

Esame di Ricerca Operativa - 24 settembre 2008

Facoltà di Ingegneria - Udine

- CORREZIONE -

Problema 1 (5 punti):

Un'industria dolciaria produce tre tipi di tavole di cioccolato T_1 , T_2 e T_3 . Per la produzione di T_1 , T_2 e T_3 vengono utilizzate 4 possibili farine di cacao C_1 , C_2 , C_3 e C_4 . Riportiamo in tabella le quantità (in chili) dei vari tipi di cacao che devono essere impiegate per produrre un chilo di T_1 , T_2 e T_3 .

	C_1	C_2	C_3	C_4
T_1	0,5	0,3	0,2	0
T_2	0	0,6	0,2	0,2
T_3	0,1	0,3	0,3	0,3

Per il prossimo periodo produttivo ci siamo impegnati a produrre almeno 600, 1000 e 17000 chili di T_1 , T_2 e T_3 rispettivamente. In un'ultima tabella riportiamo infine i ricavi sulla vendita dei tre prodotti (euro/chilo).

prodotto	T_1	T_2	T_3
ricavo	90	60	35

Sapendo che sono disponibili in totale 2200 chili di cacao C_1 , e 7000 chili dei cacao C_2 , C_3 e C_4 formulare come problema di Programmazione Lineare il problema di massimizzare il profitto nel prossimo periodo produttivo.

svolgimento.

Per $i = 1, 2, 3$, denotiamo con x_i la quantità (in chili) di prodotto T_i . L'obiettivo é quello di massimizzare i ricavi sulla vendita dei tre prodotti ossia

$$\max R = 90x_1 + 60x_2 + 35x_3,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negatività

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

vincoli produzione minima

$$x_1 \geq 600, \quad x_2 \geq 1000, \quad x_3 \geq 17000.$$

disponibilità di materie prime

$$\begin{aligned} 0,5x_1 & & + 0,1x_3 & \leq 2200, \\ 0,3x_1 & + 0,6x_2 & + 0,3x_3 & \leq 7000. \\ 0,2x_1 & + 0,2x_2 & + 0,3x_3 & \leq 7000. \\ & + 0,2x_2 & + 0,3x_3 & \leq 7000. \end{aligned}$$

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B .

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	5	51	17	4	27	22	29	23	9	47	48	25	5	15	22	24	13	13	17
valore	5	63	17	4	5	22	7	5	9	99	64	7	5	15	4	24	13	13	5

2.1 (1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 26$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 33$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 22$?

svolgimento. Dapprima ordino gli oggetti forniti in input per peso crescente, e mi sbarazzo degli oggetti il cui peso eccede 36, ottenendo:

nome	D	O	A	I	S	T	P	U	C	H	F	Q	N	R	G	E
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	17	20	22	22	25	24	27	28
valore	4	5	5	9	13	13	15	5	17	5	22	4	7	24	11	15

Si noti che per la maggior parte degli elementi il valore coincide con il peso. È facile convincersi con opportuni ragionamenti che in una soluzione ottima è sempre possibile rinunciare ai rimanenti elementi, dove il valore è di molto inferiore al peso. Ad esempio, non potrà mai prendere in una soluzione due elementi entrambi di peso almeno 17, visto che U e C esauriscono da soli la capacità dello zaino (non posso aggiungere nemmeno l'elemento più leggero D) totalizzando solo 22 mentre D , P e C raccolgono più valore con lo stesso ingombro. E quindi posso sempre preferire di prendere C piuttosto che non U , o H , o N , o G , o E . Analogamente, posso rinunciare sempre a Q visto che eventualmente lo posso sostituire con F (nessuna soluzione li può contenere entrambi). Con questo ho ridotto i miei candidati ai seguenti:

nome	D	O	A	I	S	T	P	C	F	R
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24

Poichè ora il peso coincide col valore, posso limitarmi a lavorare solo con i pesi, e così compilo la tabella di programmazione dinamica riportata all'ultima pagina del presente documento.

Sulla base di tale tabella, possiamo fornire le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
36	36=13+9+5+5+4	36=13+9+5+5+4	S,I,A,O,D
26	26=17+5+4	26=17+5+4	S,I,D
33	33=15+9+5+4	33=15+9+5+4	P,I,A,D
22	22=17+5	22=17+5	S,A,D

Problema 3 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

5	-1	4	-5	7	-18	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-51	21	-13	24	-19	25
---	----	---	----	---	-----	----	-----	----	-----	----	-----	---	-----	----	-----	---	----	----	-----	----	-----	----	-----	----	-----	----

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di partire dal primo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 18-esimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere sia il 14-esimo che il 16-esimo elemento?

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←
5	4	8	3	10	0	31	11	34	3	19	0	5	0	30	8	14	6	27	2	15	0	21	8	32	13	38
5	-1	4	-5	7	-18	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-51	21	-13	24	-19	25
26	21	22	18	23	16	34	3	23	0	16	0	20	15	30	0	19	13	21	0	13	0	38	17	30	6	25
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.
qualsiasi	38	23	27
include primo	26	1	9
include 18-esimo	27	15	19
include 14-esimo e 16-esimo	17	13	19

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

10	15	17	11	13	30	37	61	14	34	60	18	41	28	53	55	19	16	12	34	20	23	38	48	21
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.4(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 41. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Per poter rispondere alle prime 3 domande compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE																								
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	
9	7	6	8	7	5	4	1	6	4	1	5	3	4	2	1	4	4	4	1	4	3	2	1	1
10	15	17	11	13	30	37	61	14	34	60	18	41	28	53	55	19	16	12	34	20	23	38	48	21
1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1	3	2	3	2	2	4	5	6	3	4	4	3	3	4
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

DECRESCENTE

Infine, per rispondere all'ultima domanda, computo partendo da destra un'ulteriore sequenza di valori come riportati in neretto nella seguente tabella.

CRESCENTE																								
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
9	7	6	8	7	5	4	1	6	4	1	5	3	4	2	1	4	4	4	1	4	3	2	1	1
10	15	17	11	13	30	37	61	14	34	60	18	41	28	53	55	19	16	12	34	20	23	38	48	21
1	2	3	2	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6	7	8	6	5	3	7	7	7	8	9	7
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

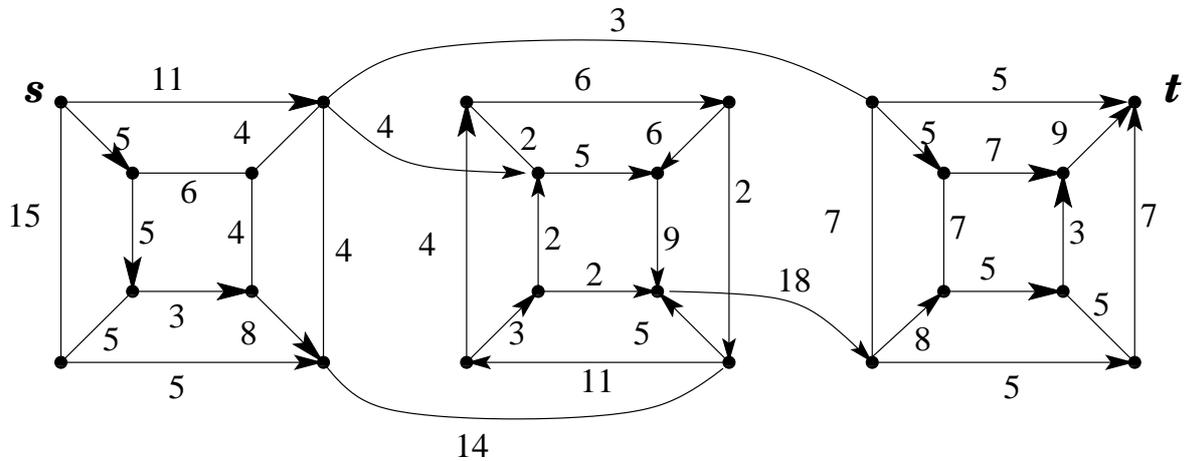
tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	9	10, 11, 13, 14, 18, 28, 34, 38, 48
decrecente	6	60, 41, 28, 19, 16, 12
V-sequenza	10	60, 41, 28, 19, 16, 12, 20, 23, 38, 48
crescente con 41	8	10, 11, 13, 14, 18, 41, 53, 55

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga A-sequenza? (Una sequenza è detta una A-sequenza se cresce fino ad un certo punto, e da lì in poi cala sempre.)

Problema 5 (15 punti):

Si consideri il grafo G , con pesi sugli archi, riportato in figura.

- 5.1.(2pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.
- 5.2.(1pt) Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito fornendo i certificati del caso.
- 5.3.(3pt) Trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 5.4.(3pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

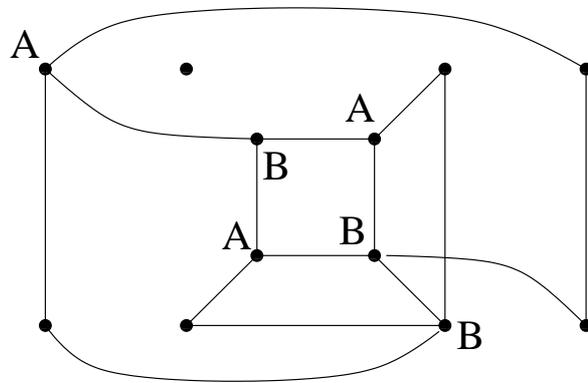


5.5.(3pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .

5.6.(3pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

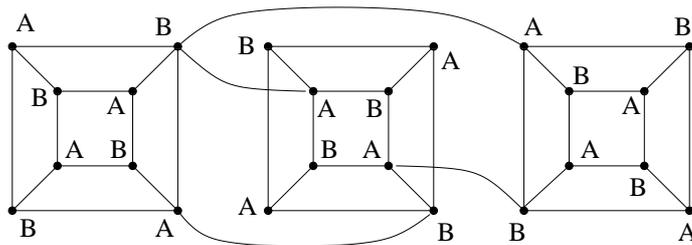
risposte.

Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo il sottografo di G riportato in figura.



Il verificatore dovrà solo controllare che tale sottografo di G è una suddivisione di $K_{3,3}$.

Il fatto che G sia bipartito può essere messo in evidenza esibendo la 2-colorazione in figura.



Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 42, 27, 3, 18)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 1 e 4).

Poichè la semplice verifica (per sostituzione) ha esito affermativo, possiamo concludere che la soluzione primale assegnata è **ottima**.

TABELLA DI PROGRAMMAZIONE DINAMICA PER IL PROBLEMA DELLO ZAINO

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36		
<i>D</i> (4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>O</i> (5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>A</i> (5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>I</i> (9)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>S</i> (13)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>T</i> (13)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>P</i> (15)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>C</i> (17)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>F</i> (22)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>R</i> (24)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	D	O	A	I	S	T	P	C	F	R
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24