

NOME: .....

COGNOME: .....

MATRICOLA: .....

FIRMA: .....

## Esame di Ricerca Operativa - 14 luglio 2009 Facoltà di Ingegneria - Udine

### Problema 1 (3 punti):

Si consideri la seguente formula booleana in forma normale congiuntiva, di 4 clausole e 4 variabili:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4})$$

Esiste un assegnamento di verità alla variabili booleane  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  tale che la formula risulti soddisfatta?

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI).

Anche se la formula é soddisfacibile ( $x_2 = x_3 = true, x_1 = x_4 = false$ ), si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) anche il problema di trovare un assegnamento che soddisfi il massimo numero possibile di clausole.

### Problema 2 (2+3 punti):

La Svivon produce batterie elettriche di tre tipi (Alef, Beth e Ghimel). Per due di esse (Beth e Ghimel) utilizza del rame. Per coprire la produzione del prossimo mese, può acquistare il rame al prezzo di 5 euro/kg. Il fornitore però non può fornire più di 4000 kg di rame. Nella seguente tabella sono indicate: la quantità di rame richiesta per produrre una scatola di ciascuna batteria, i costi di manodopera (per scatola prodotta) e prezzi di vendita al pubblico (per scatola):

	Rame (kg per scatola)	costi manodopera	prezzo vendita
ALEF	-	12	25
BETH	1	6	20
GHIMEL	2	4	30

I tre tipi di batteria devono essere prodotti in quantità tali che il numero di scatole di batterie Alef sia almeno doppio del numero di scatole di Beth e non superiore al numero di scatole di Ghimel.

- 1 Formulare come PL il problema di pianificare la produzione della Svivon in modo ottimo.
- 2 Dimostrare che la soluzione consistente nel produrre 2000 unità di Alef e altrettante di Ghimel (e nessuna scatola di Beth) è ottima.

### Problema 3 (4 punti):

Il topino Aladino, dotato di uno zaino di capacità  $B = 36$ , ha compilato la Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino che puoi trovare di seguito.

## TABELLA DI PROGRAMMAZIONE DINAMICA PER IL PROBLEMA DELLO ZAINO

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
<i>A</i> (4, 5)	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>B</i> (5, 4)	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
<i>C</i> (5, 6)	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
<i>D</i> (9, 11)	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
<i>E</i> (13, 12)	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
<i>F</i> (13, 14)	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
<i>G</i> (15, 12)	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
<i>H</i> (17, 16)	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
<i>I</i> (22, 21)	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
<i>L</i> (24, 22)	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	21	22

Sulla base di tale tabella, Aladino ha fornito le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere	B	max val	peso	quali prendere
29				30			
21				25			

Tuttavia il topino ha rosicchiato parti delle tabelle. Devi ricostruirle!

**Problema 4 (4 punti):**

Il padre di Jasmine le ha chiesto di trovare, nel seguente array di interi, un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **massima**.

21	-13	24	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	27	-8	44	-20	23	-39	25	-10	8	-15	1
----	-----	----	-----	----	-----	---	-----	----	-----	---	----	----	-----	----	-----	----	----	----	-----	----	-----	----	-----	---	-----	---

Jasmine ha allora compilato la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←
		32	1		0	4	0	39		23	15	36		13	0	27	19			66	27	52			35	
21	-13	24	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	27	-8	44	-20	23	-39	25	-10	8	-15	1
32	11			16	0	28	24	39	0	19	13	21	0	22	11		39		3	23	0	25				1
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos	arriva a pos
qualsiasi			
include primo			
include 11-esimo			
include 21-esimo			

Tuttavia il topino Aladino ha rosicchiato parti delle tabelle. Aiuta Jasmine a ricostruirle, senza dimenticare le risposte!

**Problema 5 (4 punti):**

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

23	17	19	14	18	32	39	60	17	36	61	20	41	30	55	57	21	18	14	36	59	25	40	51	23
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- 5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile.
- 5.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice  $i$  tale che ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l' $i$ -esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 21.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente		
Z-sequenza		
crescente con 21		

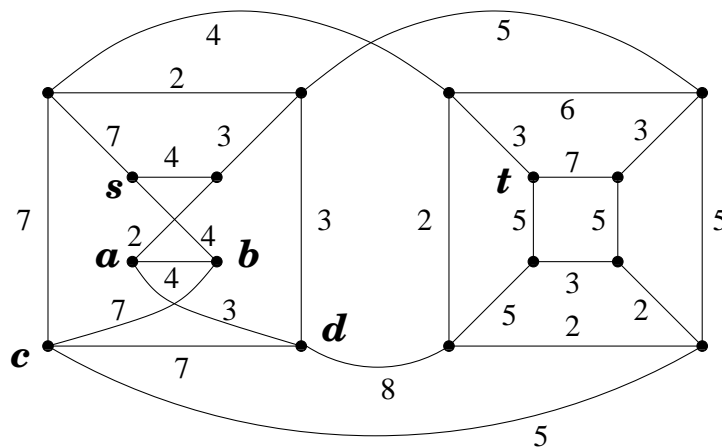
**Problema 6 (5 punti):**

$$\begin{cases} \max & -x_1 - 3x_2 - x_3 \\ & 2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -5 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- 6.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.  
 6.2(1pt) Scrivere il problema duale del problema originario.  
 6.3(1pt) Porre il problema duale in forma standard.  
 6.4(1pt) Risolvere il problema duale (in forma standard) con il metodo del semplice.  
 6.5(1pt) Ricavare una soluzione primale ottima e specificarne il valore.  
 6.6(2pt) Per il problema primale, quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability del primo vincolo? (Per piccole variazioni.) E quanto per ogni unità di incremento per il secondo vincolo?

**Problema 7 (14 punti):**

Si consideri il grafo  $G$ , con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 7.1.(2pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.  
 7.2.(2pt) Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo  $s$  a tutti gli altri nodi del grafo.  
 7.3.(2pt) Trovare un albero ricoprente di peso minimo.  
 7.4.(2pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).  
 7.5.(3pt) Trovare un massimo flusso dal nodo  $s$  al nodo  $t$ .  
 7.6.(3pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo  $s$  al nodo  $t$ .