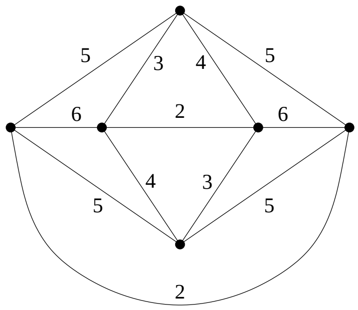
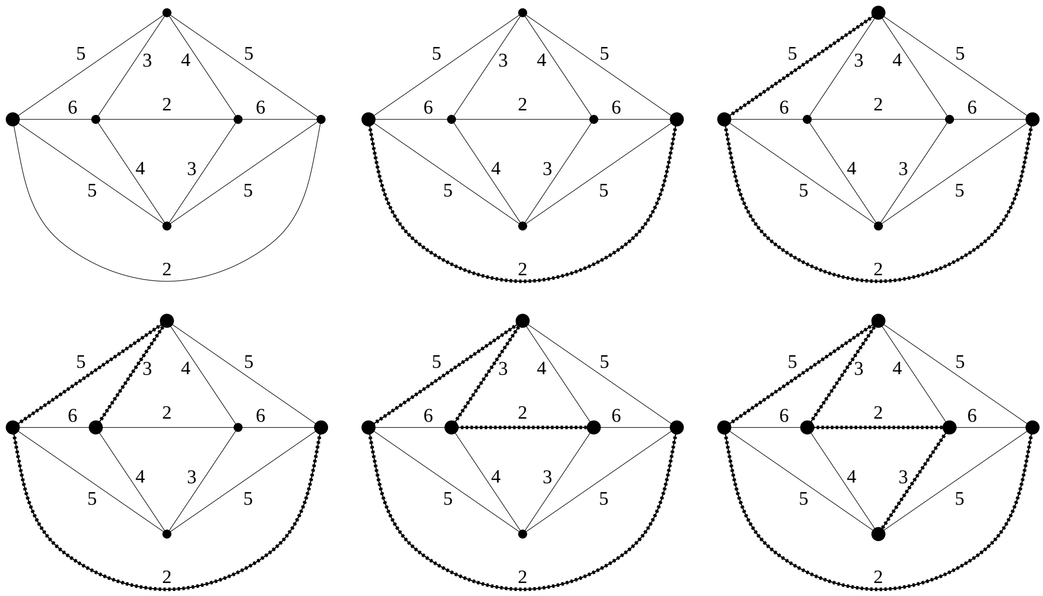
Provetta sulla Programmazione Combinatoria

Esercizio 1:



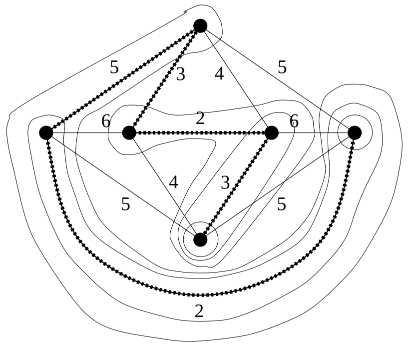
1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo.
2. Fornire un'argomentazione per l'ottimalità.
3. Indicare quali archi siano contenuti in ogni soluzione ottimale.
4. Indicare quali archi non siano contenuti in alcuna soluzione ottimale.
5. Sfruttare le informazioni di cui ai punti 3. e 4. per rappresentare in modo compatto l'insieme delle soluzioni ottime o quantomeno fornire tutte le soluzioni ottime.

L'algoritmo di Prim parte da un nodo e cresce un'arborescenza aggiungendo un nodo alla volta: quello reggiungibile attraverso un arco di minor costo. Quando l'alborescenza ricopre tutti i nodi essa é un albero ricoprente di peso minimo.



Prova di Ottimalità: Sia T l'albero ricoprente di cui voglio dimostrare l'ottimalità. Per ogni arco $e \in T$ fornisco un taglio $\delta(S_e)$ tale che

$$T \cap \delta(S_e) = \{e\} \text{ ed inoltre } c(e) = \min_{f \in \delta(S_e)} c(f)$$



Esercizio 1 *Perchè un tale insieme di tagli, se presente, costituisce prova di ottimalità?*

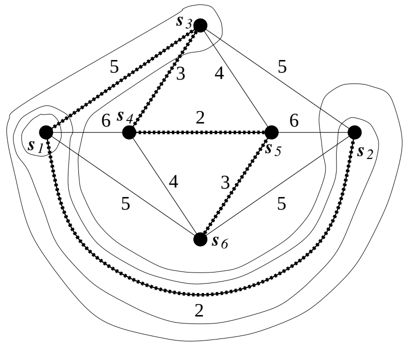
Esercizio 2 *Dimostrare che esiste sempre una tale prova di ottimalità.*

Suggerimento: dimostrare prima che ogni albero ha almeno una foglia (di fatto almeno due), dove per foglia si intende un nodo di grado 1.

Consideriamo ora una seconda via per certificare l'ottimalità di un albero ricoprente T: si dà una familia $\mathcal{S}$ di $n-1$ sottoinsiemi propri $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ di $V(G)$ dove ciascun S_i è ottenuto da S_{i-1} tramite l'aggiunta di un singolo nodo s_i. In particolare S_1 contiene precisamente un nodo s_1. Gli archi in T sono pure $n-1$. Si richiede che ad ogni arco $e \in T$ sia associato un taglio S_e di $\mathcal{S}$ con $e \in S_e$ e tale che

$$c(e) = \min_{f \in \delta(S_e)} c(f)$$

con la condizione che ad archi diversi siano associati tagli diversi. Ad esempio:



Esercizio 3 *Indicare in figura anche i tagli S_4, S_5 ed S_6. (Consiglio di utilizzare diversi colori). Indicare inoltre quali archi di T sono associati ai vari tagli. (Avvalersi ancora dei colori).*

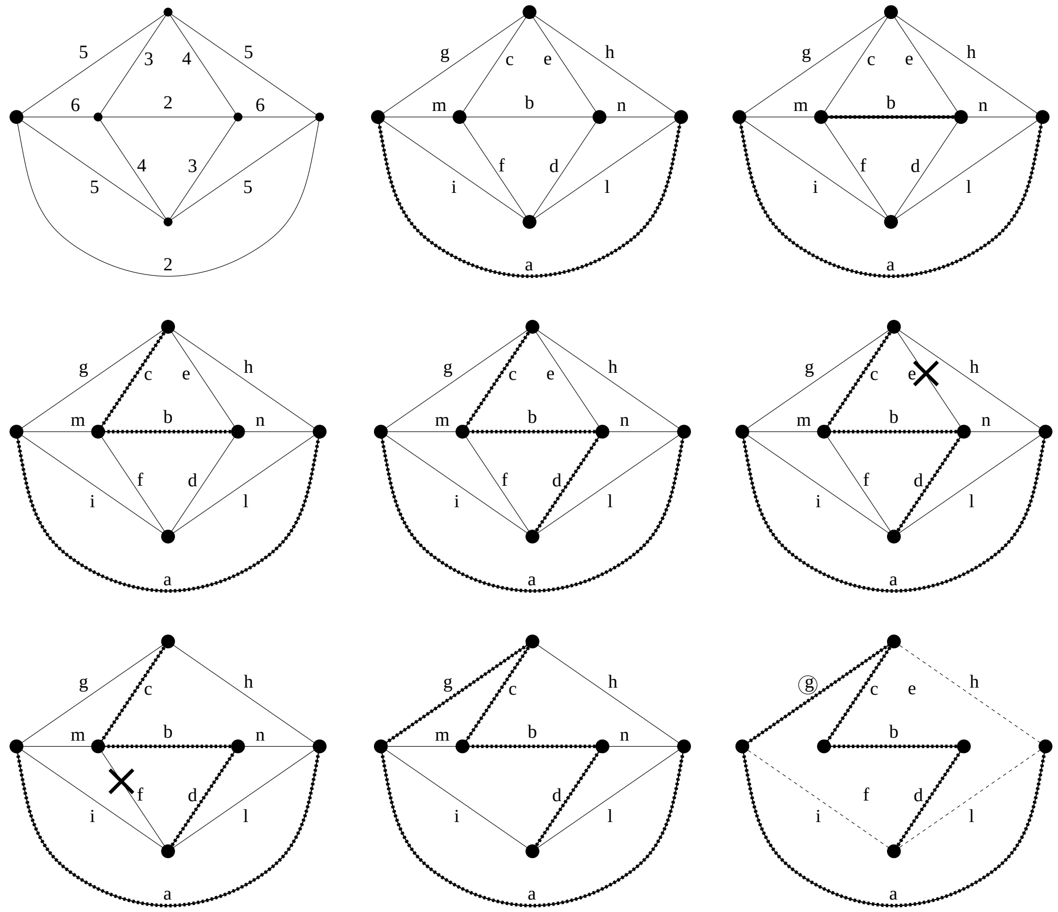
Esercizio 4 *Perchè un tale insieme di tagli, se presente, costituisce prova di ottimalità?*

Osserviamo come la famiglia dei tagli proposti era di fatto ricavata dall'algoritmo di Prim.

Domanda 5 *Posso sempre fornire una tale prova di ottimalità? Perchè?*

Esercizio 6 *Ma allora nell'Esercizio 4 abbiamo di fatto dimostrato la correttezza dell'algoritmo Prim. Vero?*

L'algoritmo di Kruskal ordina dapprima gli archi per peso non decrescente. Gli archi vengono quindi esaminati uno alla volta seguendo tale ordine ed inclusi nella soluzione se e solo se la loro introduzione non porta alla formazione di circuiti.



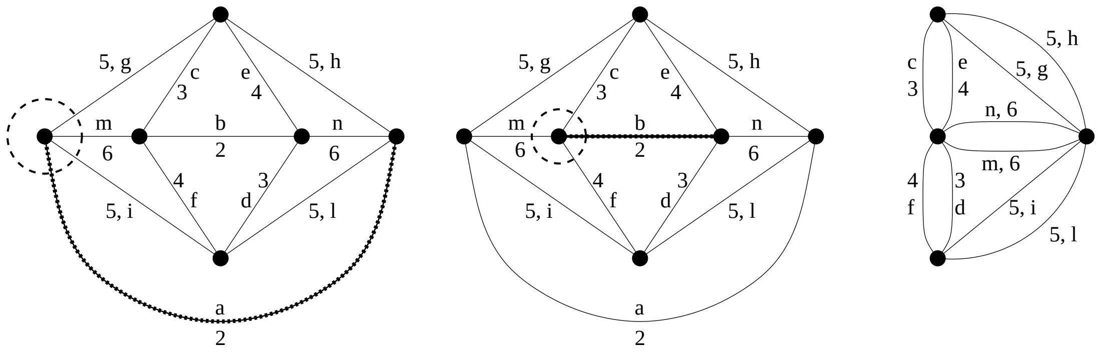
Nel proseguio dell'algoritmo abbiamo deciso di rimuovere dal grafo quegli archi e la cui aggiunta porterebbe a dei circuiti C_e con $c_e > c_f$ per ogni $f \in C_e$. Se invece C_e contiene un arco f con $c(f) = c(e)$ (il caso $c(f) > c(e)$ non può mai verificarsi visto che gli archi sono stati ordinati per peso non decrescente) allora l'arco e non viene incluso nella soluzione ottima ma resta tratteggiato; l'arco f viene inoltre detto *sostituibile* (perchè?). Ciò porta all'ultimo grafo in figura. Gli archi rimossi non possono appartenere ad alcuna soluzione ottima. Per ciascun arco tratteggiato esiste una soluzione ottima che lo contiene; tale soluzione verrà prodotta da Kruskal partendo da un differente ordinamento non decrescente. Le quattro soluzioni ottime sono quindi evidenti nell'ultimo grafo in figura. L'unico arco che risulta sostituibile è l'arco g. Gli archi a, b, c e d sono pertanto inclusi in ogni soluzione ottima.

Prova di Ottimalità: Sia T l'albero ricoprente di cui voglio dimostrare l'ottimalità. Per ogni arco $e \notin T$ fornisco un circuito C_e tale che

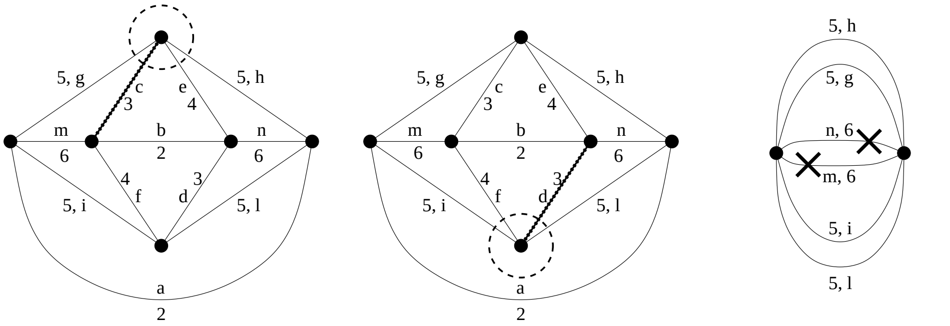
$$c(e) \geq \max_{f \in C_e} c(f)$$

Ovviamente posso restingermi a cercare tale circuito in $T \cup \{e\}$. E tuttavia sappiamo che $T \cup \{e\}$ contiene un unico circuito, detto *circuito fondamentale* di e in T. Esso è pertanto il circuito C_e desiderato. Osserviamo come l'algoritmo di Kruskal, ogni volta che esclude un arco e, già ha in mano un tale c_e.

Vorrei infine risolvere il problema "A MODO MIO" per arrivare più rapidamente e con maggior incisività a determinarne la soluzione. Incomincio con l'osservare che i due archi di peso 2 sono necessariamente contenuti in ogni soluzione ottimale come dimostrano i tagli indicati in figura. (Ad esempio a pesa strettamente meno degli altri archi incidenti nel suo estremo sinistro). Ogni soluzione ottimale sarà pertanto del tipo $T = T' \cup \{a, b\}$ dove T' è un albero ricoprente minimo nel grafo ottenuto contraendo gli archi a e b come suggerito in figura.

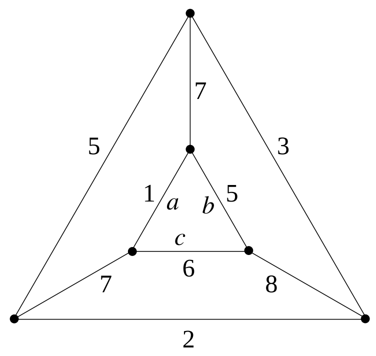


Ora è evidente che i due archi di peso 4 non possono essere utilizzati in alcuna soluzione ottimale dacchè ad essi preferirò sicuramente gli archi di peso 3. Ed invero, che i due archi di peso 3 erano anch'essi contenuti in ogni soluzione ottimale avrei potuto stabilirlo fin dall'inizio osservando i due tagli indicati nella prossima figura. Contraggo pertanto anche gli archi di peso 3. Ovviamente poi posso togliere i loops: non saranno contenuti in alcuna soluzione ottimale.



È ora evidente che i due archi di peso 6 non possono essere inclusi da alcuna soluzione ottimale. Una soluzione ottimale sarà pertanto del tipo $T = \{a, b, c, d\} \cup T'$ dove T', albero ottimo nell'ultimo grafo rappresentato in figura, sarà costituito da uno dei seguenti quattro archi g, h, i, l. Ho pertanto 4 soluzioni ottime.

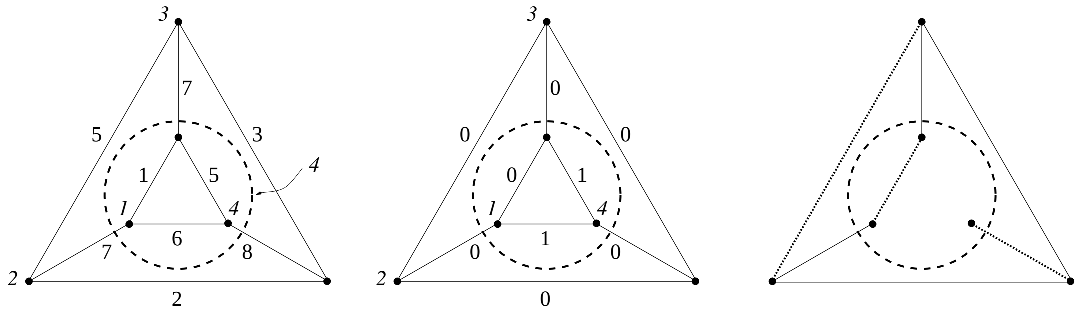
Esercizio 2:



1. Trovare un accoppiamento perfetto di peso minimo.
2. Fornire un certificato di ottimalità.
3. Dare tutti gli accoppiamenti perfetti di peso minimo argomentando come essi siano i soli.

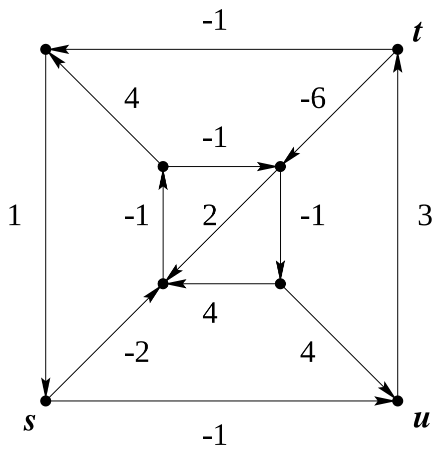
Ci sono 4 accoppiamenti perfetti in tutto:
quello che contiene l'arco a, che pesa 14
quello che contiene l'arco b, che pesa 15
quello che contiene l'arco c, che pesa 15
quello che non contiene né a, né b, né c, che pesa 22.

Pertanto ho un solo accoppiamento perfetto ottimo: quello che contiene l'arco a. Una prova alla Edmonds della sua ottimalità è data dalla soluzione duale indicata in figura cui corrispondono i costi ridotti lì riportati.



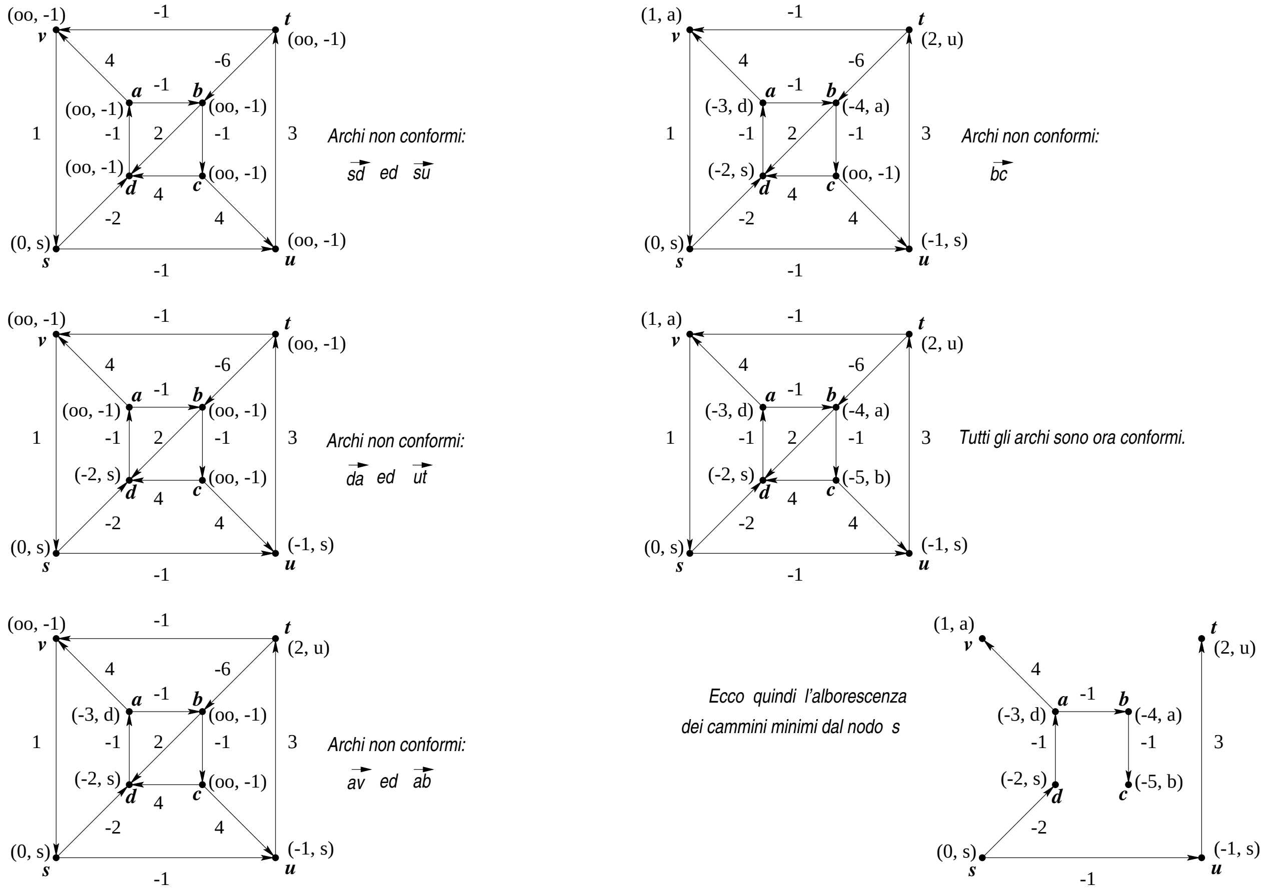
È poi facile verificare come negli archi a costo ridotto nullo (terzo grafo in figura), vivano solamente due accoppiamenti perfetti: quello comprendente l'arco a e quello che non contiene né a, né b, né c. Di questi due, solo il primo verifica la condizione di prendere precisamente un arco dal taglio dispari a variabile duale positiva ed indicato in figura dalla circonferenza tratteggiata. Pertanto solo l'accoppiamento comprendente l'arco a è ottimo.

Esercizio 3:

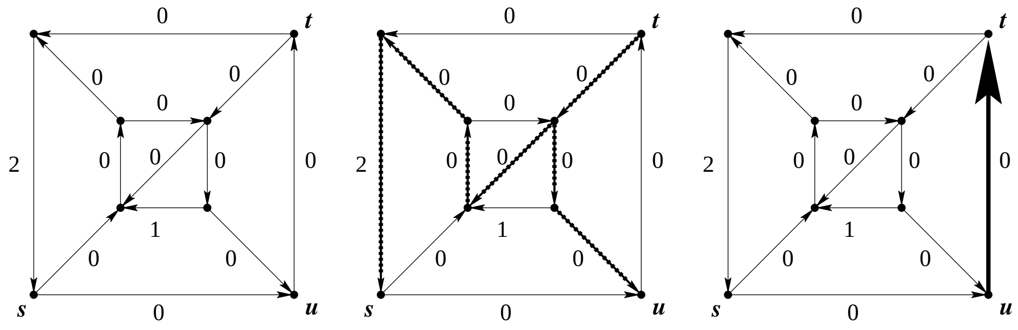


1. Trovare l'alborescenza dei cammini minimi da s.
2. Trovare i cammini minimi da t a tutti gli altri nodi.
3. Trovare il cammino di costo minimo da u a t.

Per trovare l'alborescenza dei cammini minimi da s utilizzo l'algoritmo di Ford. Per ogni nodo devo registrare il costo del miglior cammino trovato ed il padre (nodo precedente) lungo tale cammino.



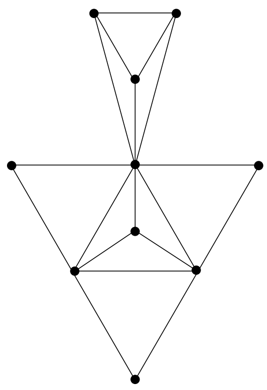
Ora che tutti gli archi sono conformi, tutti i costi ridotti saranno non negativi. Converrà pertanto cercare l'alborescenza dei cammini minimi da t ed il cammino minimo da u a t nel grafo dei costi ridotti. Ecco pertanto la risposta alle ulteriori due domande.



I costi ridotti *L'alborescenza ottima da t* *Cammino minimo da u a t*

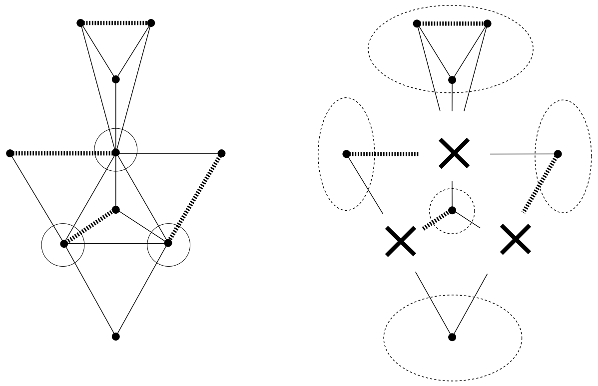
Esercizio 7 *Quali archi posso rimuovere senza incrementare la distanza da x a y per nessuna coppia di nodi x, y?*

Esercizio 4:



1. Dare un accoppiamento di cardinalità massima ed un certificato di ottimalità.
2. Era possibile in questo caso fornire un certificato di ottimalità in termini di copertura per nodi?
3. Si consideri l'algoritmo di Edmonds per trovare un accoppiamento di massima cardinalità. Fornire un grafo che costringa l'algoritmo a contrarre almeno un "blossom" e giustificare la risposta.
4. Dare un grafo non bipartito dove la massima cardinalità di un accoppiamento pareggi la minima cardinalità di una copertura per nodi.

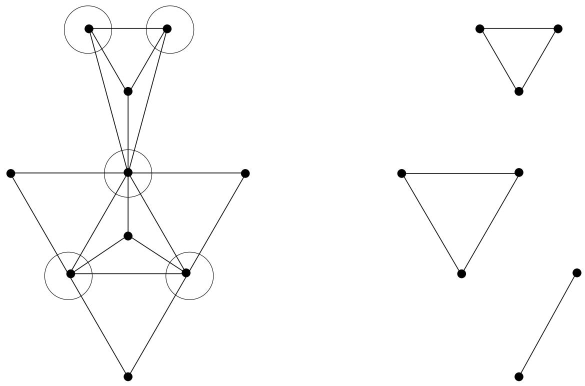
Un accoppiamento di cardinalità massima è dato in figura assieme ad una prova di Tutte-Berge della sua ottimalità:



Quando i 3 nodi circolettati vengono rimossi, mi ritrovo con 5 componenti dispari. Pertanto ogni accoppiamento avrà nodi esposti in almeno due delle componenti dispari sopra individuate.

Esercizio 8 *Sapresti indicare tre archi che non sono contenuti in alcun accoppiamento di cardinalità massima?*

Per dimostrare che una copertura per nodi richiede almeno cinque nodi si consideri il seguente sottografo (a destra) del grafo proposto (a sinistra).



Una copertura per nodi dovrà prendere almeno due nodi da ogni triangolo ed almeno un estremo dell'arco isolato. Una copertura di 5 nodi è inoltre indicata in figura.

Il grafo proposto in questo esercizio costringerà l'algoritmo di Edmonds a contrarre almeno un "blossom" poichè altrimenti l'algoritmo terminerebbe con una dimostrazione in termini di copertura per nodi che noi abbiamo appena dimostrato non esistere.

Un esempio di grafo non bipartito dove peró la cardinalità massima di un accoppiamento pareggia la cardinalità minima di una copertura per nodi é il seguente: