

NOME: .....

COGNOME: .....

MATRICOLA: .....

FIRMA: .....

## Esame di Ricerca Operativa - 6 settembre 2007 Facoltà di Ingegneria - Udine

**Problema 1 (4 punti):**

Un'azienda di trasporto pubblico ha a disposizione un budget di 150 Keuro (150 mila euro) per pubblicizzare una sua iniziativa attraverso televisione e carta stampata. Un annuncio sui giornali costa 1 Keuro; si possono fare al massimo 30 annunci di questo tipo. Uno spot televisivo costa 10 Keuro; si possono fare al più 15 spot in totale (fino ad esaurimento del budget). Il numero di nuovi utenti che si possono raggiungere con i due media decresce con il numero di annunci, con la seguente regola:

tipo	fascia	nuovi contatti
giornali	1-10	900
	11-20	600
	21-30	300
televisione	1-5	10000
	6-10	5000
	11-20	2000

Per esempio, decidendo di fare 12 annunci sui giornali e 8 spot televisivi si raggiungono 75.200 nuovi utenti (9000+1200 giornali; 50.000+15.000 televisione), con una spesa complessiva di  $12 + 80 = 92$  Keuro.

Si vuole massimizzare il numero di contatti, rispettando il budget complessivo di 150 Keuro.

Si formuli il problema mediante un modello di programmazione lineare intera.

**Problema 2 (4 punti):**

Sia  $B = 30$ . Trovare un sottoinsieme dei seguenti elementi la cui somma, soggetta al vincolo di non eccedere  $B$ , sia massima

4, 21, 52, 11, 17, 21, 17, 21, 4, 27, 54, 6, 27, 28, 48, 6, 8, 21, 52

**2.1(1pt)** quale è il valore della somma massima? Quali elementi devo prendere?

**2.2 (1pt)** e nel caso  $B = 24$ ?

**2.3 (1pt)** e nel caso  $B = 26$ ?

**2.4 (1pt)** e nel caso  $B = 21$ ?

**Problema 3 (4 punti):**

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **minima**.

-3	13	-41	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-8	15	-1
----	----	-----	----	-----	----	-----	---	----	----	-----	----	-----	----	-----	----	-----	---	-----	----	-----	---	----	----	----	----	----

**3.1(1pt)** quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

**3.2 (1pt)** e nel caso sia richiesto di includere il 19-esimo elemento?

**3.3 (1pt)** e nel caso sia richiesto di includere l'ultimo elemento?

**3.4 (1pt)** e nel caso sia richiesto di includere il 15-esimo elemento?

**Problema 4 (4 punti):**

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

25	18	20	15	19	33	40	64	18	37	65	21	44	31	56	58	22	19	15	37	60	26	41	51	23
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

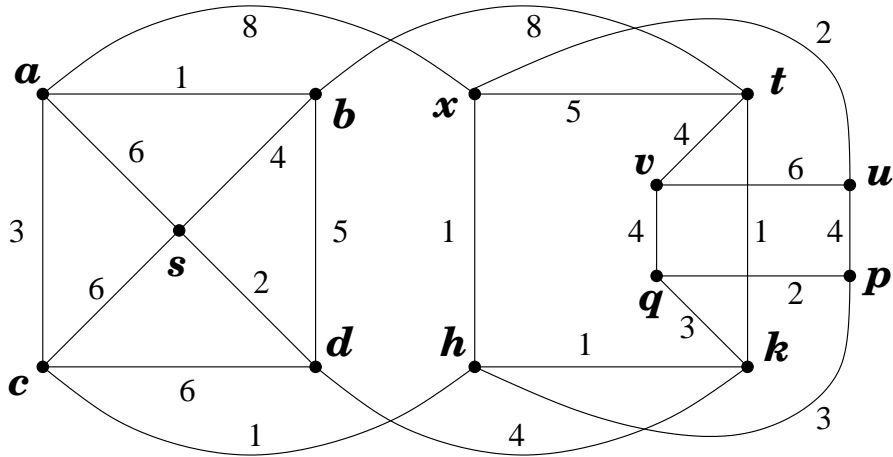
**4.1(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.2(2pt)** una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice  $i$  tale che ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l' $i$ -esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.3(1pt)** trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 21. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**Problema 5 (12 punti):**

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 5.1.(4pt) Trovare un massimo flusso ed un taglio minimo. Disegnarli entrambi.
- 5.2.(2pt) Disegnare la rete ausiliaria associata al massimo flusso di cui al punto precedente. Evidenziare in essa i nodi raggiungibili dal nodo  $s$  ed il taglio associato.
- 5.3.(2pt) Il grafo rappresentato in figura è planare? Fornisci un certificato per la tua risposta.
- 5.4.(1pt) Il grafo rappresentato in figura è bipartito? Fornisci un certificato per la tua risposta.
- 5.5.(1pt) Quale è il numero minimo di nodi la cui rimozione rende il grafo bipartito? Certifica la tua risposta.
- 5.6.(2pt) Quale è il numero minimo di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito? Certifica la tua risposta.

**Problema 6 (6 punti):** Si consideri il seguente problema di PL.

$$\begin{cases} \max & 6x_1 - 3x_2 + 8x_3 \\ & 3x_1 & \leq & 9 \\ & & x_2 & \leq & 7 \\ & & & 2x_3 & \leq & 10 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

- 6.1(1pt) Fornire la soluzione ottima  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ .
- 6.2(1pt) Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto del primo vincolo? E per il secondo e terzo vincolo? E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per incrementare le disponibilità delle tre risorse? Vi è un limite a tali incrementi o il prezzo ombra rimane equo fino a  $+\infty$ ? (Se vi è un limite, specificare quale).

- 6.3(1pt) Di quanto dovremmo alterare il primo coefficiente della funzione obiettivo affinché la soluzione non sia più ottima?
- 6.4(1pt) Secondo te il problema duale ha una soluzione ammissibile che sia gemella di  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  nel senso che soddisfi con essa le condizioni agli scarti complementari? Argomentare il perchè.
- 6.5(1pt) È quantomeno possibile concludere che, nel caso essa esista, allora tale soluzione duale è unica? O ve ne possono essere un numero finito, od infinito? Argomentare il perchè.
- 6.6(1pt) Aggiungere un vincolo in modo che la soluzione ottima  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  individuata al primo punto resti ammissibile, ma nel contempo le condizioni agli scarti complementari non possano sicuramente più consentire di individuare univocamente una soluzione duale gemella.

### LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

#### PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti e (2) non venite all'esame solo per fare i curiosi (i testi vengono pubblicati sul sito successivamente all'esame).

#### PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione **COMPLETA ed ESAURIENTE** dell'esercizio "in bella copia" deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Tutti i fogli consegnati, inclusa la copertina, debbono riportare NOME, COGNOME e MATRICOLA (sia per l'assegnazione dei punti che per il controllo).
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.

#### COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno resi disponibili sotto SINDI. Dal 18 in sù potete registrare il voto: basta che esprimiate il vostro consenso sotto SINDI. Ad alcuni di voi verrà richiesto di completare la prova scritta con un orale, ma costoro sono esonerati dal presentarsi a me per un orale qualora intendano comunque rifare lo scritto. I voti scadono dopo alcuni mesi (li garantiamo per 3 mesi) od alla consegna di un successivo scritto.