Il tableau[1] "alla Vanderbei": un sussidio alla gestione dei conteggi

Il tableau si è imposto come scrittura compatta di un dizionario nella didattica della Programmazione Lineare. Spesso i vari elementi, teorici ed algoritmici, che compongono la PL vengono introdotti come metodi di manipolazione del tableau che conducano ai risultati desiderati. Se avrete altre occasioni di incontro con la PL vi dovrete probabilmente confrontare con il tableau. Conviene pertanto impadronirsi ora di questo approccio con relativo linguaggio e tecnicalità. Proponiamo l'uso del tableau svolgendo quì di seguito alcuni semplici esercizi di programmazione lineare attenendoci a procedimenti standard di soluzione.

Il presente documento adotta il formato di tableau rivisto e proposto da Robert Vanderbei nel suo libro di testo "Linear Programming: Foundations and Extensions" del 1997. Questo tableau "alla Vanderbei" presenta dei vantaggi ma ancora resta pervasivo l'uso di convenzioni precedenti ed è possibile ti capiterà di confrontarti con la versione "classica" del tableau. Il presente documento ha un fratello gemello che compie il medesimo percorso ma impiegando il tableau classico invece che quello alla Vanderbei. Se interessati al tableau classico si consulti il documento gemello.

Condurre il simplesso col tableau.

Al seguente problema di PL associo il corrispondente tableau:

$$
\begin{array}{l}
\max\ 6x_1 + 7x_2 \\
\left\{ \begin{array}{rrcr}
2x_1 + & 3x_2 & \leq & 12 \\
2x_1 + & x_2 & \leq & 8 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array} \right.
\end{array}
\qquad \Longrightarrow \qquad
\begin{array}{rrrr}
 & & x_1 & x_2 \\
z & 0 & 6 & 7 \\
x_3 & 12 & -2 & -3 \\
x_4 & 8 & -2 & -1
\end{array}
$$

dove x_3 ed x_4 indicano le variabili di slack. Osserviamo che alla funzione obiettivo corrisponde (nella prassi diffusa) la prima riga.

A dire il vero il tableau non corrisponde propriamente ad un problema di PL ma ad un particolare dizionario di un problema di PL ossia ad un problema di PL visto dalla particolare prospettiva di una sua soluzione di base (ammissibile o meno). Il caso di cui sopra era fortuito: essendo il problema in forma standard era possibile scriverne direttamente un primo tableau.

Domanda 1 *A quale soluzione di base si riferisce il tableau dato sopra?*

Risposta: tutte le variabili di decisione fuori base ($x_1 = x_2 = 0$) mentre $x_3 = 12$ ed $x_4 = 8$.

In corrispondenza di una qualsiasi soluzione, la funzione obiettivo assume un determinato valore, che viene riportato a sinistra nella prima riga del tableau.

In generale, il seguente dizionario è più compattamente descritto in forma di tableau:

$$
\begin{array}{lcrrcrcr}
z & = & v & +c_1x_1 & \dots & +c_jx_j & \dots & +c_nx_n \\
x_{n+1} & = & b_1 & -a_{1,1}x_1 & \dots & -a_{1,j}x_j & \dots & -a_{1,n}x_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{n+i} & = & b_i & -a_{i,1}x_1 & \dots & -a_{i,j}x_j & \dots & -a_{i,n}x_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{n+m} & = & b_m & -a_{m,1}x_1 & \dots & -a_{m,j}x_j & \dots & -a_{m,n}x_n
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{rrrcrcr}
 & & x_1 & \dots & x_j & \dots & x_n \\
z & v & c_1 & \dots & c_j & \dots & c_n \\
x_{n+1} & b_1 & -a_{1,1} & \dots & -a_{1,j} & \dots & -a_{1,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{n+i} & b_i & -a_{i,1} & \dots & -a_{i,j} & \dots & -a_{i,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{n+m} & b_m & -a_{m,1} & \dots & -a_{m,j} & \dots & -a_{m,n}
\end{array}
$$

[1] "tableau" si pronuncia come fosse scritto tablò

Ecco un secondo esempio:

Problema di PL

$$
\min\ 2x_1 + 7x_2 - 2x_3
$$
$$
\begin{cases}
\begin{array}{rrrcr}
x_1 + & 2x_2 + & x_3 & \leq & 1 \\
-4x_1 + & -2x_2 + & 3x_3 & \leq & 2
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Dizionario Iniziale $\iff$ Tableau

$$
\begin{array}{rcrrrr}
z & = & 0 & +2x_1 & +7x_2 & -2x_3 \\
x_4 & = & 1 & -x_1 & -2x_2 & -x_3 \\
x_5 & = & 2 & +4x_1 & +2x_2 & -3x_3
\end{array}
\quad \iff \quad
\begin{array}{ccrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_3 \\
z & 0 & 2 & 7 & -2 \\
x_4 & 1 & -1 & -2 & -1 \\
x_5 & 2 & 4 & 2 & \boxed{\text{-3}}
\end{array}
$$

Domanda 2 *Secondo te, perché il* $\boxed{\text{-3}}$ *nel tableau sopra è stato incorniciato?*

Risposta: Il $\boxed{\text{-3}}$ è l'elemento di *pivot*.

Domanda 3 *Come sceglieresti l'elemento di pivot direttamente dal tableau?*

Possibile Risposta: Come colonna di pivot si sceglie una qualsiasi colonna $\bar{\jmath}$ avente il primo elemento $c_{\bar{\jmath}}$ maggiormente negativo (-2 nell'ultima colonna) dacchè stiamo minimizzando.

La scelta della riga di pivot si effettua considerando tutti i $-a_{i,\bar{\jmath}}$ negativi. Tra questi, quello che minimizza il rapporto $b_i/a_{i,\bar{\jmath}}$, è l'elemento di pivot.

Esercizio 1 *La regola ora introdotta per la scelta dell'elemento di pivot non dovrebbe esserti del tutto nuova. Sapresti proporre ora una seconda regola per la scelta dell'elemento di pivot nel tableau?*

Eseguiamo ora il passo di pivot nel dizionario e scopriamo così come debba venir aggiornato il tableau.

Dizionario Iniziale $\iff$ Tableau Iniziale

$$
\begin{array}{rcrrrr}
z & = & 0 & +2x_1 & +7x_2 & -2x_3 \\
x_4 & = & 1 & -x_1 & -2x_2 & -x_3 \\
x_5 & = & 2 & +4x_1 & +2x_2 & -3x_3
\end{array}
\quad \iff \quad
\begin{array}{ccrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_3 \\
z & 0 & 2 & 7 & -2 \\
x_4 & 1 & -1 & -2 & -1 \\
x_5 & 2 & 4 & 2 & \boxed{\text{-3}}
\end{array}
$$

$\downarrow$ (*pivot*) $\qquad\qquad$ $\downarrow$ (*pivot*)

Nuovo Dizionario $\iff$ Nuovo Tableau

$$
\begin{array}{rcrrrr}
z & = & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3}x_1 & +\frac{17}{3}x_2 & +\frac{2}{3}x_5 \\
x_4 & = & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3}x_1 & -\frac{8}{3}x_2 & +\frac{1}{3}x_3 \\
x_3 & = & \frac{2}{3} & +\frac{4}{3}x_1 & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_5
\end{array}
\quad \iff \quad
\begin{array}{ccrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_5 \\
z & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} \\
x_4 & \frac{1}{3} & \boxed{-\frac{7}{3}} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\
x_3 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}
\end{array}
$$

Nel tableau, siano $\bar{\imath}$ e $\bar{\jmath}$ la riga e la colonna di pivot. Sia $p = -a_{\bar{\imath},\bar{\jmath}}$ il valore dell'elemento di pivot. Ecco la regola generale per eseguire il pivot direttamente sul tableau:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & x_1 & \dots & x_{\bar{j}} & \dots & x_n \\
z & v & c_1 & \dots & c_{\bar{j}} & \dots & c_n \\
x_{n+1} & b_1 & -a_{1,1} & \dots & -a_{1,\bar{j}} & \dots & -a_{1,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{n+\bar{\imath}} & b_{\bar{\imath}} & -a_{\bar{\imath},1} & \dots & -a_{\bar{\imath},\bar{j}} & \dots & -a_{\bar{\imath},n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{n+m} & b_m & -a_{m,1} & \dots & -a_{m,\bar{j}} & \dots & -a_{m,n}
\end{array}
\iff
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & x_1 & \dots & x_{n+\bar{\imath}} & \dots & x_n \\
z & \dots & \dots & \dots & \frac{c_{\bar{j}}}{p} & \dots & \dots \\
x_{n+1} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{1,\bar{j}}}{p} & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{\bar{j}} & -\frac{b_{\bar{\imath}}}{p} & \frac{a_{\bar{\imath},1}}{p} & \dots & \frac{1}{p} & \dots & \frac{a_{\bar{\imath},n}}{p} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{n+m} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{m,\bar{j}}}{p} & \dots & \dots
\end{array}
$$

Gli elementi non specificati del secondo tableau si modificano come segue: $-a_{i,j}$ diviene $-a_{i,j} - \frac{-a_{\bar{\imath},j} - a_{i,\bar{j}}}{p}$ e similmente c_j diviene $c_j - \frac{-a_{\bar{\imath},j} c_{\bar{j}}}{p}$. Inoltre b_i diviene $b_i - \frac{-a_{i,\bar{j}} b_{\bar{\imath}}}{p}$ e v diviene $v - \frac{c_{\bar{j}} b_{\bar{\imath}}}{p}$.

In pratica l'operazione di pivot viene spesso condotta come la sequenza di 5 passi illustrata nelle seguenti figure.

1. Le variabili associate alla riga ed alla colonna di pivot si scambiano tra di loro.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & x_1 & x_2 & \mathbf{x_3} \\
z & 0 & 2 & 7 & -2 \\
x_4 & 1 & -1 & -2 & -1 \\
\mathbf{x_5} & 2 & 4 & 2 & -3
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{rrrrr}
 & & x_1 & x_2 & \mathbf{x_5} \\
z & & & & \\
x_4 & & & & \\
\mathbf{x_3} & & & &
\end{array}
$$

Figura 1: Primo passaggio: scambio delle etichette della riga e della colonna di pivot.

2. L'elemento di pivot diviene $p' := \frac{1}{p}$, dove $p := -a_{\bar{\imath},\bar{j}}$ era il valore del pivot prima che avvenga il passo di pivot.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_3 \\
z & 0 & 2 & 7 & -2 \\
x_4 & 1 & -1 & -2 & -1 \\
x_5 & 2 & 4 & 2 & \mathbf{-3}
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{rrrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_5 \\
z & & & & \\
x_4 & & & & \\
x_3 & & & & -\mathbf{\frac{1}{3}}
\end{array}
$$

Figura 2: Secondo passaggio: ricalcolo dell'elemento di pivot.

3. Gli elementi contenuti nella colonna di pivot vengono divisi per p (o moltiplicati per p').

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_3 \\
z & 0 & 2 & 7 & \mathbf{-2} \\
x_4 & 1 & -1 & -2 & \mathbf{-1} \\
x_5 & 2 & 4 & 2 & -3
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{rrrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_5 \\
z & & & & \mathbf{\frac{2}{3}} \\
x_4 & & & & \mathbf{\frac{1}{3}} \\
x_3 & & & & -\frac{1}{3}
\end{array}
$$

Figura 3: Terzo passaggio: ricalcolo della colonna di pivot.

4. Gli elementi contenuti nella riga di pivot vengono divisi per p (o moltiplicati per p') e invertiti di segno.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_3 \\
z & 0 & 2 & 7 & -2 \\
x_4 & 1 & -1 & -2 & -1 \\
x_5 & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & -3
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{r|rrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_5 \\
z & & & & \frac{2}{3} \\
x_4 & & & & \frac{1}{3} \\
x_3 & \mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{\frac{4}{3}} & \mathbf{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{3}
\end{array}
$$

Figura 4: Quarto passaggio: ricalcolo della riga di pivot.

5. Ogni elemento del tableau che non appartenga nè alla riga nè alla colonna di pivot viene modificato come segue: $-a_{i,j}$ diviene $-a_{i,j} - \frac{-a_{\bar{i},j} - a_{i,\bar{j}}}{p}$ e c_j diviene $c_j - \frac{-a_{\bar{i},j} c_{\bar{j}}}{p}$. Inoltre b_i diviene $b_i - \frac{-a_{i,\bar{j}} b_{\bar{i}}}{p}$ e v diviene $v - \frac{c_{\bar{j}} b_{\bar{i}}}{p}$. In realtà abbiamo solo dettagliato tre scritture per quella che in fondo è un'unica regola di aggiornamento omogenea che vale per tutti gli elementi fuori dalla riga e dalla colonna di pivot.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_3 \\
z & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & -2 \\
x_4 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & -1 \\
x_5 & 2 & 4 & 2 & -3
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{r|rrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_5 \\
z & -\mathbf{\frac{4}{3}} & -\mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{\frac{17}{3}} & \frac{2}{3} \\
x_4 & \mathbf{\frac{1}{3}} & -\mathbf{\frac{7}{3}} & -\mathbf{\frac{8}{3}} & \frac{1}{3} \\
x_3 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}
\end{array}
$$

Figura 5: Quinto passaggio: ricalcolo degli altri elementi.

La regola poteva anche essere data con riferimento ai nuovi valori sulla colonna e riga di pivot, ossia $-a'_{i,j} \leftarrow -a_{i,j} + \frac{-a'_{\bar{i},j} - a'_{i,\bar{j}}}{p'}$. Quindi $-a_{i,j} = -a'_{i,j} - \frac{-a'_{\bar{i},j} - a'_{i,\bar{j}}}{p'}$.

Domanda 4 *Cosa succede se facciamo pivot due volte di seguito sullo stesso elemento di pivot?*

Ma ritorniamo al nostro problema di PL ed eseguiamo il prossimo passo di pivot.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & x_1 & x_2 & x_5 \\
z & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} \\
x_4 & \frac{1}{3} & \boxed{-\frac{7}{3}} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\
x_3 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{rrrrr}
 & & x_4 & x_2 & x_5 \\
z & -\frac{10}{7} & \frac{2}{7} & \frac{45}{7} & \frac{4}{7} \\
x_1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{1}{7} \\
x_3 & \frac{6}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7}
\end{array}
$$

Gli elementi della prima riga (non considerando il primo, che rappresenta il valore della funzione obiettivo) sono ora tutti positivi. Possiamo pertanto concludere che il valore ottimo del nostro problema era $-\frac{10}{7}$. (Perchè?) La soluzione primale ottima è $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ con $x_1 = \frac{1}{7}$ e $x_3 = \frac{6}{7}$. La soluzione duale ottima è $y_1 = y_3 = 0$ con $y_2 = -\frac{45}{7}$, $y_4 = -\frac{2}{7}$ e $y_5 = -\frac{4}{7}$ ed è anch'essa espressa nel tableau.

Di fatto è persino possibile ricavare il tableau del problema duale dal tableau del problema primale.

$$
\begin{array}{rrrrr}
\multicolumn{5}{c}{\textsc{Tableau Primale}} \\
 & & x_4 & x_2 & x_5 \\
z & -\frac{10}{7} & \frac{2}{7} & \frac{45}{7} & \frac{4}{7} \\
x_1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{1}{7} \\
x_3 & \frac{6}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7}
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{rrrr}
\multicolumn{4}{c}{\textsc{Tableau Duale}} \\
 & & y_1 & y_3 \\
z & \frac{10}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \\
y_4 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\
y_2 & -\frac{45}{7} & \frac{8}{7} & \frac{6}{7} \\
y_5 & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

Dove la variabile duale y_4 corrisponde alla variabile di slack x_4 e cioè è il moltiplicatore del primo vincolo. La variabile duale y_1 corrisponde alla variabile primale x_1 che è il moltiplicatore del primo vincolo duale, ossia y_1 è la variabile di surplus nel primo vincolo duale.

Domanda 5 *Quale é la regola per passare dal tableau del primale al tableau del duale?*

Esercizio 2 *Verificare che l'ultimo tableau proposto è il tableau per il problema duale all'ottimo.*

Domanda 6 *Nell'ultimo tableau il prodotto $x_i \cdot y_i$ è nullo per ogni i. Sai darne una ragione semplice? Questa proprietà vale solo per l'ultimo tableau?*

Qualora si debba massimizzare la funzione obiettivo allora seguiamo la stessa procedura, solo che ora miriamo ad ottenere valori non positivi nella prima riga. Ad esempio:

$$\max\ 2x_1 + 7x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + \quad 2x_2 + \quad x_3 \leq 1 \\ -4x_1 + \quad -2x_2 + \quad 3x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccrrr} & & x_1 & x_2 & x_3 \\ z & 0 & 2 & 7 & -2 \\ x_4 & 1 & -1 & \boxed{-2} & -1 \\ x_5 & 2 & 4 & 2 & -3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccrrr} & & x_1 & x_4 & x_3 \\ z & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ x_2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ x_5 & 3 & 3 & \frac{7}{2} & -4 \end{array}$$

Il valore ottimo della funzione obiettivo è ora $\frac{7}{2}$. La soluzione primale ottima è $x_1 = x_3 = 0$ con $x_2 = \frac{1}{2}$. La soluzione duale ottima è $y_2 = 0$ con $y_1 = \frac{3}{2}$.

LA PROVA DI CONTROLLO

Anche la PL ha la sua prova del nove. Si assegni ad ogni variabile il valore di quella variabile nella soluzione di base originaria. Ad esempio l'ultimo tableau diviene:

$$\begin{array}{cccrrr} & & & (0) & (1) & (0) \\ & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & & x_1 & x_4 & x_3 \\ (0) \rightarrow & z & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ (0) \rightarrow & x_2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ (2) \rightarrow & x_5 & 3 & 3 & -1 & -4 \end{array}$$

Per ogni riga deve valere quanto segue: il valore del coefficiente associato alla riga deve eguagliare la somma di tutti i coefficienti della riga, ognuno moltiplicato per il coefficiente della colonna a cui appartiene.

Riga 1: $(0) = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}(0) - \frac{7}{2}(1) - \frac{11}{2}(0)$
Riga 2: $(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0)$
Riga 3: $(2) = 3 + 3(0) - 1(1) - 4(0)$

Queste relazioni valgono per ogni tableau, non necessariamente ottimale.
Per maggiori dettagli ed approfondimenti relativi alla prova del nove della PL, si consulti il documento dedicato.

Il tableau ed il metodo del simplesso duale

Consideriamo un problema in forma standard e si assuma per fissare le idee che esso sia un problema di massimizzazione. Si assuma inoltre che tutti i coefficienti della funzione obiettivo siano non-positivi. Pertanto nel primo tableau i coefficienti della prima riga sono di già non-positivi, come li vorremmo nell'ultimo tableau. Un tale tableau è detto *duale ammissibile*. Se poi tutti i coefficienti nella prima colonna sono non-negativi allora la soluzione di base corrente è ammissibile ed il problema è già risolto. Altrimenti si applica il metodo del simplesso duale. Una caratteristica interessante del metodo del simplesso duale sul tableau è che l'operazione di pivot si esplica esattamente come la regola di pivot per il simplesso primale. L'unica differenza operativa tra i due metodi stà nella scelta dell'elemento di pivot che nel caso del simplesso duale segue la stessa filosofia già richiamata per il simplesso primale.

Domanda 7 *Come sceglieresti l'elemento di pivot direttamente dal tableau?*

Possibile Risposta: Come riga di pivot si sceglie una qualsiasi riga $\bar{\imath}$ avente il primo elemento $b_{\bar{\imath}}$ negativo (magari quello maggiormente negativo) dacchè si mira ad ottenere anche l'ammissibilità primale (e quidi l'ottimalità).

La scelta della colonna di pivot si effettua considerando tutti i $-a_{\bar{\imath},j}$ positivi. Tra questi, quello che minimizza il rapporto $|c_j/a_{\bar{\imath},j}|$, è l'elemento di pivot.

Esercizio 3 *Sapresti proporre ora una seconda regola per la scelta dell'elemento di pivot nel tableau?*

Ecco un esempio:

$$\max\ -x_1 - 2x_2 \qquad \left\{\begin{array}{rcr} -x_1 + 4x_2 & \leq & -2 \\ -2x_1 + 2x_2 & \leq & -7 \\ -x_1 - 3x_2 & \leq & 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c|rrr} & & x_1 & x_2 \\ \hline z & 0 & -1 & -2 \\ x_3 & -2 & 1 & -4 \\ x_4 & -7 & \boxed{2} & -2 \\ x_5 & 2 & 1 & 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|rrr} & & x_4 & x_2 \\ \hline z & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \\ x_3 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ x_1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ x_5 & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} & 4 \end{array}$$

Nota 1 *Il metodo del simplesso duale corrisponde a risolvere il problema duale attraverso il metodo del simplesso.*
Il simplesso duale conviene quando l'origine non è primale ammissibile ma duale ammissibile oppure quando nel problema di PL primale il numero di vincoli supera il numero di incognite.

Come gestire i vincoli sulle singole variabili

Se invece di avere $x_j \geq 0$ si ha $x_j \geq l_j$ con $l_j \neq 0$ allora ci si avvale della sostituzione: $x'_j = x_j - l_j$. Se poi una variabile è limitata verso il basso invece che verso l'alto, ossia $x_j \leq u_j$, ma $x_j \geq 0$ non è richiesto, allora si sostituisce $x'_j = u_j - x_j$.

Qualora invece una variabile non-negativa sia limitata verso il basso, tale condizione può essere considerata come uno dei vincoli del problema. Tuttavia, qualora tutte le variabili siano limitate (ed in molti casi un limite ovvio è facilmente prodotto), allora la situazione può essere girata a nostro vantaggio considerando sia la variabile x_j che la variabile $x'_j = u_j - x_j$ e decidendo di adottare per la scrittura del primo tableau quella delle due che conduce ad un tableau duale ammissibile. Si procede quindi con il metodo del simplesso duale. Dobbiamo ovviamente garantire $0 \leq x_j, x'_j \leq u_j$. Attraverso le varie fasi del simplesso duale l'ammissibilità duale resta garantita, e se una delle variabili primali utilizzate per esprimere il tableau (x_j o x'_j) è negativa allora un passo di pivot viene eseguito con l'effetto di avvicinarsi all'ammissibilità anche primale. Tuttavia può accadere che una variabile attualmente presente nel tableau ecceda il suo limite verso il basso. Quando ciò succede si rimpiazza la rispettiva riga del tableau:

$$x'_j \text{ (o } x_j) \qquad b_j \quad -a_{j,1} \quad -a_{j,2} \quad \dots \quad -a_{j,n}$$

con la riga:

$$x_j \text{ (o } x'_j) \qquad u_j - b_j \quad a_{j,1} \quad a_{j,2} \quad \dots \quad a_{j,n}$$

e proseguendo. Ad esempio:

$$\max\ 3x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_1, x_2 \leq 5 \end{cases}$$

Introdotte le variabili $x'_1 = 5 - x_1$ ed $x'_2 = 5 - x_2$ si sceglie di utilizzare nel tableau proprio x'_1 ed x'_2 dacchè i coefficienti della funzione obiettivo erano entrambi positivi (e quindi?).

$$\max\ 35 - 3x'_1 - 4x'_2$$
$$\begin{cases} -x'_1 - 6x'_2 \leq -32 \\ 0 \leq x'_1, x'_2 \leq 5 \end{cases}$$

La sequenza dei tableau è quindi:

$$\begin{array}{ccc} & & x'_1 & x'_2 \\ z & 35 & -3 & -4 \\ x_3 & -32 & 1 & \boxed{6} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} & & x'_1 & x_3 \\ z & \frac{41}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ x'_2 & \frac{16}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Ora $\frac{16}{3} > 5$ e pertanto la seconda riga del tableau viene sostituita introducendo x_2:

$$\begin{array}{cccc} & & x'_1 & x_3 \\ z & \frac{41}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ x'_2 & -\frac{1}{3} & \boxed{\frac{1}{6}} & -\frac{1}{6} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} & & x_2 & x_3 \\ z & 9 & -14 & -3 \\ x'_1 & 2 & 6 & 1 \end{array}$$

Soluzione ottima: $x_1 = 3$ ed $x_2 = 0$ con funzione obiettivo 9.

Analisi di Sensitività

Supponiamo di massimizzare una funzione obiettivo che rappresenti un profitto o qualche altra forma di beneficio. I vincoli descriveranno limitazioni in materie prime o disponibilità. Allora i valori delle variabili duali esprimeranno il massimo "prezzo" che saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità la disponibilità cui la variabile duale si riferisce. (Da qui il nome di "prezzo ombra" o "valore marginale"). Ricordiamo che tuttavia il significato di un prezzo ombra è strettamente locale e che in generale non sarà conveniente continuare a pagare sulla base del prezzo ombra per un incremento comunque grande di disponibilità. Ci chiediamo ora fino a dove il prezzo ombra é significativo ossia quale sia il massimo incremento di una certa facilità che ha senso promuovere pagando il prezzo ombra. La risposta può essere prodotta agevolmente con riferimento al tableau duale.

Si consideri ad esempio di voler massimizzare il seguente profitto:

$$\max\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

dove x_1, x_2 ed x_3 esprimono dei livelli non-negativi di attività, mentre i coefficienti di destra nei vincoli impongono limiti su determinate disponibilità. Il tableau associato alla soluzione di base ottimale é il seguente.

$$\begin{array}{cc|ccc} & & x_1 & x_2 & x_3 \\ z & 0 & 2 & 6 & 3 \\ x_4 & 5 & -1 & \boxed{-2} & -2 \\ x_5 & 6 & -2 & -1 & -3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cc|ccc} & & x_1 & x_4 & x_3 \\ z & 15 & -1 & -3 & -3 \\ x_2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ x_5 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{array}$$

Pertanto saremmo disposti a pagare (non certo più di) 1 per incrementare di un'unità la disponibilità nel primo vincolo. Ma *quanto* siamo disposti a comperare? Si consideri il duale dell'ultimo tableau:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & y_2 & y_5 \\ z & -15 & & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ y_1 & 1 & & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ y_4 & 3 & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ y_3 & 3 & & 1 & 2 \end{array}$$

Assumiamo di incrementare di D la disponibilità nel primo vincolo. Il vantaggio nel considerare il duale é che l'unica riga ad essere influenzata da questa modifica nel problema è la prima. La nuova riga può essere prodotta attraverso opportune sostituzioni o avvalendosi della prova del nove "per colonne" della PL.

$$\begin{array}{rcccc} & & (0) & (0) & (6) \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & & y_2 & y_5 \\ & z & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ (0) \rightarrow & y_1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ (5+D) \rightarrow & y_4 & 3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ (0) \rightarrow & y_3 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Ricordiamo che per ogni colonna deve valere quanto segue: il valore del coefficiente associato alla colonna deve eguagliare la somma di tutti i coefficienti della colonna, ognuno moltiplicato per il coefficiente della riga a cui appartiene cambiato di segno.

Colonna 1: $(0) = -\alpha_1 + 1(-0) - 3(5+D) + 3(-0) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = -15 - 3D$
Colonna 2: $(0) = -\alpha_2 + \frac{1}{2}(-0) - \frac{1}{2}(5+D) + 1(-0) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_2 = -\frac{5+D}{2}$
Colonna 3: $(6) = -\alpha_3 + \frac{3}{2}(-0) + \frac{1}{2}(5+D) + 2(-0) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_3 = \frac{-7+D}{2}$

Pertanto la riga prodotta è:

$$-15 - 3D \quad -\frac{5+D}{2} \quad \frac{-7+D}{2}$$

Pertanto il tableau resta ottimo fintanto chè D non supera 7. Concludendo 7 è il massimo incremento di diponibilità nel primo vincolo che siamo disposti ad acquistare pagando 1 per ogni unità di incremento. Per determinare il prezzo che siamo disposti a pagare per incrementi superiori (il nuovo prezzo ombra) dobbiamo eseguire un nuovo pivot.