Esame di Ricerca Operativa - 24 febbraio 2010
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

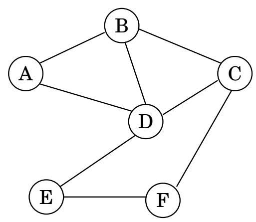
Problema 1 (2+2 punti):

Dato un grafo $G = (V, E)$ ed un nodo $v \in V$, si indica con $N(v)$ il vicinato (neighborhood") di v in G, ossia l'insieme di quei nodi che distano 1 da v in G (ossia collegati a v da un arco). Con $N[v] := N(v) \cup \{v\}$ si è soliti indicare in vicinato chiuso di v. (Anche v è parte del proprio vicinato chiuso $N[v]$).

Un Dominating Set in un grafo $G = (V, E)$ è un insieme di nodi $X \subseteq V$ tale che ogni nodo di G è in X o quantomeno in $N(x)$ per un qualche $x \in X$.

Quando ad ogni nodo v è associato un costo w_v, allora il costo di $X \subseteq V$ è espresso da $val(X) := \sum_{v \in X} w_v$.

Ad esempio, con riferimento al grafo G in figura, gli insiemi $\{A, C, E\}$ e $\{B, F\}$ sono due possibili Insiemi Dominanti entrambi di valore 7.



	A	B	C	D	E	F
Valore	2	3	2	4	3	4

Nelle applicazioni siamo solitamente interessati a trovare Insiemi Dominanti di costo il minimo possibile.

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un Insieme Dominante di costo minimo nel grafo G in figura.

Mostrare come sia più in generale possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un Insieme Dominante di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.

svolgimento.

Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = A, B, C, D, E, F$, con l'idea che 1 significa "nodo incluso nell'Insieme " e 0 significa "nodo non incluso nell'Insieme Dominante".

Volendo minimizzare il valore dell'Insieme Dominante, la funzione obbiettivo sarà:

$$\min 2\,x_A + 3\,x_B + 2\,x_C + 4\,x_D + 3\,x_E + 4\,x_F$$

ciascuno dei vincoli corrisponde poi ad uno dei nodi.

nodo A: $x_A + x_B + x_D \geq 1$;

nodo B: $x_A + x_B + x_D + x_C \geq 1$;

nodo C: $x_B + x_D + x_C + x_F \geq 1$;

nodo D: $x_A + x_B + x_D + x_D + x_E \geq 1$;

nodo E: $x_E + x_F + x_D \geq 1$;

nodo F: $x_F + x_E + x_C \geq 1$.

Nel caso di un grafo $G = (V, E)$ generico introduciamo una variabile $x_v \in \{0, 1\}$ per ogni nodo $v \in V$, con l'idea che 1 significa "nodo incluso nell'Insieme Dominante" e 0 significa "nodo non incluso nell'Insieme Dominante".

Otteniamo quindi la seguente formulazione PLI per il problema Min-Dominant-Set.

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} w_v \, x_v \, , \\ \sum_{u \in N[v]} x_u \geq 1 \text{ per ogni nodo } v \in V, \\ x_v \in \{0, 1\} \text{ per ogni nodo } v \in V. \end{aligned}$$

Qualora fosse richiesto di trovare un Insieme Dominante di minima cardinalità si ricadrà allora nella medesima formulazione posto $w \equiv 1$.

Problema 2 (4+1 punti):

La tua azienda vende cesti di frutta. Questo Natale, la disponibilità di materie prime è la seguente: 650 kg di arance, 150 kg di noci, 280 kg di banane e 70 kg di datteri. Per motivi di trasporto, ogni cesto pesa 500 grammi, ma la linea affermatasi negli anni prevede 4 categorie di cesto:

cesto	composizione	profitto (euro/cesto)
Sicilia	solo arance	260
VIP	non piú del 50% di arance almeno il 10% di datteri almeno il 15% di banane	400
Africa	solo banane	510
Exclusive	almeno il 30% di banane almeno il 20% di datteri almeno il 30% di noci	520

Supponendo che ogni cesto confezionato venga venduto, formulare come PL il problema della massimizzazione del profitto. Indicare poi dove l'eventuale aggiunta di qualche vincolo di interezza possa lievemente aumentare la precisione del modello.

svolgimento.

Il problema può essere formulato introducendo le seguenti variabili:

- x_{AS} = quantità di arance (in kg) utilizzate per produrre cesti di tipo Sicilia;
- x_{AV} = quantità di arance (in kg) utilizzate per produrre cesti di tipo VIP;
- x_{DV} = quantità di datteri (in kg) utilizzate per produrre cesti di tipo VIP;
- x_{NV} = quantità di noci (in kg) utilizzate per produrre cesti di tipo VIP;
- x_{BV} = quantità di banane (in kg) utilizzati per produrre cesti di tipo VIP;
- x_{BA} = quantità di banane (in kg) utilizzati per produrre cesti di tipo Africa;

- x_{AE} = quantità di arance (in kg) utilizzate per produrre cesti di tipo Exclusive;
- x_{DE} = quantità di datteri (in kg) utilizzate per produrre cesti di tipo Exclusive;
- x_{NE} = quantità di noci (in kg) utilizzate per produrre cesti di tipo Exclusive;
- x_{BE} = quantità di banane (in kg) utilizzati per produrre cesti di tipo Exclusive;
- y_S = numero di cesti di tipo Sicilia prodotte;
- y_V = numero di cesti di tipo VIP prodotte;
- y_A = numero di cesti di tipo Africa prodotte;
- y_E = numero di cesti di tipo Exclusive prodotte.

Stiamo supponendo per semplicità che le variabili y_i non siano vincolate ad essere intere. L'obiettivo é quello di massimizzare i ricavi sulla vendita dei quattro tipi di confezioni ossia

$$\max R \quad = \quad 260\, y_S + 400\, y_V + 510\, y_A + 520\, y_E\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$y_S, y_V, y_A, y_E, x_{AS}, x_{AV}, x_{DV}, x_{NV}, x_{BV}, x_{BA}, x_{AE}, x_{DE}, x_{NE}, x_{BE} \geq 0.$$

vincoli sulla composizione

$$\begin{aligned}
x_{AS} &= 0,5\, y_D \\
x_{AV} + x_{DV} + x_{BV} + x_{NV} &= 0,5\, y_V \\
x_{BA} &= 0,5\, y_A \\
x_{AE} + x_{DE} + x_{NE} + x_{BE} &= 0,5\, y_E \\
x_{AV} &\leq 0,25\, y_V \\
x_{DV} &\geq 0,05\, y_V \\
x_{BV} &\geq 0,075\, y_V \\
x_{DE} &\geq 0,1\, y_E \\
x_{NE} &\geq 0,15\, y_E \\
x_{BE} &\geq 0,15\, y_E
\end{aligned}$$

disponibilitá di materie prime

$$\begin{aligned}
x_{AS} + x_{AV} + x_{AE} &\leq 650 \\
x_{BA} + x_{BV} + x_{BE} &\leq 150 \\
x_{DV} + x_{DE} &\leq 280 \\
x_{NV} + x_{NE} &\leq 70
\end{aligned}$$

Ovviamente i vincoli di non negativitá $y_S, y_V, y_A, y_E \geq 0$ possono essere omessi. Introducendo il vincolo di interezza per le sole 4 variabili y_S, y_V, y_A e y_E otteniamo soluzioni intere ottime che possono essere messe in pratica senza arrotondamenti (con conseguente rischio di perdita di precisione nella soluzione del modello matematico intero).

Problema 3 (4 punti):

Trovare, nel seguente array di interi, un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **MINIMA**.

-13	6	-20	15	-25	39	-32	22	-24	33	-16	28	-7	15	-25	20	-7	8	-21	25	-13	17	-8	6	-6	5	-7

tipo intervallo	min sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi					
include ultimo					
include 9^o					
include 5^o e 10^o					
include 17^o					
include 14^o e 16^o					

svolgimento. Per lo svolgimento si seguono i soliti metodi (algoritmi). Riportiamo solamente le tabelle completamente compilate.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
-13	-7	-27	-12	-37	0	-32	-10	-34	-1	-17	0	-7	0	-25	-5	-12	-4	-25	0	-13	0	-8	-2	-8	-3	-10
-13	6	-20	15	-25	39	-32	22	-24	33	-16	28	-7	15	-25	20	-7	8	-21	25	-13	17	-8	6	-6	5	-7
-37	-24	-30	-10	-25	0	-34	-2	-24	0	-16	0	-17	10	-25	0	-20	-13	-21	0	-13	0	-10	-2	-8	-2	-7
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	min sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi	-37	1	5	-13	-25
include ultimo	-10	23	27	-8	-7
include 9^o	-34	7	9	-32	-24
include 5^o e 10^o	-15	1	11	-13	-16
include 17^o	-25	15	19	-25	-21
include 14^o e 16^o	-17	13	19	-7	-21

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

41	39	37	42	38	22	15	1	39	18	0	35	12	24	7	5	34	36	42	18	3	30	13	11	32

5.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(1pt) una sequenza è detta una S-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga S-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 34. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.4(1pt) una sequenza è detta una A-sequenza se su una prima parte è crescente e poi sempre decrescente. Trovare la più lunga A-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo le seguenti tabelle di programmazione dinamica.

DECRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
9	8	7	8	7	6	5	2	6	5	1	5	4	4	3	2	4	4	4	3	1	3	2	1	1
41	39	37	42	38	22	15	1	39	18	0	35	12	24	7	5	34	36	42	18	3	30	13	11	32
1	2	3	1	3	4	5	6	2	5	7	4	6	5	7	8	5	4	1	6	9	5	7	8	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

DECRESCENTE

e

DECRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
9	8	7	8	7	6	5	2	6	5	1	5	4	4	3	2	4	4	4	3	1	3	2	1	1
41	39	37	42	38	22	15	1	39	18	0	35	12	24	7	5	34	36	42	18	3	30	13	11	32
1	1	1	2	2	1	1	1	3	2	1	3	2	3	2	2	4	5	6	3	2	4	3	3	6
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

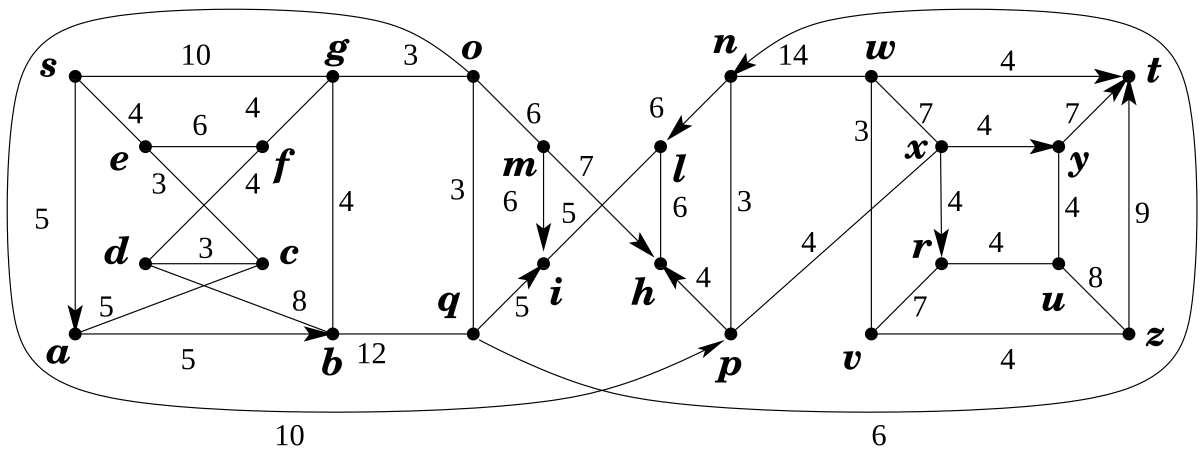
tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
decrescente	9	41, 39, 37, 22, 15, 12, 7, 5, 3
S-sequenza	12	41, 39, 37, 22, 15, 1, 0, 35, 24, 7, 5, 3
decrescente con 34	8	41, 39, 38, 35, 34, 18, 13, 11
A-sequenza	9	0, 12, 24, 34, 36, 42, 30, 13, 11

Problema 5 (4 punti):

5.1**(1+1pt)** Costruire un problema di PL il cui duale sia illimitato. Ricevi un ulteriore punto se il primale ha il minor numero di variabili possibili.

5.2**(1pt)** Costruire un problema di PL il cui duale abbia infinite soluzioni ottime e precisamente 3 soluzioni ottime di base.

5.3**(1pt)** Costruire un problema di PL in cui l'unica soluzione ottima sia degenere.



Problema 6 (15 punti):

Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.

6.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

6.2.**(3pt)** Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo.

6.3.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

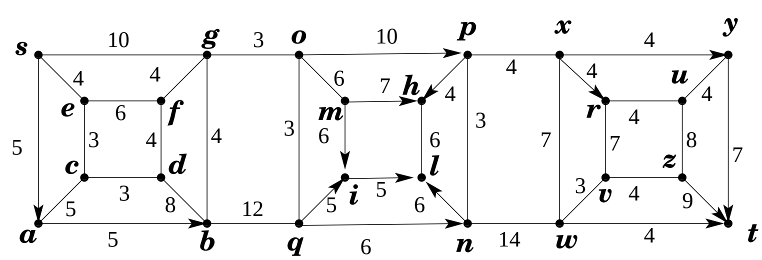
6.4.**(3pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.5.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

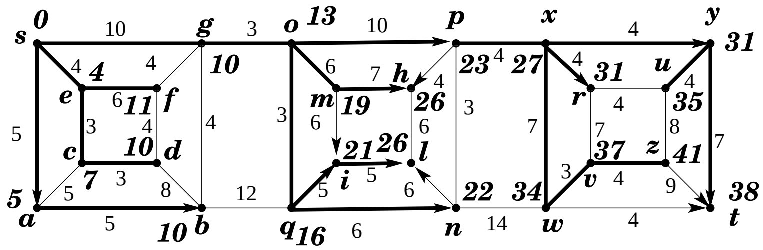
6.6.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

risposte.

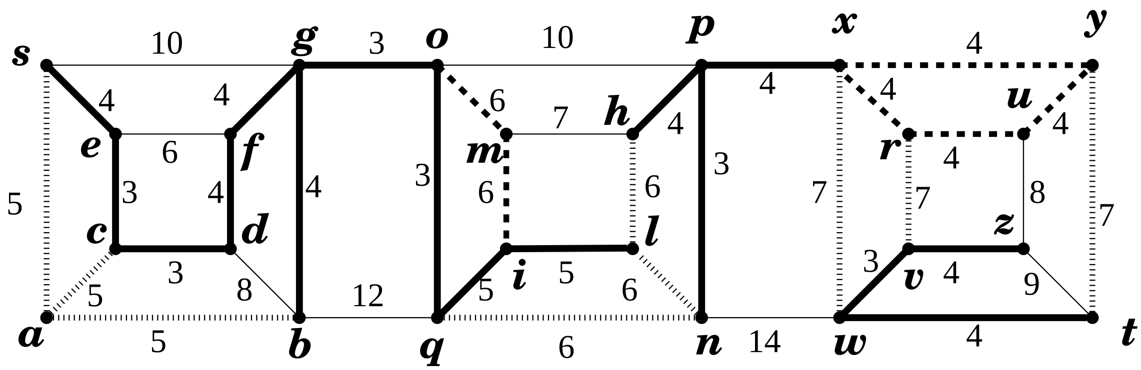
Il grafo è planare: un suo planar embedding è fornito in figura.



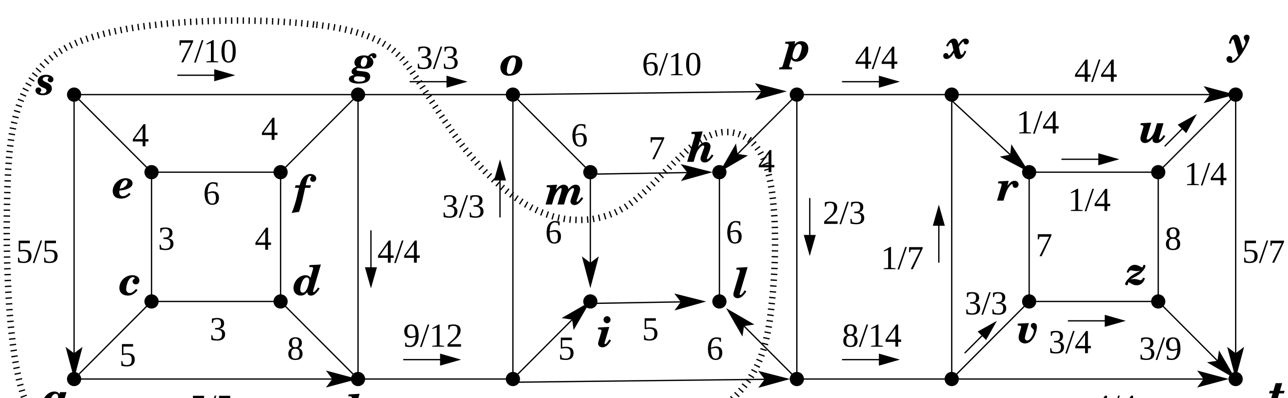
Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è riportato in figura.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 216$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 16 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 incidenti al nodo m (i 2 archi in linea tratteggiata), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi qn, nl, lh), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 4 in linea tratteggiata nella zona a destra, più uno qualsisiasi dei 3 tra archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.