Regolarità delle soluzioni nelle identità di Pohožaev-Pucci-Serrin e fenomeni di concentrazione per equazioni ellittiche quasilineari

Siano $N \geqslant 3$, Ω un dominio (anche illimitato) di $\mathbb{R}^N$ e si consideri il problema

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = u^p & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

con $1 < p < 2^* - 1$ e $V \in C^{0,\beta}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ tale che $V(x) \geqslant \alpha > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.
Supponiamo inoltre che esista un sottoinsieme compatto Λ di Ω tale che

$$\min_{\Lambda} V < \min_{\partial\Lambda} V.$$

Sia $H_V(\Omega)$ lo spazio di Hilbert pesato

$$H_V(\Omega) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega V(x) u^2 < +\infty \right\},$$

e denotiamo con $\|\cdot\|_{H_V(\Omega)}$ la norma corrispondente.

Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, esiste una soluzione $u_\varepsilon \in H_V(\Omega)$ che ammette un unico punto di massimo locale $x_\varepsilon \in \Lambda$ con

$$\lim_{\varepsilon \to 0} V(x_\varepsilon) = \min_\Lambda V.$$

Inoltre esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tali che

$$u_\varepsilon(x) \leqslant \alpha \exp\left\{ -\frac{\beta}{\varepsilon} |x - x_\varepsilon| \right\}$$

per ogni $x \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$.

M. Del Pino, P. Felmer, *Calc. Var.* **4** (1996), 121–137.

Problema: cosa si può dire sull'esistenza di soluzioni $u \in H_0^1(\Omega)$ che esibiscono una forma a picco per il seguente problema quasilineare

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{N} D_j(a_{ij}(x,u)D_i u) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^{N} D_s a_{ij}(x,u) D_i u D_j u + V(x)u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ossia l'equazione di Eulero del funzionale $I_\varepsilon : H_V(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$I_\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x,u) D_i u D_j u + \frac{1}{2} \int_\Omega V(x) u^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega F(u),$$

sotto opportune ipotesi sui coefficienti $a_{ij}(x,u)$? (single–peak/nondegenere);

Principali difficoltà del problema (risp. DF)

- Nessun risultato di unicità per le soluzioni dell'equazione limite automona

$$-\sum_{i,j=1}^{N} D_j(a_{ij}(x^*,u)D_i u) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} D_s a_{ij}(x^*,u)D_i u D_j u + V(x^*)u = f(u) \quad (L)$$

su $\mathbb{R}^N$, dove x^* è fissato in Λ;

- Nessun risultato tipo Gidas–Ni–Nirenberg è noto per questa equazione;

- Nessuna procedura di massimizzazione sulle rette, ossia la proprietà

$$u \in H^1(\mathbb{R}^N),\ u \geqslant 0,\ u \text{ soluzione di } (L) \text{ implica } J(u) = \max_{t \geqslant 0} J(tu)$$

è <u>falsa</u> anche se la mappa $\{s \mapsto \frac{f(s)}{s}\}$ è nondecrescente;

- Dimostrazione più delicata del fatto che le soluzioni u_ε del problema convergono uniformemente a zero su $\partial\Lambda$ quando $\varepsilon \to 0$;

- <u>Nessun</u> risultato ad hoc di decadimento esponenziale delle soluzioni di (L);

- <u>Scarsa</u> regolarità del funzionale $I_\varepsilon : H_V(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$I_\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x,u) D_i u D_j u + \frac{1}{2} \int_\Omega V(x) u^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega F(u),$$

dove $F(u) = \int_0^u f(t)\, dt$. I_ε è solo continuo su $H_V(\Omega)$ e derivabile lungo le direzioni $H_0^1 \cap L^\infty(\Omega)$ ($D_s a_{ij}(x,u) D_i u D_j u \in L^1(\Omega) \not\subset H^{-1}(\Omega)$!).

Ipotesi e primo risultato

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e $2 < \vartheta \leqslant p+1$ tale che

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s^p} = 0, \quad \lim_{s \to 0^+} \frac{f(s)}{s} = 0, \quad 0 < \vartheta F(s) \leqslant f(s)s, \ \ s \geqslant 0,$$

dove $F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ per ogni $s \in \mathbb{R}^+$.

Le funzioni $a_{ij}(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sono continue in x e di classe C^1 rispetto a s, $a_{ij}(x,s) = a_{ji}(x,s)$ per ogni $i,j = 1,\dots,N$ ed esiste $C > 0$ tale che $|a_{ij}(x,s)| \leqslant C$ e $|D_s a_{ij}(x,s)| \leqslant C$ per q.o. $x \in \Omega$ e ogni $s \in \mathbb{R}^+$.

Esistono $R > 0$, $\nu > 0$ e $0 < \gamma < \vartheta - 2$ con

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} sD_s a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \leqslant \gamma \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j,$$

$$s \geqslant R \implies \sum_{i,j=1}^{N} D_s a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \geqslant 0,$$

q.o. in Ω, per ogni $s \in \mathbb{R}^+$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Sia Λ un sottoinsieme compatto di Ω e sia $x_0 \in \Lambda$ tale che

$$V(x_0) = \min_{\Lambda} V < \min_{\partial\Lambda} V, \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0,s)\xi_i\xi_j = \min_{x\in\Lambda} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j$$

per $s \in \mathbb{R}^+$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Teorema 1. *Esiste* $\varepsilon_0 > 0$ *tale che, per ogni* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *esistono* $u_\varepsilon \in H_V(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e* $x_\varepsilon \in \Lambda$ *che soddisfano le seguenti proprietà:*

(a) u_ε *è una soluzione del problema*

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \sum\limits_{i,j=1}^{N} D_j(a_{ij}(x,u)D_i u) \\ +\frac{\varepsilon^2}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{N} D_s a_{ij}(x,u) D_i u D_j u + V(x)u = f(u) & \textit{in } \Omega \\ u > 0 & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega\,; \end{cases}$$

(b) *esistono* $\sigma, \sigma' > 0$ *tali che*

$$u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \sup_\Omega u_\varepsilon, \quad \sigma < u_\varepsilon(x_\varepsilon) < \sigma', \quad \lim_{\varepsilon \to 0} V(x_\varepsilon) = V(x_0)\,;$$

(c) *per ogni* $\varrho > 0$ *si ha*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega \setminus B_\varrho(x_\varepsilon))} = 0\,;$$

(d) *si ha*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{H_V(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} = 0$$

per ogni $2 \leqslant q < +\infty$.

M. Squassina, Spike solutions for a class of singularly perturbed quasilinear elliptic equations, *Nonlinear Anal.* (2003), in press.

Passi principali della dimostrazione

Nello spirito dello schema di penalizzazione di del Pino–Felmer.

Passo I. Il funzionale originale $I_\varepsilon : H_V(\Omega) \to \mathbb{R}$ viene penalizzato fuori da Λ, ossia viene costruito un nuovo funzionale J_ε

$$J_\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x,u) D_i u D_j u + \frac{1}{2} \int_\Omega V(x) u^2 - \int_\Omega G(x,u)$$

dove G è una opportuna modificazione di F tale che i punti critici di J_ε che sono (uniformemente) piccoli fuori da Λ sono soluzioni del problema originale.

Più precisamente $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)\, ds$, dove $g : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$g(x,s) := \mathbf{1}_\Lambda(x) f(s) + \mathbf{1}_{\Omega\setminus\Lambda}(x) \widetilde{f}(s), \quad \widetilde{f}(s) := \begin{cases} f(s) & \text{se } s \leqslant \ell \\ \frac{\alpha}{k} s & \text{se } s > \ell, \end{cases}$$

dove

$$\ell := \sup\left\{ s > 0 : \ \frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{\alpha}{k} \quad \text{per ogni } 0 \leqslant t \leqslant s \right\}$$

per k fissato con $k > \frac{\vartheta}{\vartheta - 2}$.

Passo II. J_ε soddisfa la condizione (concreta) di Palais–Smale ad ogni livello (I_ε no, in generale) e il Teorema di Passo di Montagna si può applicare direttamente per ottenere un punto critico u_ε di J_ε (con una precisa stima quantitativa dall'alto).

Passo III. Si dimostra che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{\infty, \partial\Lambda} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{\infty, \Omega\setminus\Lambda} = 0.$$

Questo è il passo più duro. Viene ripetutamente usata l'identità variazionale di Pohožaev–Pucci–Serrin per stimare i livelli critici. Nello studio dei problemi nondegeneri verrà utilizzata l'identità recentemente dimostrata per soluzioni di classe C^1 (pazienza, slides successivi..).

Passo IV. per ε piccolo, u_ε risolve il problema originale con le proprietà richieste.

Alcuni problemi aperti correlati

Aperto 1. Per opportune ipotesi su $A, f \in C^1(\mathbb{R}^+)$, vale un risultato di radialità tipo Gidas–Ni–Nirenberg per le soluzioni positive regolari dell'equazione

$$-\mathrm{div}\,(A(u)Du) + \frac{1}{2}A'(u)|Du|^2 + u = f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N \qquad (E)?$$

Aperto 2. Per opportune ipotesi su A e f è possibile dimostrare un risultato di unicità per le soluzioni regolari positive di (E)? (legato a Aperto 1..)

Aperto 3. Vero o falso che le soluzioni u_ε del problema ammettono un unico punto di massimo locale in Λ come nel caso semilineare? (legato a Aperto 1..)

Aperto 4. Vero o falso che le soluzioni u_ε del problema decadono in modo esponenziale come nel caso semilineare? (legato anche a Aperto 1..).

E il caso critico?

Siano $f(s) = \lambda s^p + s^{2^*-1}$ e u_ε soluzione al livello di PdM (vero, per λ grande).

Lemma 2. *Esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $\ell > 0$ tali che u_ε è una soluzione dell'equazione*

$$-\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^N D_j(a_{ij}(x,u)D_i u) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^N D_s a_{ij}(x,u) D_i u D_j u + V(x)u = \Phi_f(u) \quad \textit{in } \Omega$$

per $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, dove $\Phi_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è la funzione C^1 definita da

$$\Phi_f(s) := \begin{cases} \lambda s^p + s^{2^*-1} & \textit{if } s \leqslant \ell \\ \lambda s^p + \frac{2^*-1}{p} \ell^{2^*-p-1} s^p - \frac{2^*-p-1}{p} \ell^{2^*-1} & \textit{if } s > \ell. \end{cases}$$

M. Squassina, Two solutions for inhomogeneous fully nonlinear elliptic equations at critical growth, *NoDEA, Nonlinear Differential Equations Appl.* (2003), in press.

Identità di Pohožaev–Pucci–Serrin

Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^1 e normale esterna ν. Sia $L(x, s, \xi)$ una funzione di classe C^1 definita su $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e sia $f(x)$ una funzione continua definita su $\overline{\Omega}$. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,\{D_\xi L(x,u,Du)\} + D_s L(x,u,Du) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad (P)$$

ossia l'equazione di Eulero associata al funzionale

$$I(u) = \int_\Omega L(x,u,Du) - \int_\Omega fu.$$

P. Pucci, J. Serrin, A general variational identity, *Indiana Univ. Math. J.* **35** (1986), 681–703.

Teorema 3. *Supponiamo che $D_\xi L$ sia di classe C^1 su $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ una soluzione di (P). Allora si ha*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \big[L(x,0,Du) - D_\xi L(x,0,Du)\cdot Du\big](B\cdot\nu)\, d\mathcal{H}^{n-1} = \\
= \int_\Omega \big[L(x,u,Du)\,(\mathrm{div}\ B) + D_x L(x,u,Du)\cdot B\big]\, dx \\
- \int_\Omega D_\xi L(x,u,Du)\cdot\big[uDa + DB^t\, Du\big]\, dx \\
- \int_\Omega \big[D_\xi L(x,u,Du)\cdot Du + uD_s L(x,u,Du)\big] a\, dx \\
+ \int_\Omega f\,\big[au + B\cdot Du\big]\, dx
\end{aligned}$$

per ogni $a \in C^1(\overline{\Omega})$ e $B \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$.

Idea: test. l'eq. con $au + B \cdot Du$. Non esistenza: $a \in \mathbb{R}$ e $B(x) = x$.

Regolarità nell'identità PPS

Sia, ad esempio, $L(x,s,\xi)=\frac{1}{p}|\xi|^p-G(x,s)$ con $p\neq 2$. Si ha solo $u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$!

Ciononostante per tale L l'identità vale, come dimostrato in

M. Guedda, L. Véron, Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Nonlinear Anal.* **13** (1989), 879–902.

Torniamo ad una L generica e veniamo ai risultati principali:

Teorema 4. *Supponiamo che $L(x,s,\cdot)$ sia strettamente convessa. Sia $u\in C^1(\overline{\Omega})$ una soluzione debole di (P).*

Allora l'identità vale per ogni $a\in C^1(\overline{\Omega})$ e $B\in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$.

Teorema 5. *Supponiamo che $L(x,s,\cdot)$ sia strettamente convessa. Sia $u\in C^1(\Omega)$*

(basta $u \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}$*) una soluzione debole di*

$$-\mathrm{div}\ \{D_\xi L(x,u,Du)\} + D_s L(x,u,Du) = f.$$

Allora

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \big[DB\, D_\xi L(x,u,Du)\big]\cdot Du\, dx \\
&\quad - \int_\Omega \big[L(x,u,Du)\,(\mathrm{div}\ B) + D_x L(x,u,Du)\cdot B\big]\, dx = \\
&\quad = \int_\Omega f\,\big[B\cdot Du\big]\, dx
\end{aligned}$$

per ogni $B \in C^1_c(\Omega;\mathbb{R}^n)$*.*

M. Degiovanni, A. Musesti, M. Squassina, On the regularity of solutions in the Pucci-Serrin identity, *Calc. Var.* (2003), in press.

Idea della dimostrazione, $B \in C^1_c$, $a = 0$, $u \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}$

Sia Ω_0 un aperto limitato regolare tale che B ha supporto compatto in Ω_0 e Ω_0 ha chiusura compatta in Ω. Sia inoltre $R > 0$ tale che $|Du(x)| \leqslant R$ per q.o. $x \in \Omega_0$. Per semplicità, denotiamo sempre con Ω un tale Ω_0.

Passo I. Sia $g = f - D_s L(x, u, Du)$. Regolarizziamo per convoluzione L, g e u, ottenendo le successioni di funzioni $L_k : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_k : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $u_k : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $L_k(x, s, \cdot)$ è convesso,

$$
\begin{aligned}
&L_k \to L && \text{in } C^1(K) \text{ per ogni compatto } K \text{ in } \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\,,\\
&g_k \to g && \text{q.o. in } \Omega \text{ con } \sup_k \|g_k\|_\infty < +\infty\,,\\
&u_k \to u && \text{uniformemente su } \overline{\Omega}\,,\\
&Du_k \to Du && \text{q.o. in } \Omega \text{ con } \sup_k \|Du_k\|_\infty < +\infty.
\end{aligned}
$$

Passo II. Sia $\vartheta : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ una funzione di classe C^∞, con $\vartheta(\xi) = 1$ per $|\xi| \leqslant R+2$ e $\vartheta(\xi) = 0$ per $|\xi| \geqslant R+3$, e definiamo $\overline{L}_k : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\overline{L}_k(x,\xi) = \vartheta(\xi) L_k(x, u_k(x), \xi).$$

Esiste $\omega > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^n D^2_{\xi_i \xi_j} \overline{L}_k(x,\xi)\eta_i\eta_j \geqslant -\omega|\eta|^2$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, $(x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ e $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Passo III. Consideriamo la funzione convessa $\Lambda : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty[$ di classe C^∞ con $\Lambda(\xi) = 0$ per $|\xi| \leqslant R+1$, $\nabla^2\Lambda$ limitato,

$$\sum_{i,j=1}^n D^2_{\xi_i \xi_j} \Lambda(\xi)\eta_i\eta_j \geqslant (\omega+1)|\eta|^2$$

per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ tale che $|\xi| \geqslant R + 2$.

Infine, definiamo $\widetilde{L}_k : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\widetilde{L}_k(x, \xi) = \overline{L}_k(x, \xi) + \Lambda(\xi) + \frac{1}{k}|\xi|^2 .$$

Allora $\widetilde{L}_k$ è di classe C^∞ e soddisfa

$$\widetilde{L}_k(x, \xi) \geqslant \frac{\omega}{4}|\xi|^2 - C ,$$

$$\frac{1}{k}|\eta|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} D^2_{\xi_i \xi_j} \widetilde{L}_k(x, \xi) \eta_i \eta_j \leqslant C_k |\eta|^2$$

per certi $C, C_k > 0$ con C indipendente da k.

Passo IV. Definiamo ora $\widetilde{L} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\widetilde{L}(x, \xi) = \vartheta(\xi) L(x, u(x), \xi) + \Lambda(\xi) .$$

Risulta che $\widetilde{L}$ è localmente Lipschitziano, $\widetilde{L}(x,\cdot)$ è strettamente convesso e C^1 con $D_\xi \widetilde{L}$ continuo, $D_x \widetilde{L}$ è di Carathéodory e risulta

$$\left| D_x \widetilde{L}(x,\xi) \right| \leqslant \widehat{C}\,,$$

$$\left| D_\xi \widetilde{L}(x,\xi) \right| \leqslant \widehat{C}(1+|\xi|)\,,$$

$$\left(\widetilde{L}_k(x,\xi) - \frac{1}{k}|\xi|^2 \right) \to \widetilde{L}(x,\xi) \qquad \text{uniformemente su } \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n\,,$$

$$\left(D_\xi \widetilde{L}_k(x,\xi) - \frac{2}{k}\xi \right) \to D_\xi \widetilde{L}(x,\xi) \qquad \text{uniformemente su } \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n\,,$$

$$\Big(D_x \widetilde{L}_k(x,v_k) - D_x \widetilde{L}(x,v_k) \Big) \to 0 \qquad \text{fortemente in } L^1(\Omega)\text{, per ogni successione } (v_k) \text{ in } L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)\,.$$

Inoltre, $\widetilde{L}(x,\xi) = L(x,u(x),\xi)$ per $|\xi| \leqslant R+1$.

Passo V. Poichè u risolve l'equazione, u è l'unico minimo del funzionale $I : u + H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dato da

$$I(w) = \int_\Omega \widetilde{L}(x, Dw)\, dx - \int_\Omega gw\, dx.$$

D'altronde, se $\tilde{u}_k$ denota il minimo del funzionale $I_k : u_k + H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito da

$$I_k(w) = \int_\Omega \widetilde{L}_k(x, Dw)\, dx - \int_\Omega g_k w\, dx,$$

allora $\tilde{u}_k$ è una soluzione dell'equazione di Eulero associata, per cui, per argomenti standard di regolarità, $\tilde{u}_k \in C^2(\overline{\Omega})$. Allora $\tilde{u}_k$ soddisfa l'identità PPS per $\widetilde{L}_k$.

Passo VI. Si dimostra che $(\tilde{u}_k)$ è limitata in $H^1_0(\Omega)$, quindi, a meno di sottosuccessioni, debolmente convergente a un certo $\tilde{u}$. Si deduce poi che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega D_i B_j D_{\xi_i} \widetilde{L}(x, D\tilde{u}_k) D_j \tilde{u}_k \, dx +$$

$$- \int_\Omega \left[(\operatorname{div} B)\, \widetilde{L}(x, D\tilde{u}_k) + B \cdot D_x \widetilde{L}(x, D\tilde{u}_k) \right] dx = \int_\Omega (B \cdot D\tilde{u}_k) g \, dx + o(1)\,,$$

$$\int_\Omega \widetilde{L}(x, D\tilde{u}_k)\, dx - \int_\Omega g \tilde{u}_k \, dx \leqslant \int_\Omega \widetilde{L}(x, Du)\, dx - \int_\Omega g u \, dx + o(1)$$

as $k \to \infty$. Per la convessità di $\widetilde{L}(x, \cdot)$ risulta allora

$$\int_\Omega \widetilde{L}(x, D\tilde{u})\, dx - \int_\Omega g \tilde{u} \, dx \leqslant \int_\Omega \widetilde{L}(x, Du)\, dx - \int_\Omega g u \, dx\,.$$

Poichè u è l'**unico** minimo di I, risulta $\tilde{u} = u$, cioè $(\tilde{u}_k)$ è debolmente convergente a u in $H_0^1(\Omega)$. Allora si ha

$$\lim_k \int_\Omega \widetilde{L}(x, D\tilde{u}_k)\, dx = \int_\Omega \widetilde{L}(x, Du)\, dx\,.$$

Passo VII. Tenendo conto della stretta convessità di $\widetilde{L}(x,\cdot)$, per risultati di A. Visintin (CPDE, 1984) si deduce che $\tilde{u}_k \to u$ fortemente in $H_0^1(\Omega)$.

Si deduce allora che

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}(x, D\tilde{u}_k) \to \widetilde{L}(x, Du) && \text{in } L^1(\Omega)\,,\\
&D_\xi\widetilde{L}(x, D\tilde{u}_k) \to D_\xi\widetilde{L}(x, Du) && \text{in } L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)\,,\\
&D_x\widetilde{L}(x, D\tilde{u}_k) \to D_x\widetilde{L}(x, Du) && \text{in } L^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\,.
\end{aligned}$$

Possiamo allora passare al limite per $k \to +\infty$ nell'identità PPS per u_k e ottenere l'identità per u!

Il caso non strettamente convesso

Teorema 6. *Sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *una soluzione debole localmente lipschitziana di* (P)*. Supponiamo che esistano* $\alpha : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty[$, $\gamma : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1 *e* $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *convessa e* C^1 *con*

$$L(x, s, \xi) = \alpha(x, s)\beta(\xi) + \gamma(x, s).$$

Allora l'identità vale per ogni $B \in C^1_c(\Omega; \mathbb{R}^n)$*.*

Teorema 7. *Supponiamo che* $L(x, s, \cdot)$ *sia convessa. Sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *una soluzione debole localmente lipschitziana di* (P)*. Sia inoltre* $n = 1$*.*

Allora l'identità vale per ogni $B \in C^1_c(\Omega)$*.*

Soluzioni di minima energia e valori di PdM

Applicazione (non banale) dell'identità PPS:

Teorema 8. *Sia $\alpha > 0$. Allora, sotto opportune ipotesi su L, l'equazione*

$$-\operatorname{div}\,\{D_\xi L(u, Du)\} + D_s L(u, Du) + \alpha u^{p-1} = f(u) \quad \textit{in } \mathbb{R}^N \qquad (P)$$

ammette una soluzione di minima energia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ossia

$$I(u) = \inf \big\{ I(w) : \ w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ è una soluzione di } (P) \big\},$$

dove I è il funzionale associato a (P). Inoltre, $I(u) = c$, dove

$$c = \inf_{\gamma \in \mathscr{P}} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} I(\gamma(t)), \ \ \mathscr{P} = \{\gamma : [0,1] \to W^{1,p} : \ \gamma(0) = 0, \ I(\gamma(1)) < 0\},$$

ossia u è al livello di Passo di Montagna.

The multi-peak case for degenerate problems

M. Del Pino, P. Felmer, *Ann. IHP.* **15** (1998), 127–149.

Siano ora $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ k sottoinsiemi compatti di Ω e $x_i \in \Lambda_i$ tali che

$$V(x_i) = \min_{\Lambda_i} V < \min_{\partial \Lambda_i} V, \quad i = 1, \dots, k. \tag{1}$$

Poniamo per ogni $i = 1, \dots, k$

$$\mathscr{M}_i := \left\{ x \in \Lambda_i : \; V(x) = V(x_i) \right\}.$$

Siano $1 < p < N$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ e sia $W_V(\Omega)$ lo spazio di Banach pesato

$$W_V(\Omega) := \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \; \int_\Omega V(x)|u|^p < +\infty \right\}$$

dotato della norma naturale $\|u\|_{W_V}^p := \int_\Omega |Du|^p + \int_\Omega V(x)|u|^p$. Per ogni $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$, denotiamo la distanza con $\mathrm{dist}(A, B)$.

Teorema 9. *Siano $1 < p \leqslant 2$ e $p < q < p^*$. Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, esistono u_ε in $W_V(\Omega) \cap C^{1,\beta}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e k punti $x_{\varepsilon,i} \in \Lambda_i$ che soddisfano le seguenti proprietà:*

(a) *u_ε è una soluzione debole del problema*

$$\begin{cases} -\varepsilon^p \Delta_p u + V(x)u^{p-1} = u^{q-1} & \textit{in } \Omega \\ u > 0 & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{on } \partial\Omega; \end{cases}$$

(b) *esistono $\sigma, \sigma' \in]0, +\infty[$ tali che per ogni $i = 1, \dots, k$ si ha*

$$u_\varepsilon(x_{\varepsilon,i}) = \sup_{\Lambda_i} u_\varepsilon, \quad \sigma < u_\varepsilon(x_{\varepsilon,i}) < \sigma', \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{dist}(x_{\varepsilon,i}, \mathscr{M}_i) = 0.$$

(c) *per ogni* $r < \min\{\mathrm{dist}(\mathscr{M}_i, \mathscr{M}_j) : \ i \neq j\}$ *si ha*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_r(x_{\varepsilon,i})\right)} = 0\,;$$

(d) *risulta*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{W_V} = 0.$$

Inoltre, se $k = 1$ *le affermazioni valgono per ogni* $1 < p < N$*.*

Siano $1 < p < N$, $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ ed esistano $p < q < p^*$ e $p < \vartheta \leqslant q$ tali che

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 0, \qquad \lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s^{q-1}} = 0,$$

$$0 < \vartheta F(s) \leqslant f(s)s \quad \text{for } s \geqslant 0,$$

dove $F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ per ogni $s \in \mathbb{R}^+$.

La funzione $j(x,s,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è continua in x e di classe C^1 rispetto a s e ξ, la funzione $\{\xi \mapsto j(x,s,\xi)\}$ è strettamente convessa e $p-$omogenea ed esistono due costanti c_1, c_2 con

$$|j_s(x,s,\xi)| \leqslant c_1|\xi|^p, \quad |j_\xi(x,s,\xi)| \leqslant c_2|\xi|^{p-1}$$

per q.o. $x \in \Omega$ ed ogni $s \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ (j_s e j_ξ denotano rispettivamente le derivate di j rispetto a s e ξ rispettivamante). Siano $R > 0$, $\nu > 0$ e $0 < \gamma < \vartheta - p$ tali che

$$j(x,s,\xi) \geqslant \nu|\xi|^p, \quad j_s(x,s,\xi)s \leqslant \gamma j(x,s,\xi)$$

q.o. in Ω, per ogni $s \in \mathbb{R}^+$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$, e

$$j_s(x,s,\xi) \geqslant 0 \quad \text{for every } s \geqslant R$$

q.o. in Ω e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$. Per ogni fissato $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, l'equazione limite

$$-\mathrm{div}\,(j_\xi(\bar{x}, u, Du)) + j_s(\bar{x}, u, Du) + V(\bar{x})u^{p-1} = f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

ammette un'unica soluzione positiva (a meno di traslazioni). Infine, supponiamo

$$j(x_i, s, \xi) = \min_{x \in \Lambda_i} j(x, s, \xi), \quad i = 1, \dots, k, \quad s \in \mathbb{R}^+,\ \xi \in \mathbb{R}^N$$

Teorema 10. *Esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, esistono u_ε in $W_V(\Omega) \cap C^{1,\beta}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e k punti $x_{\varepsilon,i} \in \Lambda_i$ che soddisfano le seguenti proprietà.*

(a) *u_ε è una soluzione del problema*

$$\begin{cases} -\varepsilon^p \mathrm{div}\,(j_\xi(x, u, Du)) + \varepsilon^p j_s(x, u, Du) + V(x)u^{p-1} = f(u) & \textit{in } \Omega \\ u > 0 & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{on } \partial\Omega\,; \end{cases}$$

(b) *esistono* $\sigma, \sigma' \in]0, +\infty[$ *tali che per ogni* $i = 1, \dots, k$ *si ha*

$$u_\varepsilon(x_{\varepsilon,i}) = \sup_{\Lambda_i} u_\varepsilon, \quad \sigma < u_\varepsilon(x_{\varepsilon,i}) < \sigma', \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{dist}(x_{\varepsilon,i}, \mathscr{M}_i) = 0;$$

(c) *per ogni* $r < \min\{\mathrm{dist}(\mathscr{M}_i, \mathscr{M}_j) : \; i \neq j\}$ *si ha*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_r(x_{\varepsilon,i})\right)} = 0\,;$$

(d) *risulta* $\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{W_V} = 0.$

A. Giacomini, M. Squassina, Multi–peak solutions for a class of degenerate elliptic equations, *Preprint*.

Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione C^1-Carathéodory con $F(x, \cdot)$ convessa e sia $1 < p < \infty$. Supponiamo che esistano $a_0 \in L^1(\Omega)$, $a_1 \in L^{p'}(\Omega)$ e $b, d > 0$ tali che

$$d|\xi|^p - a_0(x) \leqslant F(x, \xi) \leqslant a_0(x) + b|\xi|^p \,,$$

$$|D_\xi F(x, \xi)| \leqslant a_1(x) + b|\xi|^{p-1} \,.$$

Sia $w_k \rightharpoonup w$ in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ con

$$\int_\Omega F(x, w_k)\, dx \to \int_\Omega F(x, w)\, dx \,.$$

Allora

$$F(x, w_k) \rightharpoonup F(x, w) \quad \text{in } L^1(\Omega) \,,$$
$$D_\xi F(x, w_k) \to D_\xi F(x, w) \quad \text{in } L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^N) \,.$$

Inoltre, a meno di una sottosuccessione, $|w_k|^p \leqslant \psi$ per qualche $\psi \in L^1(\Omega)$.