Sull'equazione delle onde con smorzamento forte

Marco Squassina (Politecnico Milano) – Salò 2003

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio con bordo regolare $\partial\Omega$. Dato $\omega > 0$, consideriamo il seguente problema per $u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

$$
\begin{cases}
u_{tt} - \omega\Delta u_t - \Delta u + \phi(u) = f, \quad x \in \Omega,\, t > 0 \\
u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \\
u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \\
u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\, t \geq 0,
\end{cases}
\tag{P}
$$

dove $f \in H^{-1}(\Omega)$ è indipendente dal tempo e $\phi \in C(\mathbb{R})$ verifica:

$$
|\phi(r) - \phi(s)| \leq c|r - s|(1 + |r|^4 + |s|^4), \qquad \forall r, s \in \mathbb{R}.
$$

Supponiamo inoltre che ϕ ammetta una decomposizione

$$\phi = \phi_0 + \phi_1,$$

dove $\phi_0 \in C(\mathbb{R})$, $\phi_1 \in C(\mathbb{R})$ verifica

$$\begin{aligned}
&|\phi_0(r)| \leq c(1 + |r|^5), \qquad \forall r \in \mathbb{R}, \\
&\phi_0(r)r \geq 0, \qquad \forall r \in \mathbb{R}, \\
&|\phi_1(r)| \leq c(1 + |r|^\gamma), \qquad \gamma < 5,\ \forall r \in \mathbb{R}, \\
&\liminf_{|r|\to\infty} \frac{\phi_1(r)}{r} > -\alpha_1,
\end{aligned}$$

con α_1 primo autovalore di A. Si verifica facilmente che esiste $\alpha < \alpha_1$ tale che

$$\phi_1(r)r \geq -\alpha r^2 - c, \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

• **Caso sottocritico**, $\phi_0 = 0$:

P. Massat, Limiting behavior for strongly damped nonlinear wave equations, *J. Differential Equations* **48** (1983), 334–349.

V. Belleri, V. Pata, Attractors for semilinear strongly damped wave equation on $\mathbb{R}^3$, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **7** (2001), 719–735.

J.M. Ghidaglia, A. Marzocchi, Longtime behaviour of strongly damped wave equations, global attractors and their dimension, *SIAM J. Math. Anal.* **22** (1991), 879–895.

• **Caso critico**, $\phi_0 \neq 0$:

A.N. Carvalho, J.W. Cholewa, Local well posedness for strongly damped wave equations with critical nonlinearities, *Bull. Austral. Math. Soc.* **66** (2002), 443–463.

A.N. Carvalho, J.W. Cholewa, Attractors for strongly damped wave equations with critical nonlinearities, *Pacific J. Math.* **207** (2002), 287–310.

Setting funzionale e spazio delle fasi

Sia A l'operatore (strettamente) positivo su $L^2(\Omega)$ definito da

$$A = -\Delta \qquad \text{con dominio} \qquad \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Identificando $L^2(\Omega)$ con il suo spazio duale $L^2(\Omega)^*$, consideriamo la famiglia di spazi di Hilbert $\mathcal{D}(A^{s/2})$, $s \in \mathbb{R}$, dotati dei prodotti interni e delle norme

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}(A^{s/2})} = \langle A^{s/2} \cdot, A^{s/2} \cdot \rangle \qquad \text{and} \qquad \| \cdot \|_{\mathcal{D}(A^{s/2})} = \| A^{s/2} \cdot \|.$$

Come spazi delle fasi per il nostro problema, consideriamo, per ogni $s \in \mathbb{R}$, lo spazio prodotto

$$\mathcal{H}_s := \mathcal{D}(A^{(1+s)/2}) \times \mathcal{D}(A^{s/2}),$$

dotato dell'usuale prodotto interno.

Teorema 1. *Il problema P genera un semigruppo fortemente continuo $S(t)$ sullo spazio delle fasi $\mathcal{H}_0$.*

Dissipatività

Teorema 2. *Esistono* $c, c_0 \geq 0$ *e* $R_0 > 0$ *tali che: dato* $R \geq 0$, *esiste*

$$t_0 = t_0(R, \omega) = \frac{c_0 + c(1 + R^6)}{c_0 \Theta(\omega)}, \qquad \Theta(\omega) := \begin{cases} \omega, & \omega < 1 \\ \frac{1}{\omega}, & \omega \geq 1, \end{cases}$$

tale che, se

$$\|z_0\|_0 \leq R,$$

ne segue che

$$\|S(t) z_0\|_0 \leq R_0, \qquad \forall t \geq t_0.$$

Di conseguenza, l'insieme

$$\mathcal{B}_0 = \Big\{ z_0 \in \mathcal{H}_0 \, : \, \|S(t) z_0\|_0 \leq R_0 \Big\}$$

è un insieme limitato assorbente per $S(t)$ *su* $\mathcal{H}_0$.

- Commenti sui casi limite $\omega \to 0$ e $\omega \to \infty$.

Attrattore universale

Teorema 3. *Per ogni $\omega > 0$, il semigruppo $S(t)$ possiede un'attrattore universale connesso $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\omega) \subset \mathcal{H}_0$.*

Decomponiamo la soluzione u di P con dati iniziali $z_0 = (u_0, u_1) \in \mathcal{H}_0$ nella somma $u(t) = v(t) + w(t)$, dove v e w sono le soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} v_{tt} + \omega A v_t + A v + \phi_0(v) = 0 \\ v(0) = u_0 \\ v_t(0) = u_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt} + \omega A w_t + A w + \phi(u) - \phi_0(v) = f \\ w(0) = 0 \\ w_t(0) = 0. \end{cases}$$

Denotiamo $z(t) = (u(t), u_t(t))$, $z_d(t) = (v(t), v_t(t))$, $z_c(t) = (w(t), w_t(t))$.

Due risultati preliminari

L'esistenza dell'attrattore $\mathcal{A}(\omega)$ discende dai due risultati seguenti:

• Dato $R \geq 0$, esistono $M_0 = M_0(R) \geq 0$ e $\nu_0 = \nu_0(R) > 0$ tali che, se $\|z_0\|_0 \leq R$, ne segue che

$$\|z_d(t)\|_0 \leq M_0 e^{-\nu_0 \Theta(\omega) t}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

Le costanti M_0 e ν_0 dipendono in modo crescente e decrescente (risp.) da R.

• Per ogni tempo $T \in \mathbb{R}^+$ e ogni $\omega > 0$, esiste un insieme compatto $\mathcal{K}_{T,\omega} \subset \mathcal{H}_0$ tale che

$$\bigcup_{z_0 \in \mathcal{B}_0} z_c(t) \in \mathcal{K}_{T,\omega}, \qquad \forall t \in [0, T].$$

Osservazione: nel caso critico ($\phi_0 \neq 0$) non si riescono ad ottenere stime ottimali di regolarità dell'attrattore (di conseguenza non si riesce a provare l'esistenza di attrattori esponenziali).

Caso sottocritico: stime di regolarità

Supponiamo ora che $f \in L^2(\Omega)$, $\omega \geq \omega_0$ for some $\omega_0 > 0$ e

$$\begin{aligned} &\phi_0(r) = 0, \qquad \forall r \in \mathbb{R}, \\ &\phi_1 \in C^1(\mathbb{R}) \quad \text{with} \quad |\phi_1'(r)| \leq c(1 + |r|^{\gamma-1}), \qquad \forall r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sia $\sigma \in [0,1]$ e supponiamo che $\|z_0\|_\sigma \leq R_\sigma$, per $R_\sigma \geq 0$. Allora esistono

$$K_\sigma = K_\sigma(R_\sigma) \geq 0, \qquad \Lambda_\sigma = \Lambda_\sigma(R_\sigma) \geq 0, \qquad \mu_\sigma = \mu_\sigma(R_\sigma) \in [0,1)$$

tali che

$$\|z(t)\|_\sigma \leq K_\sigma, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

$$\omega \int_\tau^t \|A^{(1+\sigma)/2} u_t(y)\|^2 dy \leq \Lambda_\sigma\big(1 + (t-\tau)^{\mu_\sigma}\big), \qquad \forall t \geq \tau,\ \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Come conseguenza si dimostra che, se

$$s = s(\sigma) = \min\Big\{\frac{1}{4}, \frac{5-\gamma}{2}, 1-\sigma\Big\}, \tag{1}$$

dato $R_\sigma \geq 0$, esiste $R_{\sigma+s} = R_{\sigma+s}(R_\sigma)$ tale che, se $\|z_0\|_\sigma \leq R_\sigma$, ne segue che

$$\|z_c(t)\|_{\sigma+s} \leq R_{\sigma+s}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Partendo da $\sigma = 0$, esiste $\{\sigma_j\}_{j=0}^n$, con $n = n(\gamma)$, definita da

$$\sigma_0 = 0, \qquad \sigma_{j+1} = \sigma_j + s(\sigma_j), \qquad \sigma_n = 1.$$

Scegliendo R_0 come nel teorema di dissipazione, definiamo per ogni $j = 0, \dots, n$

$$\mathcal{B}_{\sigma_j} = \Big\{z_0 \in \mathcal{H}_{\sigma_j} : \|z_0\|_{\sigma_j} \leq R_{\sigma_j}\Big\},$$

dove $R_{\sigma_j} := R_{\sigma_j}(R_{\sigma_{j-1}})$. Allora, si dimostra che

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}_0}(S(t)\mathcal{B}_{\sigma_{j-1}}, \mathcal{B}_{\sigma_j}) \leq M_j e^{-\frac{\nu_0}{\omega}t}, \qquad \forall j = 1, \dots, n,$$

dove $M_j = M_0\big(\alpha_1^{(\sigma_{j-1})/2} R_{\sigma_{j-1}}\big)$. Allora, per applicazioni successive di un argomento di transitività dovuto a Miranville et al. esistono $M \geq 0$ e $\nu > 0$ con

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}_0}(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) \leq M e^{-\frac{\nu}{\omega}t}.$$

Ne segue che l'attrattore $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ di $\boldsymbol{S(t)}$ su $\boldsymbol{\mathcal{H}_0}$ è un compatto di $\boldsymbol{\mathcal{H}_1}$.

• Commenti sul fallimento della procedura di bootstrap nel caso critico.

Definizione 4. *Un'insieme compatto $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_0$ si dice attrattore esponenziale o insieme inerziale per il semigruppo $S(t)$ se valgono is seguenti fatti*

(i) *$\mathcal{E}$ è invariante per $S(t)$, cioè, $S(t)\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ per ogni $t \geq 0$;*

(ii) *$\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{E} < \infty$, cioè, $\mathcal{E}$ ha dimensione frattale finita;*

(iii) *esiste una funzione crescente $J : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $\kappa > 0$ tale che, per ogni insieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}_0$ con $\sup_{z_0 \in \mathcal{B}} \|z_0\|_0 \leq R$ risulta*

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}_0}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{E}) \leq J(R) e^{-\kappa t}.$$

Teorema 5. *Il semigruppo $S(t)$ che agisce su $\mathcal{H}_0$ possiede un attrattore esponenziale $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\omega)$. Inoltre*

(i) *$\mathcal{E}$ is bounded subset of $\mathcal{H}_1$, and the bound is independent of $\omega \geq \omega_0$;*

(ii) *the rate of exponential attraction is proportional to $1/\omega$;*

(iii) *$J(R)$ is independent of $\omega \geq \omega_0$;*

(iv) $\sup_{\omega \geq \omega_0} \left[\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{E}(\omega)\right] < \infty$.

- Commenti sui casi limite $\omega \to 0$ e $\omega \to \infty$.

V. Pata, M. Squassina, On the strongly damped wave equation, *preprint* (2003).