

Effetto Compton

Simone Zuccher

2 giugno 2016

Indice

1	Evidenza sperimentale	1
2	Onda o particella?	2
3	Analisi quantitativa	2
4	Conclusioni	3

1 Evidenza sperimentale

All'inizio '900 c'era un notevole fermento nella ricerca dell'interazione tra radiazione elettromagnetica e materia. Dal punto di vista sperimentale si utilizzavano principalmente i raggi X. Essi erano noti fin dal 1887 (Tesla aveva compiuto numerosi esperimenti senza rendere pubblici i suoi risultati), ma fu solo alla fine del 1895 che vennero ufficialmente riconosciuti e denominati "raggi X" (in quanto si trattava di una entità fino ad allora sconosciuta) da Wilhelm Röntgen¹, che per questa scoperta ricevette il primo Premio Nobel per la fisica nel 1901. Essi non sono altro che una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda maggiore rispetto ai raggi gamma ma inferiore rispetto ai raggi ultravioletti. Il processo di produzione di raggi X è più o meno l'inverso dell'effetto fotoelettrico, essendo ottenuti bombardando una targhetta di metallo con degli elettroni accelerati all'interno di un tubo a vuoto.

Un esperimento che aveva come scopo proprio la spiegazione di alcuni fenomeni strani di interazione tra radiazione elettromagnetica e materia fu quello di Arthur Compton (vedi figura 1), pubblicato nel 1923 [1], a seguito del quale nel 1927 ottenne il premio Nobel per la fisica (in realtà Compton aveva già reso noti dei risultati preliminari nel 1922). Questo lavoro attestò definitivamente la doppia natura *ondulatoria e corpuscolare* delle onde elettromagnetiche e quindi anche della luce. Fino ad allora era chiaro che la luce e le onde elettromagnetiche avessero una natura *ondulatoria* in quanto fenomeni come la diffrazione e l'interferenza non potevano essere spiegati altrimenti. Con i suoi esperimenti, Compton mostrò che la radiazione elettromagnetica è in grado di scambiare non solo energia ma anche *quantità di moto* con gli elettroni in un urto *elastico* manifestando così la sua *natura corpuscolare*.

Come riportato nell'*Abstract* del suo lavoro, egli bombardò della grafite con dei raggi X monocromatici di lunghezza d'onda $\lambda = 7.11 \times 10^{-11} \text{ m} = 71.1 \text{ pm}$ ed osservò che i raggi diffusi contenevano oltre alla lunghezza d'onda

λ del raggio incidente anche una lunghezza d'onda $\lambda' > \lambda$ che variava a seconda dell'angolo dal quale si osservava la radiazione diffusa.

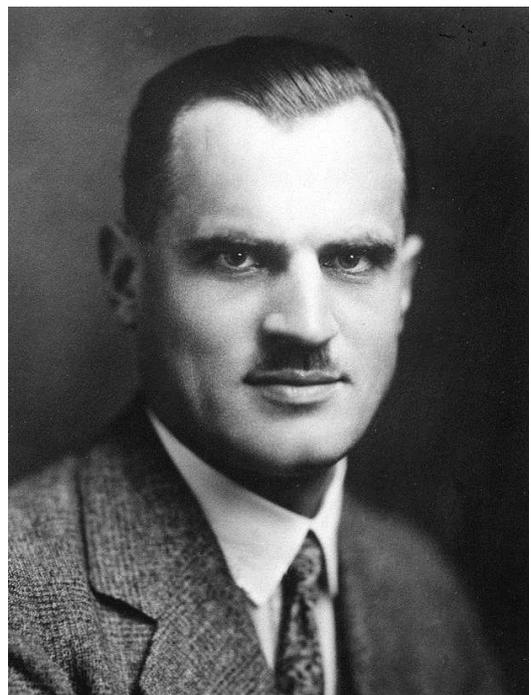


Figura 1: Arthur Holly Compton, nato il 10 settembre 1892 a Wooster, Ohio, USA, morto il 15 marzo 1962 (all'età di 69 anni) a Berkeley, California, USA.

I dati sperimentali ottenuti da Compton [1] sono riportati in figura 2. Si vede chiaramente che la radiazione diffusa con angolo $\theta = 0^\circ$, ossia la radiazione che continua la sua propagazione nella stessa direzione che aveva prima di interagire con la grafite, contiene solo la lunghezza d'onda iniziale λ . Al contrario, per $\theta > 0^\circ$ si osserva sempre e comunque un'altra lunghezza d'onda $\lambda' > \lambda$ che cresce al crescere di θ . Pertanto, anche la differenza $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ aumenta con θ , anche se non linearmente.

¹Wilhelm Conrad Röntgen, nato il 27 marzo 1845 a Lennep, Confederazione Germanica, morto il 10 febbraio 1923 (all'età di 77 anni) a Monaco di Baviera, Germania.

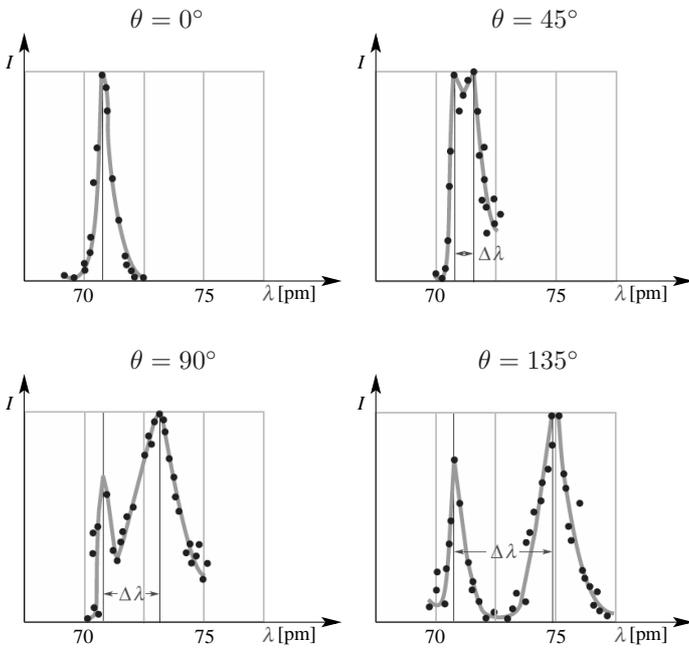


Figura 2: Dati sperimentali pubblicati da Compton nel 1923 [1]. L'angolo θ denota la direzione del raggio X diffuso dopo l'impatto sulla grafite, pertanto $\theta = 0^\circ$ corrisponde al raggio X che si propaga nella stessa direzione che aveva prima dell'interazione con la grafite, $\theta = 90^\circ$ corrisponde alla radiazione diffusa perpendicolarmente alla direzione originaria e $\theta = 135^\circ$ corrisponde alla radiazione diffusa all'indietro diagonalmente (vedi schema in figura 3).

2 Onda o particella?

Questi risultati non erano inquadrabili utilizzando la natura ondulatoria della radiazione elettromagnetica in quanto l'onda incidente, di frequenza $f = c/\lambda$, avrebbe dovuto far oscillare gli elettroni della grafite alla stessa frequenza. Di contro, questi elettroni, oscillando alla frequenza f , avrebbero dovuto irradiare (alla stregua di un'antenna) onde elettromagnetiche alla stessa frequenza e lunghezza d'onda della radiazione incidente, cosa non osservata negli esperimenti.

L'intuizione di Compton fu che la radiazione monocromatica incidente si comportasse come delle particelle che, anche se prive di massa, trasportavano quantità di moto (i fotoni) e per questo potevano interagire con gli elettroni della grafite tramite un *urto elastico*. Durante l'urto l'energia si conserva perché gli elettroni presenti nella grafite sono debolmente legati ad essa (il lavoro di estrazione dalla grafite è piuttosto basso, dell'ordine di 3 eV). L'energia della radiazione iniziale in parte diventa energia cinetica dell'elettrone, in parte energia della radiazione diffusa, che per questo deve essere minore di quella iniziale. Allo stesso modo la quantità di moto deve conservarsi in quanto non vi sono forze esterne, pertanto la quantità di moto del fotone incidente deve uguagliare la somma vettoriale delle quantità di moto dell'elettrone e della radiazione diffusa. Compton ipotizzò che a seguito dell'urto l'elettrone raggiungesse velocità relativistiche, pertanto energia e quantità di moto dell'elettrone devono essere espresse nelle forme previste dalla relatività ristretta.

3 Analisi quantitativa

La schematizzazione dell'urto elastico tra un fotone della radiazione incidente ed un elettrone della grafite è riportata in figura 3, dove θ è l'angolo tra la radiazione diffusa e quella incidente e φ è l'angolo tra la direzione dell'elettrone dopo l'urto e la direzione della radiazione incidente.

La radiazione incidente di lunghezza d'onda λ è costituita da fotoni privi di massa ma che trasportano l'energia quantizzata

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

e che possiedono una quantità di moto (dalla teoria della relatività ristretta)

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

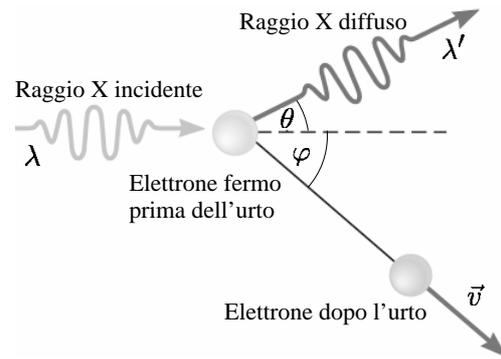


Figura 3: Urto elastico tra un fotone della radiazione incidente a lunghezza d'onda λ e l'elettrone inizialmente fermo. A seguito dell'urto la radiazione diffusa ha lunghezza d'onda λ' e forma un angolo θ con la direzione della radiazione incidente, mentre l'elettrone si muove con velocità \vec{v} che forma un angolo φ con la direzione della radiazione incidente.

Allo stesso modo, la radiazione diffusa, che ha lunghezza d'onda λ' , è caratterizzata da energia e quantità di moto rispettivamente pari a

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} \quad \text{e} \quad p' = \frac{h}{\lambda'}.$$

L'elettrone, di massa m_e e velocità di modulo v , possiede quantità di moto ed energia relativistiche,

$$K_e = (\gamma - 1)m_e c^2 \quad \text{e} \quad \vec{p}_e = \gamma m_e \vec{v},$$

dove $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} > 1$. La conservazione dell'energia impone

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + (\gamma - 1)m_e c^2, \quad (3.1)$$

mentre la conservazione della quantità di moto deve essere scomposta lungo la direzione iniziale e perpendicolarmente ad essa:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + \gamma m_e v \cos \varphi \quad (3.2)$$

e

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta - \gamma m_e v \sin \varphi. \quad (3.3)$$

Isoliamo dalle equazioni (3.2) e (3.3) la parte con φ

$$\gamma m_e v \cos \varphi = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos \theta$$

$$\gamma m_e v \sin \varphi = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta$$

quindi eleviamo al quadrato

$$\begin{aligned}\gamma^2 m_e^2 v^2 \cos^2 \varphi &= \frac{h^2}{\lambda^2} + -2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta + \frac{h^2}{\lambda'^2} \cos^2 \theta \\ \gamma^2 m_e^2 v^2 \sin^2 \varphi &= \frac{h^2}{\lambda'^2} \sin^2 \theta\end{aligned}$$

e sommiamo le due equazioni ottenendo

$$\gamma^2 m_e^2 v^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta. \quad (3.4)$$

Ora riscriviamo l'equazione dell'energia (3.1) dividendo per c e spostando a sinistra il primo termine di destra ottenendo

$$\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} = (\gamma - 1) m_e c, \quad (3.5)$$

quindi eleviamo al quadrato

$$\frac{h^2}{\lambda^2} - 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} + \frac{h^2}{\lambda'^2} = (\gamma - 1)^2 m_e^2 c^2,$$

da cui, spostando a destra il termine derivante dal doppio prodotto,

$$\frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} = 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} + (\gamma - 1)^2 m_e^2 c^2.$$

Sostituendo il termine di sinistra nell'equazione (3.4) si ottiene

$$\gamma^2 m_e^2 v^2 = 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} (1 - \cos \theta) + (\gamma - 1)^2 m_e^2 c^2,$$

che può essere riscritta portando a sinistra l'ultimo termine e raccogliendo $m_e^2 c^2$

$$m_e^2 c^2 \left[\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} - (\gamma - 1)^2 \right] = 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} (1 - \cos \theta). \quad (3.6)$$

Ricordando l'espressione di γ , si può rielaborare il termine tra parentesi quadre

$$\begin{aligned}\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} - (\gamma - 1)^2 &= \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} - \gamma^2 + 2\gamma - 1 \\ &= -\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + 2\gamma - 1 \\ &= -\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + 2\gamma - 1 \\ &= 2\gamma - 2 \\ &= 2(\gamma - 1).\end{aligned}$$

Ricavando $(\gamma - 1)$ dall'equazione (3.5) si ottiene

$$(\gamma - 1) = \frac{h}{m_e c} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right],$$

da cui

$$\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} - (\gamma - 1)^2 = 2(\gamma - 1) = \frac{2h}{m_e c} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right],$$

che sostituito in (3.6) porta a

$$m_e^2 c^2 \frac{2h}{m_e c} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right] = 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} (1 - \cos \theta),$$

ovvero

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} = \frac{h}{m_e c \lambda \lambda'} (1 - \cos \theta) \iff \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'} = \frac{h}{m_e c \lambda \lambda'} (1 - \cos \theta)$$

da cui la variazione di lunghezza d'onda

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

La costante

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \approx 2.426 \times 10^{-12} \text{ m}$$

è detta *lunghezza d'onda di Compton*. Affinché vi sia un $\Delta \lambda$ apprezzabile rispetto alla lunghezza d'onda incidente λ , oltre ad avere $\theta > 0^\circ$, deve essere

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \geq 1 \iff \frac{\lambda_c}{\lambda} \geq 1 \implies \lambda \leq \lambda_c.$$

Al contrario, $\Delta \lambda$ è trascurabile (per $\theta > 0^\circ$) se

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \ll 1 \iff \frac{\lambda_c}{\lambda} \ll 1 \implies \lambda \gg \lambda_c.$$

Pertanto la radiazione elettromagnetica si comporta come un'onda se $\lambda \gg \lambda_c$, mentre si comporta come particelle se $\lambda \leq \lambda_c$.

4 Conclusioni

Il contributo di Compton consiste nell'aver mostrato, tramite i suoi esperimenti, che la radiazione elettromagnetica ha anche natura *corpuscolare* e non solo ondulatoria, dipendentemente dal valore di λ . Inoltre, ipotizzando un urto elastico tra un fotone incidente ed un elettrone inizialmente fermo, imponendo la conservazione dell'energia e della quantità di moto riscritte sfruttando le nuove teorie della quantizzazione dell'energia (di Planck) e della relatività ristretta (di Einstein), ha dimostrato che la differenza tra la lunghezza d'onda della radiazione diffusa e quella incidente, ossia $\Delta \lambda = \lambda' - \lambda$, dipende unicamente dall'angolo di diffusione θ e non dalla lunghezza d'onda iniziale λ . Questa differenza può variare tra 0 (quando si osserva la radiazione diffusa nella stessa direzione della radiazione incidente) e il valore massimo $\Delta \lambda_{\max} = 2h/(m_e c)$ nel caso di radiazione che "rimbalza" completamente all'indietro ($\theta = 180^\circ$).

In tutto ciò, tuttavia, non si spiega la presenza consistente del picco in corrispondenza di λ chiaramente visibile nei dati sperimentali (vedi figura 2) per $\theta > 0^\circ$. La teoria vista in precedenza, infatti, spiega solo la diversa lunghezza d'onda della radiazione diffusa. Una congettura è la seguente: affinché l'urto sia *elastico*, ossia non dissipi energia, è necessario che il fotone incidente urti un elettrone libero, per il quale il lavoro di estrazione è irrilevante. Tuttavia, il fotone incidente potrebbe anche urtare un elettrone legato ad uno ione del blocco di grafite. Si può ipotizzare che un elettrone legato si comporti come quello libero con l'unica differenza che la sua *massa efficace*, ossia la massa che conta ai fini dell'urto, sia molto maggiore a causa del suo legame con lo ione. Evidentemente, se la massa efficace è grande rispetto a quella dell'elettrone libero m_e , allora la variazione di lunghezza d'onda è molto piccola al punto di non essere rilevabile sperimentalmente.

Riferimenti bibliografici

- [1] Arthur H. Compton. The spectrum of scattered X-Rays. *Phys. Rev.*, 22:409–413, Nov 1923. [PDF link](#).