Esame di Ricerca Operativa - 6 settembre 2007
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

Un'azienda di trasporto pubblico ha a disposizione un budget di 150 Keuro (150 mila euro) per pubblicizzare una sua iniziativa attraverso televisione e carta stampata. Un annuncio sui giornali costa 1 Keuro; si possono fare al massimo 30 annunci di questo tipo. Uno spot televisivo costa 10 Keuro; si possono fare al più 15 spot in totale (fino ad esaurimento del budget). Il numero di nuovi utenti che si possono raggiungere con i due media decresce con il numero di annunci, con la seguente regola:

tipo	fascia	nuovi contatti
giornali	1-10	900
	11-20	600
	21-30	300
televisione	1-5	10000
	6-10	5000
	11-20	2000

Per esempio, decidendo di fare 12 annunci sui giornali e 8 spot televisivi si raggiungono 75.200 nuovi utenti (9000+1200 giornali; 50.000+15.000 televisione), con una spesa complessiva di 12 + 80 = 92 Keuro.

Si vuole massimizzare il numero di contatti, rispettando il budget complessivo di 150 Keuro.

Si formuli il problema mediante un modello di programmazione lineare intera.

svolgimento.

Siano g_1, g_2, g_3 e t_1, t_2, t_3 il numero di annunci da effettuare, rispettivamente, sui giornali e per televisione nelle varie fasce. Un possibile modello è il seguente:

L'obiettivo è quello di raggiungere il maggior numero di nuovi utenti:

$$\max\ 900\, g_1 + 600\, g_2 + 300\, g_3 + 10.000\, t_1 + 5000\, t_2 + 2000\, t_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

budget

$$g_1 + g_2 + g_3 + 10\, t_1 + 10\, t_2 + 10\, t_3 \leq 150$$

capienza fasce giornali

$$0 \leq g_i \leq 10 \ \text{ variabili intere, } i = 1, 2, 3$$

capienza fasce TV

$$0 \leq t_i \leq 5 \ \text{ variabili intere, } i = 1, 2, 3\,.$$

A prima vista può sembrare che il modello non sia completo, in quanto mancano vincoli che impongano l'attivazione di una fascia solo quando le precedenti sono state saturate. Per esempio, il modello considera ammissibile la soluzione $g_1 = 8$, $g_2 = 3$, $g_3 = 0$, $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. Tuttavia una tale incongruenza non può capitare in corrispondenza della soluzione ottima in quanto la soluzione alternativa $g_1 = 10$, $g_2 = 1$, $g_3 = 0$, $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ ha lo stesso costo ma consente un maggior numero di contatti. Questo garantisce che la soluzione *ottima* del modello proposto sopra utilizzerà le varie fasce in modo congruente.

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 30$. Trovare un sottoinsieme dei seguenti elementi la cui somma, soggetta al vincolo di non eccedere B, sia massima

$$4, 21, 52, 11, 17, 21, 17, 21, 4, 27, 54, 6, 27, 28, 48, 6, 8, 21, 52$$

2.1(1pt) quale è il valore della somma minima? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 24$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 26$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

Dapprima ordino i valori forniti in input ottenendo:

$$4, 4, 6, 6, 8, 11, 17, 17, 21, 21, 21, 27, 28, 48, 52, 54\,.$$

Poi mi sbarazzo degli ultimi 3 elementi visto che sono maggiori di 30. A questo punto compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

	decine	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
	unità	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
{ }		●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{4}	ins 4	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{4, 4}	ins 4	●	·	·	·	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{4, 4, 6}	ins 6	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{· · ·}	ins 6	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{· · ·}	ins 8	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	·	·	●	·	·
{· · ·}	ins 11	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	●	●	·	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	·	●	●	●	·
{· · ·}	ins 17	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	●	●	·	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	·	●	●	●	·
{· · ·}	ins 17	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	●	●	·	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	·	●	●	●	·
{· · ·}	ins 21	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	●	●	·	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	·	●	●	●	·

A questo punto scopro che $24 = 8 + 6 + 6 + 4$ e $21 = 11 + 6 + 4$ sono entrambi ottenibili. Invece, per $B = 26$, la miglior somma che posso ottenere è $25 = 11 + 6 + 4 + 4$. Infine, per $B = 30$, la miglior somma che posso ottenere è $29 = 11 + 8 + 6 + 4$.

B	max sum	quali prendere
30	29	11+8+6+4
24	24	8+6+6+4
26	25	11+6+4+4
21	21	11+6+4

Problema 3 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **minima**.

-3	13	-41	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-8	15	-1

3.1(1pt) quale è il minimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 19-esimo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere l'ultimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 15-esimo elemento?

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
-3	0	-41	-10	-26	-14	-41	-36	-45	-33	-81	-35	-56	-22	-33	0	-27	-19	-73	-43	-66	-57	-62	-52	-60	-45
-3	13	-41	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-8	15
-65	-62	-75	-34	-65	-49	-81	-40	-45	-36	-48	0	-21	0	-29	-18	-73	-46	-54	0	-23	0	-5	0	-8	0
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	min sum	parte da	arriva a
qualsiasi	-81	3	11
include 19-esimo	-73	17	19
include ultimo	-46	17	27
include 15-esimo	-51	3	19

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

25	18	20	15	19	33	40	64	18	37	65	21	44	31	56	58	22	19	15	37	60	26	41	51	23

4.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(2pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 21. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica. La riga centrale è la sequenza in input; la riga superiore è stata compilata da destra verso sinistra ed il numero in essa riportato nella generica posizione i rappresenta la massima lunghezza di una sottosequenza crescente vincolata a prendere l'elemento i-esimo della sequenza in input come suo primo elemento (dedurne la regola di riempimento); la riga inferiore è stata compilata da sinistra verso destra - a voi il compito di esprimere con chiarezza il significato dei numeri in essa contenuti (e la regola di riempimento).

DECRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
5	2	4	1	3	5	6	6	2	5	6	3	5	4	4	4	3	2	1	3	3	2	2	2	1
25	18	20	15	19	33	40	64	18	37	65	21	44	31	56	58	22	19	15	37	60	26	41	51	23
1	2	2	3	3	1	1	1	4	2	1	3	2	3	2	2	4	5	6	3	2	4	3	3	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

DECRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
decrescente	6	40, 37, 31, 22, 19, 15
N-sequenza	10	25, 20, 19, 18, 65, 44, 31, 22, 19, 15
decrescente con 21	5	64, 37, 21, 19, 15

Dove le motivazioni sono le seguenti:

1 il 6 è il più grande dei valori ottenuti nel riempimento della tabella. Di fatto, per rispondere al primo quesito, bastava compilare solo la riga superiore, oppure solo quella inferiore. Con riferimento alla riga superiore, una sottosequenza decrescente di lunghezza 6 può essere così ricostruita: nella riga superiore cerchio il 6 (numero più grande), quindi cerchio il primo 5 che incontro alla sua destra (che deve esistere per la regola di riempimento) e proseguo sempre verso destra cerchiando 6,5,4,3,2,1 (sulla riga superiore). Gli elementi della riga centrale che corrispondono agli elementi cerchiati nella riga superiore costituiscono la sottosequenza ricercata. Ovviamente la cosa importante non è la rigida regola ma la logica sottostante che vi permette di affrontare un ben più ampio spettro di situazioni.

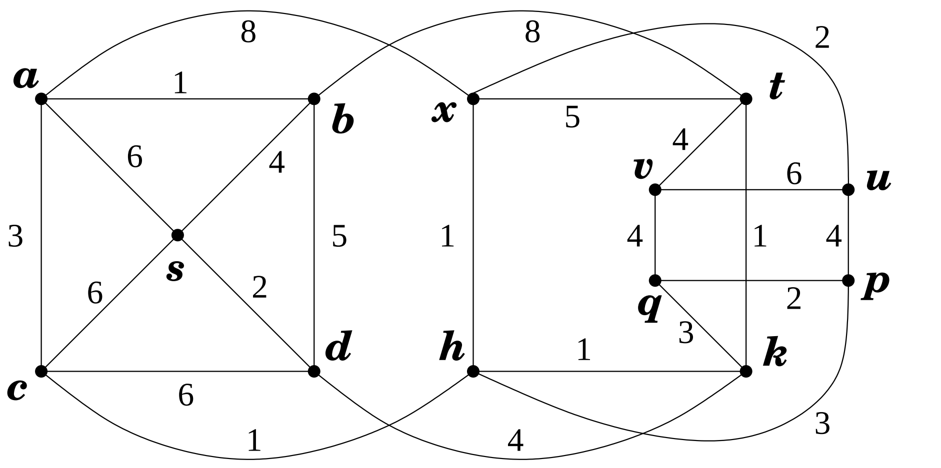
2 al 21 corrispondono un 3 (nella riga superiore) ed un altro 3 nella riga inferiore. Ora, la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 21 sarà lunga $3 + 3 - 1 = 5$. (Tolgo 1 poichè il 21 viene preso una volta sola: in pratica, oltre all'elemento di valore 21, prendo $3 - 1 = 2$ elementi alla sua sinistra e $3 - 1 = 2$ elementi alla sua destra).

3 una N-sequenza può sempre essere spezzata in due sottosequenze decrescenti dove ciascun elemento della seconda sottosequenza si trova a destra di ciascun elemento della prima sottosequenza. Quindi, con un taglio netto della sequenza in input (ma dove tagliare?), potrei poi cercare una massima sottosequenza decrescente in ciascuna delle 2 metà e ricomporre le sottosequenze così ottenute in una N-sequenza. Come nell'esercizio precedente, per decidere dove tagliare ci si avvale sia dei numeri nella riga superiore che di quelli nella riga inferiore. (Si taglia in modo da massimizzare la somma tra il più grande numero da riga superiore a destra del taglio ed il più grande numero da riga inferiore a sinistra del taglio).

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga A-sequenza oppure la più lunga Z-sequenza (si veda il tema di aprile 2007 per le definizioni)?

Provare per esercizio a determinare la più lunga A-sequenza.

Problema 5 (12 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(4pt)** Trovare un massimo flusso ed un taglio minimo. Disegnarli entrambi.

5.2.**(2pt)** Disegnare la rete ausiliaria associata al massimo flusso di cui al punto precedente. Evidenziare in essa i nodi raggiungibili dal nodo s ed il taglio associato.

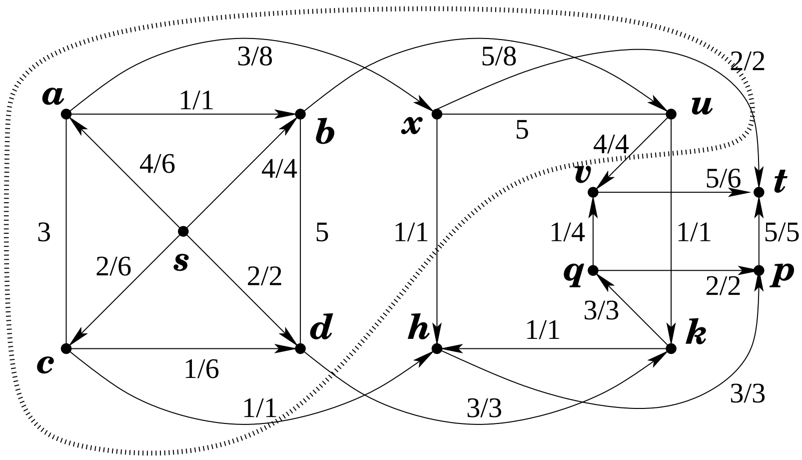
5.3.**(2pt)** Il grafo rappresentato in figura è planare? Fornisci un certificato per la tua risposta.

5.4.**(1pt)** Il grafo rappresentato in figura è bipartito? Fornisci un certificato per la tua risposta.

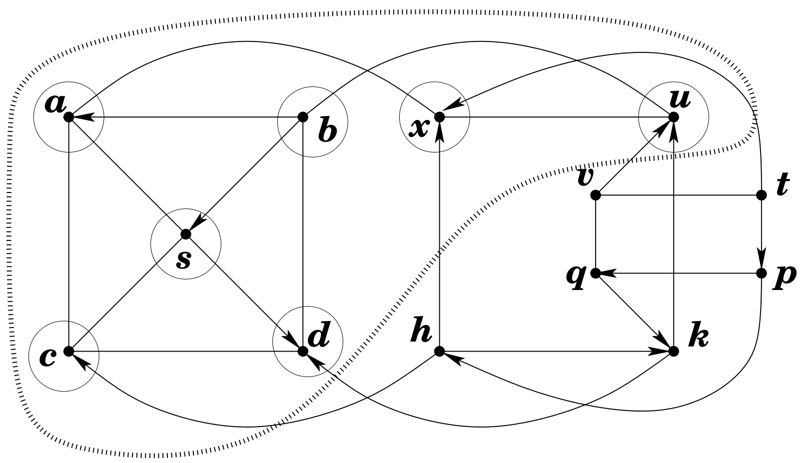
5.5.**(1pt)** Quale è il numero minimo di nodi la cui rimozione rende il grafo bipartito? Certifica la tua risposta.

5.6.**(2pt)** Quale è il numero minimo di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito? Certifica la tua risposta.

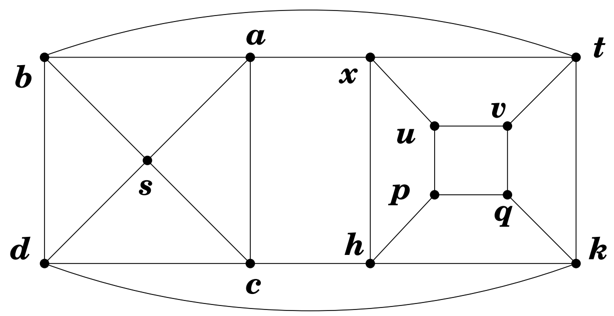
risposte.
La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



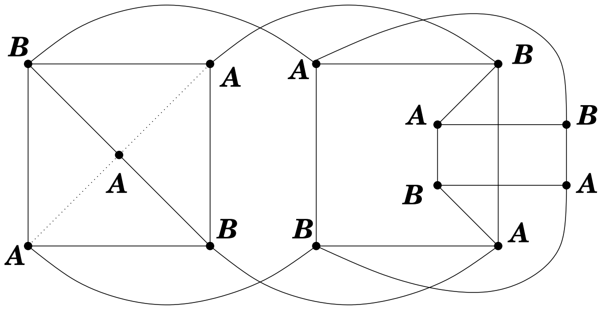
La seguente figura riporta la rete ausiliaria associata al massimo flusso sopra rappresentato. Risulta evidente come il taglio minimo rappresentato sopra poteva essere individuato su questa rete ausiliaria considerando i nodi che prendono fuoco (nodi cerchiati) quando un incendio divampa da s.



Il grafo assegnato è planare come reso evidente dal planar embedding fornitone qui sotto.



Tuttavia il grafo non è planare poichè contiene circuiti dispari. In particolare, i due triangoli $a - c - s$ e $b - d - s$ non hanno archi in comune e quindi, per rendere il grafo bipartito, devo rimuovere almeno due archi. In effetti, la rimozione di due archi è sufficente a rendere il grafo bipartito: basta ad esempio rimuovere gli archi sc ed sb come dimostrato nella seguente figura.



Chiaramente, anche la sola rimozione del nodo s, implicando la rimozione di tutti gli archi incidenti in s oltre al nodo s stesso, risulta sufficiente a rendere il grafo bipartito.

Problema 6 (6 punti): Si consideri il seguente problema di PL.

$$\max \; 6\,x_1 - 3\,x_2 + 8\,x_3$$
$$\begin{cases} 3\,x_1 & & & \leq & 9 \\ & x_2 & & \leq & 7 \\ & & 2\,x_3 & \leq & 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6.1**(1pt)** Fornire la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$.

6.2**(1pt)** Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto del primo vincolo? E per il secondo e terzo vincolo? E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per incrementare le disponibilità delle tre risorse? Vi è un limite a tali incrementi o il prezzo ombra rimane equo fino a $+\infty$? (Se vi è un limite, specificare quale).

6.3**(1pt)** Di quanto dovremmo alterare il primo coefficiente della funzione obiettivo affinchè la soluzione non sia più ottima?

6.4**(1pt)** Secondo te il problema duale ha una soluzione ammissibile che sia gemella di $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ nel senso che soddisfi con essa le condizioni agli scarti complementari? Argomentare il perchè.

6.5**(1pt)** È quantomeno possibile concludere che, nel caso essa esista, allora tale soluzione duale è unica? O ve ne possono essere un numero finito, od infinito? Argomentare il perchè.

6.6**(1pt)** Aggiungere un vincolo in modo che la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ individuata al primo punto resti ammissibile, ma nel contempo le condizioni agli scarti complementari non possano sicuramente più consentire di individuare univocamente una soluzione duale gemella.

SVOLGIMENTO: Questo esercizio è un rafforzamento di un analogo esercizio proposto allo scritto precedente (giugno 2007). Suggerisco di provare prima l'esercizio di giugno (eventualmente leggendone la correzione) e poi provare a risolvere questo esercizio, anche autonomamente.

SOLUZIONE OTTIMA: La soluzione ottima è ovviamente $\overline{x}_1 = \frac{9}{3} = 3$, $\overline{x}_2 = 0$ (poichè il coefficiente della x_2 nella funzione obiettivo e negativo), $\overline{x}_3 = \frac{10}{2} = 5$ e totalizza $6\left(\frac{9}{3}\right) - 3\,(0) + 8\left(\frac{10}{2} = 5\right) = 18 - 0 + 40 = 58$ in termini di funzione obiettivo.

PREZZI OMBRA: I prezzi ombra sono ovviamente $\lambda_1 = \frac{6}{3} = 2$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = \frac{8}{2} = 4$. Questi costituiscono inoltre l'unica soluzione duale gemella della soluzione ottima $\overline{x}_1 = \frac{9}{3} = 3$, $\overline{x}_2 = 0$, $\overline{x}_3 = \frac{10}{2} = 5$. L'unicità deriva dal fatto che la soluzione $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ non é degenere. Infine i prezzi ombra risultano equi per un qualsiasi incremento dei termini noti dei vincoli. (Si assume che i termini noti dei vincoli siano comunque matenuti non negativi poiché in caso contrario si ha la perdita dell'ammissibilitá in quanto si entra in contraddizione con i vincoli di non negativitá).

ROBUSTEZZA SOLUZIONE OTTIMA: La soluzione $\overline{x}_1 = \frac{9}{3} = 3$, $\overline{x}_2 = 0$, $\overline{x}_3 = \frac{10}{2} = 5$ resta ottima fintantochè i coefficienti della x_1 e della x_3 nella funzione obiettivo restano non-negativi ed il coefficiente della x_2 resta non-positivo.

CONSIDERAZIONI SUL DUALE: Poichè il problema primale ha una soluzione ottima, l'esistenza di una soluzione duale gemella segue dal teorema della dualità forte. Inoltre la soluzione gemella sarà unica in quanto la soluzione primale ottima è di base e non degenere.

VINCOLO AGGIUNTIVO: Se ad esempio aggiungiamo il vincolo $3\,x_1 + 2\,x_3 = 10 + 9 = 19$, allora la soluzione di base considerata (ossia $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$) resta ammissibile ma diviene degenere in quanto soddisfa ad uguaglianza un vincolo in più di quanto essenziale all'essere di base (infatti $10 + 9 = 19$). A questo punto la soluzione duale che dimostra l'ottimalità della soluzione primale perde in univocità (dacchè nel placcare la funzione obiettivo posso combinare un vincolo in più dello stretto necessario). Come esercizio, si verifichi con mano in questo caso specifico quanto qui detto in astratto ed a valenza generale.