Esame di Ricerca Operativa - 29 marzo 2007
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):
Sia $B = 30$. Trovare un sottoinsieme dei seguenti elementi la cui somma, soggetta al vincolo di non eccedere B, sia massima

$$13, 7, 4, 19, 52, 3, 26, 17, 13, 64, 28, 27, 19, 9, 48, 17$$

1.1(1pt) quale è il valore della somma massima? Quali elementi devo prendere?

1.2 (1pt) e nel caso $B = 25$?

1.3 (1pt) e nel caso $B = 18$?

1.4 (1pt) e nel caso $B = 26$?

Dapprima ordino i valori forniti in input ottenendo:

$$3, 4, 7, 9, 13, 13, 17, 17, 19, 19, 24, 25, 28, 48, 52, 64\,.$$

Poi mi sbarazzo degli ultimi 3 elementi visto che sono maggiori di 30. A questo punto compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

	decine unità	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1 0	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9	2 0	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8	2 9	3 0
{ }		•	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{3}	ins 3	•	·	·	•	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{3, 4}	ins 4	•	·	·	•	•	·	·	•	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{···}	ins 7	•	·	·	•	•	·	·	•	·	·	•	•	·	·	•	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{···}	ins 9	•	·	·	•	•	·	·	•	·	•	•	•	•	•	•	·	•	·	·	•	•	·	·	•	·	·	·	·	·	·	·
{···}	ins 13	•	·	·	•	•	·	·	•	·	•	•	•	•	•	•	·	•	•	·	•	•	·	•	•	•	•	•	•	·	•	·
{···}	ins 13	•	·	·	•	•	·	·	•	·	•	•	•	•	•	•	·	•	•	·	•	•	·	•	•	•	•	•	•	·	•	•
{···}	ins 17	•	·	·	•	•	·	·	•	·	•	•	•	•	•	•	·	•	•	·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
{···}	ins 17	•	·	·	•	•	·	·	•	·	•	•	•	•	•	•	·	•	•	·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
{···}	ins 19	•	·	·	•	•	·	·	•	·	•	•	•	•	•	•	·	•	•	·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
{···}	ins 19	•	·	·	•	•	·	·	•	·	•	•	•	•	•	•	·	•	•	·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

A questo punto scopro che $30 = 13 + 13 + 4$ è ottenibile. Invece, per $B = 25$, la miglior somma che posso ottenere è $24 = 13 + 7 + 4$. Infine, per $B = 18$, la miglior somma che posso ottenere è $17 = 13 + 4$.

B	max sum	quali prendere
30	30	13+13+4
25	25	13+9+3
18	17	13+4
26	26	13+9+4

Problema 2 (4 punti):
Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

3	-13	41	-31	16	-12	27	-5	9	-12	48	-46	21	-34	11	-55	27	-8	54	-30	23	-9	5	-10	8	-15	1

2.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 19-esimo elemento?

2.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere l'ultimo elemento?

2.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 15-esimo elemento?

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
3	0	41	10	26	14	41	36	45	33	81	35	56	22	33	0	27	19	73	43	66	57	62	52	60	45	46
3	-13	41	-31	16	-32	41	-5	9	-12	48	-46	21	-34	11	-55	27	-8	54	-30	23	-9	5	-10	8	-15	1
65	62	75	34	65	49	81	40	45	36	48	0	21	0	29	18	73	46	54	0	23	0	5	0	8	0	1
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da	arriva a
qualsiasi	81	3	11
include 19-esimo	73	17	19
include ultimo	46	17	27
include 15-esimo	51	3	19

Problema 3 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

13	41	31	16	50	27	5	9	12	48	46	21	34	11	55	27	8	54	30	23	9	5	10	8	15

3.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

3.2(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

3.3(2pt) Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

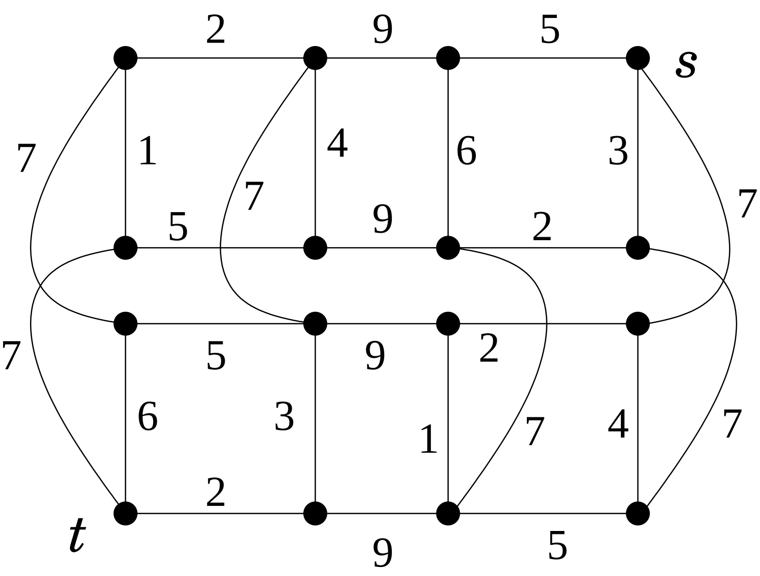
Crescente

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
5	3	3	4	2	3	6	5	4	2	2	3	2	2	1	2	4	1	1	1	3	3	2	2	1
13	41	31	16	50	27	5	9	12	48	46	21	34	11	55	27	8	54	30	23	9	5	10	8	15
1	1	2	3	1	3	4	4	4	2	3	4	4	5	1	5	6	2	5	6	7	8	7	8	7
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

Decrescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	6	5, 9, 12, 21, 34, 55
decrescente	8	50, 48, 46, 34, 30, 23, 9, 5
V-sequenza	10	50, 48, 46, 34, 30, 23, 9, 5, 8, 15



Problema 4 (9 punti):
Si consideri il grafo in figura.
Con riferimento al grafo in figura, si affrontino i seguenti gruppi di esercizi.

GRUPPO 4.1 (5 PUNTI):

4.1.1(2pt) Trovare l'albero ricoprente di peso minimo.

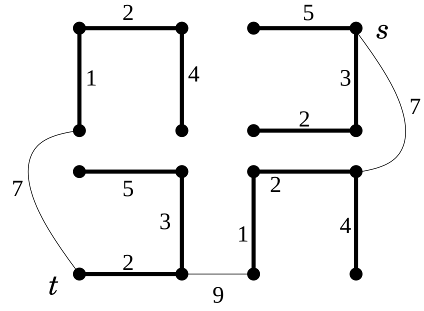
4.1.2(1pt) Indicare quali archi non siano contenuti in alcun albero ricoprente di peso minimo.

4.1.3(1pt) Indicare quali archi siano contenuti in ogni albero ricoprente di peso minimo.

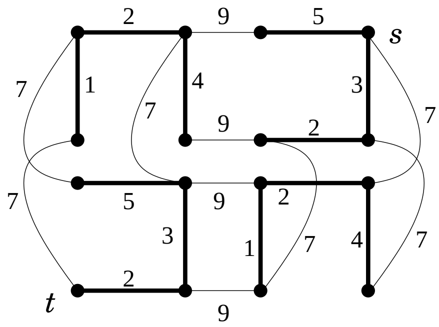
4.1.4(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

risposte.

Un albero ricoprente di peso minimo, come reperito tramite l'algoritmo di Kruskal, è riportato nella seguente figura ed ha peso 57. Gli archi in grassetto sono quegli archi che appartengono ad ogni soluzione ottima, ossia quegli archi la cui rimozione conduce ad un aumento del costo dell'albero ricoprente di peso minimo.



Nella seguente figura vengono riportati tutti e soli quegli archi del grafo originario che appartengono ad un qualche albero ricoprente di peso minimo. Gli archi contenuti in ogni soluzione ottima sono ancora rappresentati tramite linee molto spesse. Il peso complessivo degli archi contenuti in ogni soluzione ottima ammonta a 30.



Gli alberi di peso minimo sono $36 = 3^2 \cdot 4$ e ciascuno di essi può essere generato aggiungendo all'insieme degli archi presenti in ogni soluzione ottima (quelli in neretto) alcuni degli archi "opzionali" (quelli che appartengono ad un qualche albero ricoprente di peso minimo come riportati sopra) seguendo la seguente politica.

1. aggiungere uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 disposti a sinistra;
2. aggiungere uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 disposti a destra;
3. aggiungere uno qualsiasi dei 4 archi di peso 9.

Le 3 scelte di cui sopra sono indipendenti.

Gruppo 4.2 (4 punti):

4.2.1(1pt) Il grafo in figura ammette un ciclo Euleriano? Perchè? E quale è il minimo numero di archi la cui aggiunta mi consente di ottenere un ciclo Euleriano? Ammette un cammino Euleriano?

4.2.2(1pt) Il grafo in figura ammette un cammino Hamiltoniano? Fornire certificato.

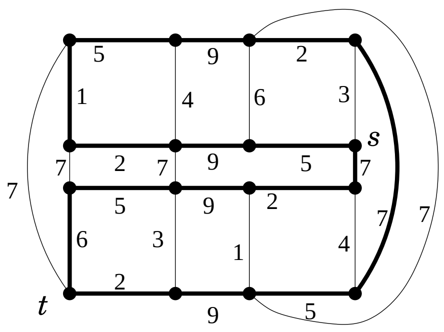
4.2.3(1pt) Il grafo in figura è bipartito? Fornire certificato.

4.2.4(1pt) Il grafo in figura è planare? Fornire certificato.

risposte.

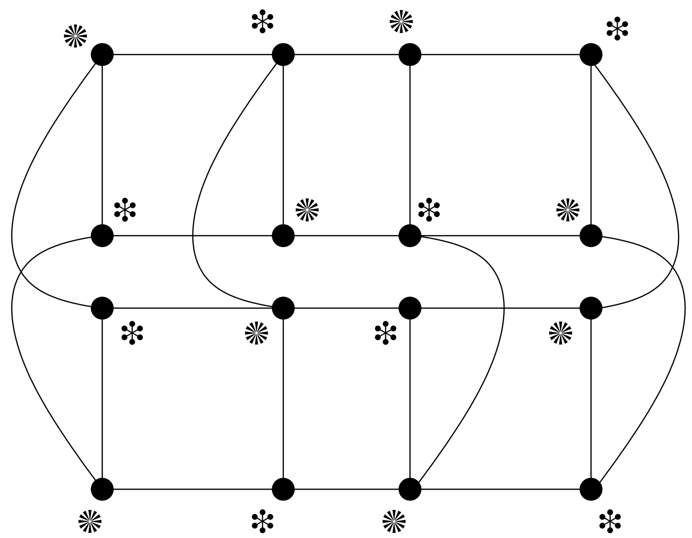
Si noti che 12 dei 16 nodi del grafo hanno grado dispari. Ciò implica che il grafo non ammette cicli Euleriani ($12 > 0$) e nemmeno cammini Euleriani ($12 > 2$) e che occorre aggiungere almeno $12/2 = 6$ archi per rendere pari il grado di ogni nodo. In effetti è facile aggiungere 6 archi rendendo pari il grado di ogni nodo; a quel punto il grafo, che è ovviamente connesso, sarà anche Euleriano.

Il grafo assegnato è planare poichè i 4 incroci di archi possono essere entrambi risolti semplicemente flippando di 180^o rispetto al suo asse orrizzontale la parte di alto (oppure quella in basso) pervenendo alla rappresentezione planare dello stesso grafo riportata qui sotto.



Nella figura sopra gli archi in neretto costituiscono un ciclo Hamiltoniano.

Infine, il grafo è bipartito poichè ammette una bipartizione dei nodi come illustrata nella seguente figura. (Si osservi che nessun arco ha gli estremi labellati con lo stesso simbolo).



Problema 5 (5 punti):

Si consideri la soluzione $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 8$, $x_4 = 0$, $x_5 = 12$, $x_6 = 0$ del seguente problema.

$$\max \; 12x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 + x_5 + 6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq 10 \\ x_3 + x_4 & \leq 15 \\ x_5 + x_6 & \leq 12 \\ x_1 + x_3 + x_5 & \leq 20 \\ x_2 + x_4 + x_6 & \leq 14 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile. Utilizzare gli scarti complementari per verificarne o confutarne l'ottimalità. La soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (0) + (10) & = \mathbf{10} \leq 10 \\ (8) + (0) & = 8 \leq 15 \\ (12) + (0) & = \mathbf{12} \leq 12 \\ (0) + (8) + (12) & = \mathbf{20} \leq 20 \\ (10) + (0) + (0) & = 10 \leq 14 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min\ 10\,y_1 + 15\,y_2 + 12\,y_3 + 20\,y_4 + 14\,y_5$$
$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq 12 \\ y_1 + y_5 \geq 20 \\ y_2 + y_4 \geq 10 \\ y_2 + y_5 \geq 10 \\ y_3 + y_4 \geq 1 \\ y_3 + y_5 \geq 6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_2 = y_5 = 0$ poichè i vincoli 2 e 5 del primale non sono soddisfatti ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_2, x_3, x_5 > 0$, i vincoli 2,3 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} y_1 = 20 \\ + y_4 = 10 \\ y_3 + y_4 = 1 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(20, 0, -9, 10, 0)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che non tutte le variabili assumono valore non negativo. Inoltre, andando a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 1, 4 e 6), emergono ulteriori violazioni.

$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq 12 \\ \geq 10 \\ y_3 \geq 6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Infatti solo il primo dei tre vincoli risulta soddisfatto. Da quanto detto (la violazione della non-negatività era già di per se sufficiente) ne consegue che la soluzione primale assegnata **non è ottima**.

Problema 6 (9 punti):

$$\max\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6.1(3pt) Risolvere con il metodo del simplesso.

6.2(2pt) Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto del primo vincolo? E per il secondo vincolo?

6.3(2pt) E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per il primo vincolo?

6.4(2pt) Di quanto dovremmo alterare il secondo coefficiente della funzione obiettivo affinchè la soluzione non sia più ottima?

6.1 Risoluzione con il metodo del simplesso:

Il problema è in forma canonica e pertanto gli corrisponde il primo dei seguenti tre tableau. Il problema è ad origine ammissibile e pertanto impiego il metodo del simplesso primale per giungere al tableau ottimo.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
w_1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
w_2 & 3 & \boxed{1} & -1 & 12 \\
z & -8 & -6 & -2 & 0
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|rrrr}
 & x_1 & w_2 & x_3 & \\
w_1 & 1 & 0 & \boxed{4} & 4 \\
x_2 & 3 & 1 & -1 & 12 \\
z & 10 & 6 & -8 & 72
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|rrrr}
 & x_1 & w_2 & w_1 & \\
x_3 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\
x_2 & \frac{13}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 13 \\
z & 12 & 6 & 2 & 80
\end{array}
$$

Pertanto la soluzione ottima è $x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $x_3 = 1$. Ad essa corrisponde un valore di 80 della funzione obiettivo.

6.2 I valori delle variabili duali (prezzi ombra) sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$. Pertanto:

per ogni unità di incremento nel termine noto del primo vincolo sono disposto a pagare massimo 2.

per ogni unità di incremento nel termine noto del secondo vincolo sono disposto a pagare massimo 6.

Si noti come una rapida verifica dell'ammissibilità delle soluzioni primale ($x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $x_3 = 1$) e duale ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$) consentirebbe a questo punto di assicurarsi della correttezza dei risultati fin qui prodotti.

6.3 Tuttavia le indicazioni fornite dai prezzi ombra (λ_1 e λ_2) valgono solo per piccoli incrementi. Per scoprire fino a quali entità di incremento tali valori ombra restano indicativi passiamo a considerare il duale. Il tableau del duale all'ottimo può essere ottenuto dal tableau primale all'ottimo come segue:

Tableau Primale

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x_1 & w_2 & w_1 & \\
x_3 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\
x_2 & \frac{13}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 13 \\
z & 12 & 6 & 2 & 80
\end{array}
\Longleftrightarrow
$$

Tableau Duale

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & y_3 & y_2 & \\
y_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} & 12 \\
\lambda_2 & 0 & -1 & 6 \\
\lambda_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 2 \\
z & -1 & -13 & 80
\end{array}
$$

Assumiamo di incrementare di D la disponibilità nel primo vincolo. Il vantaggio nel considerare il duale è che l'unica riga ad essere influenzata da questa modifica nel problema è l'ultima. La nuova riga può essere prodotta attraverso opportune sostituzioni o avvalendosi della PROVA DI CONTROLLO (prova del nove) della PL.

$$\begin{array}{rrrr}
 & (0) & (0) & (0) \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
 & y_3 & y_2 & \\
(0) \to y_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} & 12 \\
(12) \to \lambda_2 & 0 & -1 & 6 \\
(4+D) \to \lambda_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 2 \\
z & -1 & -13 & 80
\end{array}$$

Ricordiamo che per ogni colonna vale quanto segue: il valore dell'ultimo elemento della colonna si ottiene sommando gli altri elementi della colonna ciascuno moltiplicato per il coefficiente della riga cui appartiene e sottraendo infine il valore del coefficiente associato alla colonna.

Colonna 1: $-\frac{1}{4}(0) + 0(12) - \frac{1}{4}(4+D) - (0) = -1 - \frac{D}{4}$
Colonna 2: $-\frac{13}{4}(0) - 1(12) - \frac{1}{4}(4+D) - (0) = -13 - \frac{D}{4}$
Colonna 3: $12(0) + 6(12) + 2(4+D) - (0) = 80 + 2D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$-1 - \frac{D}{4} \qquad -13 - \frac{D}{4} \qquad 80 + 2D$$

Si noti come, ponendo $D = 0$, si ritrovi in effetti la corrispondente riga z del tableau duale di cui sopra. Quindi abbiamo implicitamente condotto la prova di controllo relativamente a quel tableau. L'esito di tale verifica è stato positivo e quindi possiamo concludere sia per la correttezza dei singoli coefficienti dei tableau fin qui prodotti sia per la congruità con cui la prova di controllo è stata condotta.

Tornando al nostro obiettivo, dobbiamo individuare in quale intervallo per il parametro D i primi due termini della riga sopra computata rimangano tutti non positivi. La risposta è che tale condizione risulta rispettata nell'intervallo $D \geq -4$. Il tableau considerato resta pertanto ottimo se e solo se $D \geq -4$. Possiamo concludere che non vi è alcun limite al quantitativo di diponibilità sul primo vincolo che siamo disposti ad acquistare pagando 2 per ogni unità di incremento. Inoltre, in caso di liquidazione di tale disponibilità, il prezzo a cui vendere sarebbe 2 solo per le prime 4 unità vendute ma dovrebbe poi essere rivisto verso l'alto. Si noti tuttavia che la quantità disponibile nel problema di partenza era proprio 2, e quindi, per quel prezzo, siamo disposti ad arrivare fino ad esaurimento della quantità di risorsa disponibile (ma, anche ove fosse possibile, non risulterebbe conveniente andare in carenza di quella risorsa a quel prezzo).

6.4 Nel analizzare la sensitività della soluzione ottima rispetto a modifiche dei coefficienti della funzine obiettivo conviene invece riferirsi al primale.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & (8) & (0) & (0) & (0) \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & & x_1 & w_2 & w_1 & \\
(2) \to & x_3 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
(6+D) \to & x_2 & \frac{13}{4} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \\
 & z & 12 & 6 & 2 & 20
\end{array}$$

Utilizzo nuovamente la regola di controllo
Colonna 1: $\frac{1}{4}(2) + \frac{13}{4}(6 + D) - (8) = 12 + \frac{13}{4}D$
Colonna 2: $0(2) + 1(6 + D) - (0) = 6 + D$
Colonna 3: $\frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4}(6 + D) - (0) = 2 + \frac{1}{4}D$
Colonna 4: $\frac{1}{4}(2) + \frac{13}{4}(6 + D) - (0) = 20 + \frac{13}{4}D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$12 + \frac{13}{4}D \quad 6 + D \quad 2 + \frac{1}{4}D \quad 20 + \frac{13}{4}D$$

L'intervallo dei valori di D per i quali il tableau indicato resta ottimo coincide con l'intervallo dei valori di D per i quali ciascuno dei primi tre termini della riga sopra computata rimane non negativo. Pertanto il tableau resta ottimo per ogni $D \geq -\frac{48}{13}$, ossia, la soluzione considerata ($x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $x_3 = 1$.) resta ottima fintantochè $D \geq -\frac{48}{13}$.