Nei paragrafi precedenti ci siamo occupati di vedere quanto un insieme di dati sperimentali possa essere compiutamente rappresentato da un modello di equazioni differenziali ordinarie. Dopo aver riscritto le due equazioni come un'unica equazione differenziale che ammette una soluzione in forma chiusa, ci siamo preoccupati di trovare i tre coefficienti C, K e β tali per cui il modello linearizzato sia il miglior *fit* dei dati nel senso dei minimi quadrati.

Se si procede all'analisi del residuo con le tecniche viste nel n.102, però, ci si può facilmente accorgere che il modello di Gompertz non è poi così appropriato per descrivere il fenomeno della crescita degli sferoidi tumorali.

Quindi ci si può chiedere se esista un modello migliore e, in particolare, quali considerazioni si possano fare per cambiare le equazioni differenziali al fine di migliorarlo. Tuttavia, se il nuovo modello non ammette soluzione in forma chiusa, come si può procedere?

In questo breve intervento si vuole proporre uno strumento numerico, tra i più semplici, per ottenere la soluzione approssimata di un problema differenziale qualora non sia nota la soluzione in forma chiusa. In tali casi, infatti, l'approccio numerico è forse quello più immediato, a differenza di tecniche perturbative [B.1]. Il metodo proposto è quello di Eulero, nelle sue due varianti esplicita ed implicita [B.2]. Tali tecniche si possono utilizzare nel caso generale in cui si debba risolvere un problema di Cauchy nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(t,X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

in cui $dX(t) / dt = f(t,X)$ è l'equazione differenziale non necessariamente lineare e $X(t_0) = X_0$ è la condizione iniziale. Nel caso dell'equazione proposta da Gompertz il problema di Cauchy che si genera è il seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = \beta \cdot X(t) \cdot \ln\left(K/X(t)\right) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Se ora si introduce la variabile $kp(t)$ legata a $X(t)$ dalla relazione

$$Kp(t) = \beta \cdot \ln\left(K/X(t)\right)$$

il precedente sistema diventa

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = kp(t) \cdot X(t) \\ \dfrac{dKp(t)}{dt} = -\beta \cdot Kp(t) \end{cases} \tag{4.3}$$

che a sua volta, se si tiene conto della condizione iniziale

$$Kp(t_0) = \beta \cdot \ln\left(K/X_0\right),$$

potrà essere riscritto nei due problemi

$$\begin{cases} \dfrac{dKp(t)}{dt} = -\beta \cdot Kp(t) \\ Kp(t_0) = \beta \cdot \ln\left(K/X_0\right) \end{cases} \tag{4.4}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = Kp(t) \cdot X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Al fine di ottenere delle equazioni algebriche a partire dalle equazioni differenziali, si esprimono le derivate prime sotto la forma di rapporti incrementali, ossia:

$$\frac{dX(t)}{dt} \approx \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta t} \quad , \qquad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i \ .$$

Metodo di Eulero esplicito

Questo metodo è la via più immediata per la discretizzazione dei problemi (4.4) e (4.5) e consiste nel valutare $f(t, X)$ al tempo t_i. e in X_i. Così facendo il problema (4.4) diventa algebrico nella forma:

$$\begin{cases} \dfrac{Kp_{i+1} - Kp_i}{\Delta t} = -\beta \cdot Kp_i \\ Kp_0 = \beta \cdot \ln\left(K/X_0\right) \end{cases} \tag{4.6}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} Kp_{i+1} = Kp_i \cdot (1 - \beta\,\Delta t) \\ Kp_0 = \beta \cdot \ln\left(K/X_0\right) \end{cases} .$$

Analogamente per il problema (4.5) si ottiene

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i \cdot \left(1 + Kp_i \cdot \Delta t\right) \\ X_0 = X(0) \end{cases}$$

Dipendentemente dalla scelta dell'intervallo temporale t_{i+1}.– t_i, questo metodo può produrre soluzioni completamente errate, con oscillazioni dovute a problemi di stabilità numerica. A tali situazioni si può ovviare ricorrendo al metodo di Eulero Implicito, che assicura una regione di stabilità più estesa e quindi minori problemi [B.2].

Metodo di Eulero implicito

La differenza tra i due metodi sta nella discretizzazione della parte destra dell'equazione differenziale. Nel primo caso (esplicito) è valutata la tempo t_i, nel secondo (implicito) al tempo t_{i+1}. La (4.4) pertanto diventa

$$\begin{cases} \dfrac{Kp_{i+1} - Kp_i}{\Delta t} = -\beta \cdot Kp_{i+1} \\ Kp_0 = \beta \cdot \ln\left(K/X_0\right) \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} Kp_{i+1} = \dfrac{Kp_i}{1 + \beta\,\Delta t} \\ Kp_0 = \beta \cdot \ln\left(K/X_0\right) \end{cases}$$

Analogamente per il problema (4.5) si ottiene

$$\begin{cases} X_{i+1} = \dfrac{X_i}{1 - Kp_{i+1}\,\Delta t} \\ X_0 = X(0) \end{cases}$$

Proposta di lavoro

Visto che per il problema (4.2) è nota la soluzione in forma chiusa, al fine di acquisire una certa sensibilità con le tecniche numeriche introdotte si propone di risolvere i problemi differenziali (4.4) e (4.5) utilizzando i metodi di Eulero implicito ed esplicito. Confrontando le due soluzioni numeriche con quella esatta, cosa si può osservare? Sono simili/vicine? Quale delle due si comporta meglio? Come si può intervenire per migliorare la soluzione numerica?

Una volta acquisito lo strumento, si possono ora risolvere problemi di Cauchy per i quali non è nota la soluzione esatta in forma chiusa.

Bibliografia:: [B.1] M. van Dyke. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. The Parabolic Press, 1975. [B.2] A. Quarteroni. Modellistica Numerica per Problemi Differenziali. Springer, 2000.

[1] Docente di Matematica presso il Liceo Scientifico "E. Medi" di Villafranca di Verona e collaboratore alla ricerca presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Verona.

La Storia dell'Algebra *di Silvio Maracchia*

di Maurizio Emaldi [2]

Questo libro [B.3] è sulla storia dell'algebra intesa come studio del problema di risolvere equazioni polinomiali. I lettori dell'ottimo lavoro dello stesso autore intitolato "*Da Cardano a Galois*" (Feltrinelli 1979) saluteranno con gioia la pubblicazione di questo libro del prof. Silvio Maracchia storico scrupoloso con grande sensibilità didattica. Utilizzando direttamente le fonti disponibili e i commenti più autorevoli l'Autore del libro prende per mano il lettore e lo accompagna lungo il sentiero del pensiero che inizia nella civiltà di Ebla del 2500 a.C., attraversa diverse civiltà e termina nella Francia del secolo diciannovesimo dove fa vedere la creazione di Galois nella teoria delle equazioni polinomiali. Le tappe di visita guidata lungo questo sentiero sono i dieci capitolo in cui è distribuita la materia trattata.

Riportiamo i titoli di questi dieci capitoli, poiché essi da soli sono già sufficienti per dare un'idea del lavoro svolto dall'Autore:

Capitolo I: *Le sei tappe dello sviluppo formale dell'algebra delle equazioni e la scelta del percorso della seguente storia*;
Capitolo II: *Il primo documento "algebrico"*;
Capitolo III: *Le equazioni e i sistemi di I grado*;
Capitolo IV: *Le equazioni e i sistemi di II grado*;
Capitolo V: *Equazioni e sistemi di II e III grado*;
Capitolo VI: *Il sogno di Viète e la risposta di Descartes*;
Capitolo VII: *Il teorema fondamentale dell'algebra*;
Capitolo VIII: *Lagrange e i tentativi di risoluzione delle equazioni di grado maggiore di quattro*;
Capitolo IX: *Il teorema di Ruffini-Abel sulla impossibilità della risoluzione delle equazioni di grado maggiore di quattro*;
Capitolo X: *Il lavoro di Evariste Galois*.

I primi sette capitoli occupano due terzi del libro e sono sull'algebra delle equazioni dei primi quattro gradi, da quando essa muove i primi passi fino a quando essa raggiunge uno sviluppo completo con Viète e Descartes. Qui sono particolarmente interessanti le sezioni dedicate a Viète poiché in esse viene studiato il contributo di questo grande matematico francese in connessione con l'analisi e la sintesi della matematica greca. Il capitolo VIII è dedicato alla prima dimostrazione di Gauss del teorema fondamentale dell'algebra, teorema che fu affermato per la prima volta dal fiammingo Girard nel 1629. La dimostrazione di Gauss, pur presentata con grande chiarezza, non lascia vedere la nascita del "piano Argand-Gauss". Il lavoro di Lagrange sulle equazioni polinomiali è l'oggetto del capitolo IX. Qui le due grandi memorie di Lagrange sulle equazioni sono analizzate con grande cura anche attraverso esempi, mettendo in evidenza inoltre la preoccupazione storica di Lagrange e procedendo a considerazioni comparative con l'analogo contributo di Vandermonde, pur non sottolineando a sufficienza che le radici delle equazioni sono considerate come quantità indeterminate. Naturale prosecuzione del capitolo VIII è il capitolo IX che discute il teorema di Ruffini-Abel che afferma che non può esistere alcuna formula radico-razionale per risolvere ogni equazione di grado maggiore di 4.

Dobbiamo essere grati al professor Silvio Maracchia per questo capitolo, poiché generalmente al lavoro di Ruffini viene dedicato solo un cenno. Lagrange e Vandermonde seppero spiegare i metodi di risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado in termini di permutazioni delle loro radici ma, come anche Ruffini e Abel, non scoprirono le relazioni chiave tra permutazioni delle radici e radicali delle stesse. Queste furono scoperte dal giovane Galois il quale per questo scopo inventò il concetto di *gruppo di permutazioni* e il concetto di *sottogruppo distinto* (sottogruppo normale). Il lavoro di Galois è presentato nel capitolo X in cui il materiale discusso viene poi illustrato su equazioni di terzo grado. Il libro include un'utile appendice tecnica sull'algebra dei polinomi.

Questo è un libro, frutto di un solido lavoro storico, che ogni insegnante di matematica interessato alla storia della matematica dovrebbe leggere.

Bibliografia: [B.3] Silvio Maracchia (2005), Storia dell'Algebra, Liguori editore, Napoli, pagg. 639, 48,50 euro

[2] Docente di Algebra presso l'Università degli Sudi di Padova

Teatro d'avanguardia in *Non solo numeri*

di Giuliana Breoni

I testi con forti riferimenti classici e matematici sono la base di questa rappresentazione teatrale. Così è nato lo spettacolo «Non solo numeri» che la Mathesis di Verona ha promosso per dimostrare il valore e il potere del linguaggio matematico che va oltre il mero tecnicismo delle formule scritte sulle lavagne di scuola, spesso odiate dagli studenti. Lo spettacolo, che si è tenuto presso il teatro Camploy di Verona il 19 aprile, è ricco di profondo umanesimo e ha piacevolmente stupito il pubblico presente numeroso in sala.

Hanno stupito la struttura scenica, l'armonico collegamento testuale, l'essenziale costruzione teatrale che il giovane regista Mario Peretti ha saputo dare. Bello è parso il gioco dello specchio che riflette la realtà proiettandola nel fantastico mondo delle immagini. Non occorre avere una specifica conoscenza matematica per comprendere la storia narrata e i contenuti dei brani recitati. Si parla dell'uomo, in fondo, delle sue emozioni, delle sue passioni, dei suoi bisogni.

È l'adagio di sempre, rivisitato usando un linguaggio inusuale, anche se universale: il linguaggio della matematica. Si parte dallo zero, gridato con disperazione al cielo, il nulla che l'uomo (interpretato da Ilaria, la protagonista) possiede quando è privo di ricchezza, di risorse e di speranza, per poi passare all'uno, quando l'uomo diventa qualcuno e ha coscienza di essere e quindi finalmente due, «due vettori linearmente indipendenti», una «base» di uno spazio vettoriale strano su cui impostare una relazione con un altro essere. Dolcissima è la scena sull'altalena in moto, «un punto di sella di una quadrica», dove Antonio incontra Ilaria e tenta «d'interpolare bene» una «funzione d'amore». Il gioco tra immagine e realtà, là dove il ballerino cerca la sua ballerina, immagine proiettata sullo schermo, in un tentativo di danza che non approda a nulla, ben rappresenta la difficoltà di essere coppia. Ritorna l'idea di un vuoto che ci gira intorno e di cui sentiamo l'offesa come esseri pensanti. I soldi rappresentano la possibilità di essere, di godere, ma Andrea cinicamente avverte Ilaria che essi sono «punti» che «vagano a caso da luoghi in luoghi, condotti da giochi perversi». Così forse accadrà: ciò che ora è il nostro potere, domani lo sarà di altri e noi forse dovremo ripartire «da capo, senza possibile fine».

L'abilità di Peretti è di aver saputo, in questa costruzione teatrale, far corrispondere armonicamente, con una interpretazione personale, i testi della poesia di Luciano Corso con i racconti simbolici di Ivano Arcangeloni. Si è coinvolti fin dall'inizio dai contenuti e dalla storia. Si è subito orientati a capire i concetti. La musica dal vivo è buona e significativa. Sarebbe un peccato che esperienze simili morissero subito dopo essere nate, senza lasciare traccia. Il lavoro, invece, andrebbe potenziato e rifinito. "Non solo numeri" è una bella proposta di teatro d'avanguardia di qualità, innovativo e originale.