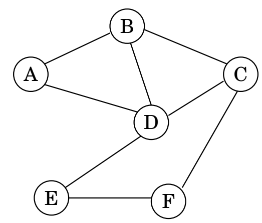
Esame di Ricerca Operativa - 10 settembre 2009
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (2+2 punti):

Un NODE-COVER in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme $X \subseteq V$ tale che ogni arco in E ha almeno un estremo in X.

Ad esempio, gli insiemi $\{B, D, F\}$ e $\{A, B, E, C\}$ sono due possibili node-covers per il grafo G in figura.



Nelle applicazioni siamo solitamente interessati a trovare node-covers fatti dal minor numero possibile di nodi.

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un minimo node-cover sul grafo G in figura.

Mostrare come sia più in generle possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un minimo node-cover su un grafo $G = (V, E)$ generico.

svolgimento.

Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = A, B, C, D, E, F$, con l'idea che 1 significa "nodo incluso nel node-cover" e 0 significa "nodo non incluso nel node-cover".

Volendo minimizzare la cardinalità del node-cover, la funzione obbiettivo sarà:

$$\min x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F$$

ciascuno dei vincoli corrisponde poi ad uno degli archi.

arco AB**:** $x_A + x_B \geq 1;$

arco AD**:** $x_A + x_D \geq 1;$

arco BD**:** $x_B + x_D \geq 1;$

arco BC**:** $x_B + x_C \geq 1;$

arco CF**:** $x_C + x_F \geq 1;$

arco DE**:** $x_D + x_E \geq 1;$

arco EF**:** $x_E + x_F \geq 1.$

Nel caso di un grafo $G = (V, E)$ generico introduciamo una variabile $x_v \in \{0, 1\}$ per ogni nodo $v \in V$, con l'idea che 1 significa "nodo incluso nel node-cover" e 0 significa "nodo non incluso nel node-cover".

Otteniamo quindi la seguente formulazione PLI per il problema NODE-COVER.

$$\min \sum_{v\in V}^{4} x_v \,,$$
$$x_u + x_v \geq 1 \text{ per ogni arco } uv \in E,$$
$$x_v \in \{0,1\} \text{ per ogni nodo } v \in V.$$

Problema 2 (4 punti):

L'azienda elettrica senese deve soddisfare il fabbisogno di tre centri abitati che richiedono giornalmente la seguente quantità di energia (in MW):

Murlo	Monticiano	S.Rocco a Pilli
150	80	210

I tre centri possono essere riforniti da due centrali C_1 e C_2, aventi capacità giornaliera di 130 e 310 MW rispettivamente. Trasportare corrente elettrica da una centrale a un centro costa come indicato nella seguente tabella (Euro/KW)

	Murlo	Monticiano	S.Rocco a Pilli
C_1	10	15	20
C_2	8	14	7

Formulare come PL il problema di minimizzare il costo di trasporto dell'energia ai centri abitati, nel caso in cui ogni linea elettrica abbia una capacità massima di 100 MW.

svolgimento.

Le variabili di decisione sono la quantità di energia da inviare, definite come da seguente tabella.

	Murlo	Monticiano	S.Rocco a Pilli
C_1	$w_{1,1}$	$w_{1,2}$	$w_{1,3}$
C_2	$w_{2,1}$	$w_{2,2}$	$w_{2,3}$

Il problema è quindi quello di minimizzare il costo totale del trasporto.

$$\min C \quad = \quad 10000\, w_{1,1} + 15000\, w_{1,2} + 20000\, w_{1,3} + 8000\, w_{2,1} + 14000\, w_{2,2} + 7000\, w_{2,3} \,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$w_{1,1}, w_{1,2}, w_{1,3}, w_{2,1}, w_{2,2}, w_{2,3} \geq 0.$$

vincoli di capacitá delle linee

$$w_{1,1}, w_{1,2}, w_{1,3}, w_{2,1}, w_{2,2}, w_{2,3} \leq 100.$$

vincoli sulla capacitá delle centrali

$$w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} \leq 130.$$
$$w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} \leq 310.$$

vincoli di fabbisogno energetico

$$w_{1,1} + w_{2,1} \geq 150.$$
$$w_{1,2} + w_{2,2} \geq 80.$$
$$w_{1,3} + w_{2,3} \geq 210.$$

Problema 3 (4 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P
peso	2	8	13	13	14	6	13	10	3	16	11	4	9	11
valore	11	39	63	63	60	33	30	36	13	66	60	20	37	48

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 26$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 33$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 22$?

svolgimento. Per lo svolgimento si segua la solita traccia. Riportiamo solamente i risultati finali.

B	max val	peso	quali prendere
36	187 = 60+20+33+11+63	36 = 11+4+6+2+13	M,N,F,A,D
26	137 = 60+20+33+11+13	26 = 11+4+6+2+3	M,N,F,A,I
33	169 = 60+33+13+63	33 = 11+6+3+13	M,F,I,D
22	117 = 60+33+11+13	22 = 11+6+2+3	M,F,A,I

Problema 4 (4 punti):

Il padre di Jasmine le ha chiesto di trovare, nel seguente array di interi, un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **massima**.

9	-7	23	-13	21	-39	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-18	7	-6	5	-3	7

Jasmine ha allora compilato la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
9	2			33	0	31	11		3	19	0	5			8	14	6	27	2	15	0	7	1			10
9	-7	23	-13	21	-39	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-18	7	-6	5	-3	7
33	24			21	0		3		0	16	0	20			0	19	13	21	0			10	3			7
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi					
include primo		1			
include 9^o					
include 5^o e 10^o					
include 17^o					
include 14^o e 16^o					

Tuttavia il topino Aladino ha rosicchiato parti delle tabelle. Aiuta Jasmine a ricostruirle, senza dimenticare le risposte!

svolgimento. Per lo svolgimento si seguono i soliti metodi (algoritmi). Riportiamo solamente le tabelle completamente compilate.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
9	2	25	12	33	0	31	11	34	3	19	0	5	0	30	8	14	6	27	2	15	0	7	1	6	3	10
9	-7	23	-13	21	-39	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-18	7	-6	5	-3	7
33	24	31	8	21	0	34	3	23	0	16	0	20	15	30	0	19	13	21	0	13	0	10	3	9	4	7
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi	34	7	9	31	23
include primo	33	1	5	9	21
include 9^o	19	7	11	31	16
include 5^o e 10^o	13	1	11	9	16
include 17^o	27	15	19	30	21
include 14^o e 16^o	17	13	19	5	21

Problema 5 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

25	18	20	15	19	35	42	66	18	39	67	22	45	33	60	62	23	21	15	39	64	27	44	56	25

5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 23. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
7	8	7	8	7	6	5	2	6	5	1	5	4	4	3	2	4	4	4	3	1	3	2	1	1
25	18	20	15	19	35	42	66	18	39	67	22	45	33	60	62	23	21	15	39	64	27	44	56	25
1	1	2	1	2	3	4	5	2	4	6	3	5	4	6	7	4	4	2	5	8	5	6	7	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	8	18, 20, 35, 42, 45, 60, 62, 64
Z-sequenza	11	18, 20, 35, 42, 66, 67, 22, 33, 60, 62, 64
crescente con 23	7	15, 18, 22, 23, 39, 44, 56

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza oppure la più lunga V-sequenza (si veda il tema precedente per le definizioni)?

Provare per esercizio a determinare la più lunga V-sequenza.

Problema 6 (6 punti):

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 14$ del seguente problema.

$$\max \; x_1 + 6x_2 + C_3x_3 + 19x_4 + 10x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 36 \\ x_3 + x_4 \leq 10 \\ x_5 + x_6 \leq 14 \\ x_1 + x_3 + x_5 \leq 20 \\ x_2 + x_4 + x_6 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

1.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

1.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

1.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

1.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

1.5.**(2pt)** Per quali valori dei parametri C_3 e C_6 la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (6) + (5) + (0) + (10) + (14) + (0) = 35 \leq 36 \\ (0) + (10) = \mathbf{10} \leq 10 \\ (14) + (0) = \mathbf{14} \leq 14 \\ (6) + (0) + (14) = \mathbf{20} \leq 19 \\ (5) + (10) + (0) = \mathbf{15} \leq 15 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min \ 12\,y_1 + 10\,y_2 + 14\,y_3 + 20\,y_4 + 15\,y_5$$
$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq 1 \\ y_1 + y_5 \geq 6 \\ y_1 + y_2 + y_4 \geq C_3 \\ y_1 + y_2 + y_5 \geq 19 \\ y_1 + y_3 + y_4 \geq 10 \\ y_1 + y_3 + y_5 \geq C_6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

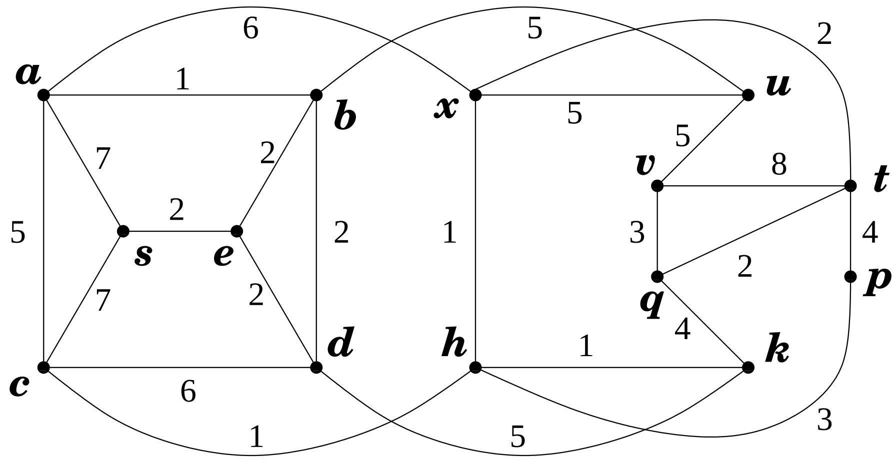
Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1,2,4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} + y_4 = 1 \\ + y_5 = 6 \\ y_2 + y_5 = 19 \\ y_3 + y_4 = 10 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 13, 9, 1, 6)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6).

La soluzione primale assegnata sarà ottina se e solo se la soluzione duale ad essa complementare soddisfa tutti i vincoli, ed in particolare anche i vincoli 3 e 6, ossia se vale che $y_2 + y_4 = 14 \geq C_3$ (terzo vincolo) e $y_3 + y_5 = 15 \geq C_6$ (sesto vincolo). Possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima se e solo se** $C_3 \leq 14$ e $C_6 \leq 15$.

Problema 7 (16 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

5.2.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.3.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.4.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo.

5.5.**(2pt)** Dire, per ogni arco del grafo, se esso possa essere rimosso senza allontanare alcun nodo dal nodo s.

5.6.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

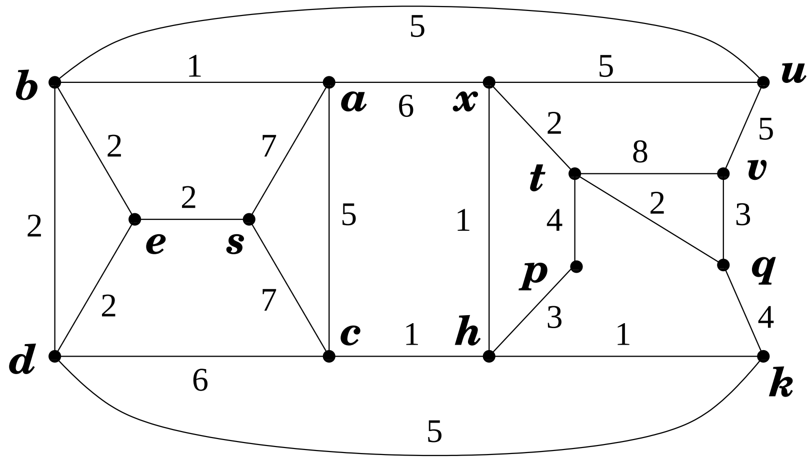
5.7.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

5.8.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è bipartito oppure no.

5.9.**(2pt)** Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di nodi la cui rimozione rende il grafo bipartito.

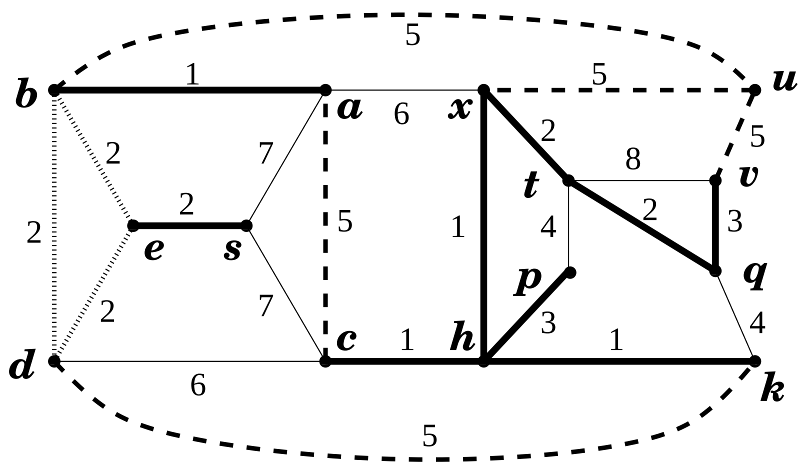
5.10.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto aggiungendo l'arco di estremi v e p è planare oppure no.

risposte.
Il fatto che G sia planare è messo in evidenza dal planar embedding fornito in figura.

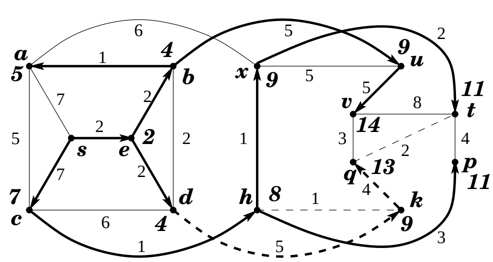


Per la ricerca di alberi ricoprenti di peso minimo e di flussi massimi converrà lavorare sul planar embedding.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 24 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 9 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 2 ed in linea sfumata spessa (3 scelte possibili), più 2 dei 5 archi di peso 5 ed in linea tratteggiata scelti in modo qualsiasi evitando però di prendere sia l'arco uv che l'arco ux ed evitando altresì di prendere sia l'arco ac che l'arco dk ($10 - 2 = 8$ scelte possibili). Equivalentemente, i 2 dei 5 archi di peso 5 ed in linea tratteggiata vanno scelti in modo da prendere almeno un arco tra dk, ac, bu (ossia del taglio $\delta(\{a, b, d, e, s\})$ ed almeno un arco tra uv, ux, bu (ossia del taglio $\delta(u)$).

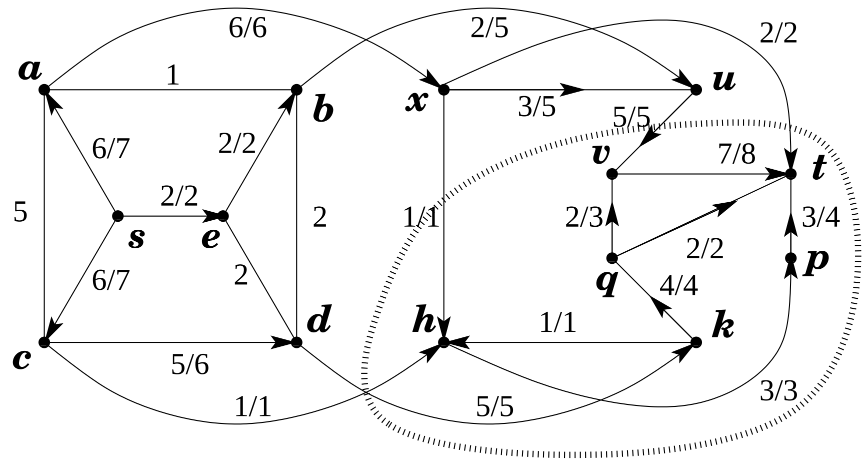


Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è rappresentato in figura dagli archi in linea spessa (sia tratteggiata che continua).



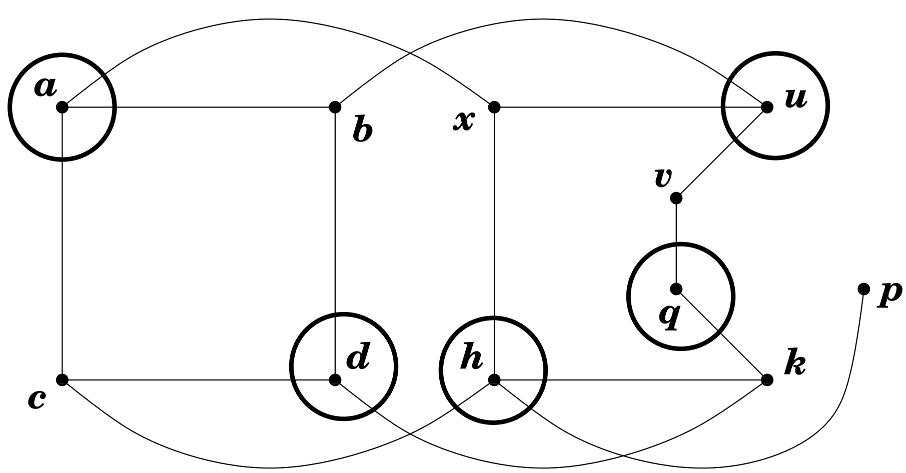
Ovviamente ogni arco del grafo non contenuto nell'albero dei cammini minimi (ossia ogni arco in linea non spessa) può essere rimosso senza allontanare alcun nodo dal nodo s. Inoltre, anche i due archi in linea spessa ma tratteggiata possono essere rimossi poichè sostituibili con altri archi (sempre in linea tratteggiata).

La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.

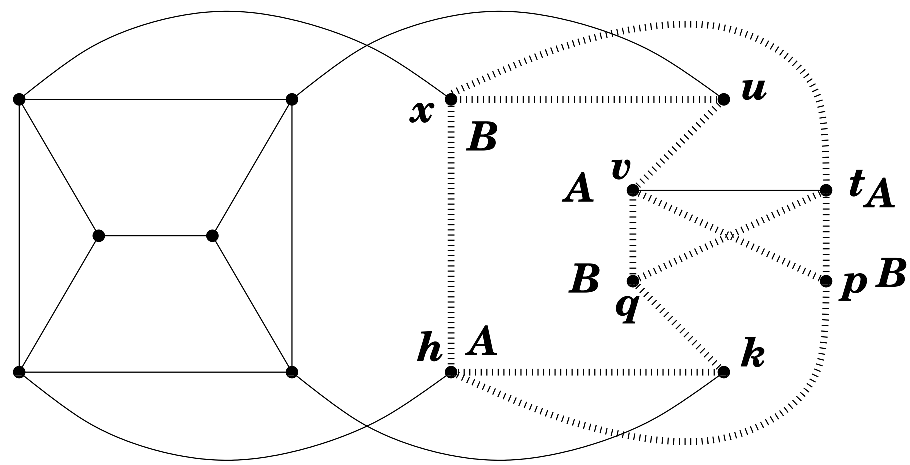


Il flusso ha valore 14 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 5 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 14 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto. (Sia il flusso che il taglio sarebbero stati più immediati a vedersi e verificarsi nel planar embedding. Puoi provare a rappresentarteli lì).

Il grafo non è bipartito poiché contiene circuiti dispari quali ad esempio il triangolo t, v, q. Di fatto il grafo contiene 3 triangoli senza nodi in comune: il triangolo t, v, q, il triangolo b, e, d, e il triangolo s, a, c. Pertanto non è possibile rendere il grafo bipartito senza rimuovere almeno 3 nodi. E si noti che con la rimozione dei 3 nodi e, s e t il grafo risulta bipartito come certificato dalla 2-colorazione dei suoi nodi esibita in figura.



Il fatto che $G + vp$ non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di $K_{3,3}$ in figura.


x
B
u
A
v
t
A
B
q
p
B
h
A
k