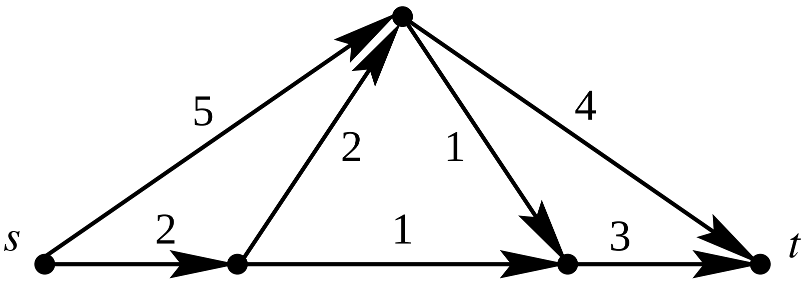
Programmazione Matematica

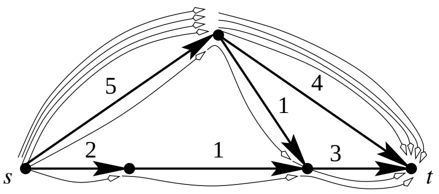
Correzione Compito del 29 Ottobre 1998

Problema 1:

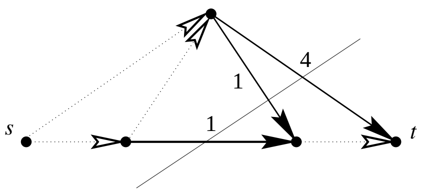


1. Fornire un flusso massimo da s a t.
2. Fornire un'argomentazione per l'ottimalità.
3. Di quali archi posso ridurre la capacità senza ridurre il valore del flusso massimo?
4. Formulare come un problema di PL dove le variabili di decisione definiscano una circolazione.
5. Scrivere il duale.
6. Fornire una soluzione primale ottima ed una soluzione duale ottima.

Flusso e taglio ottimo sono riportati in figura:

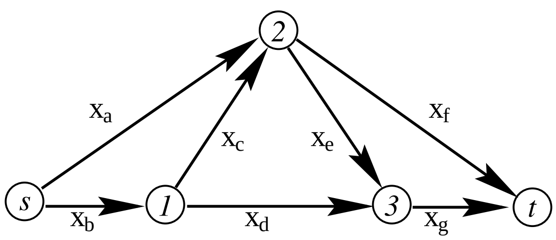


E' possibile inviare 6 unita' di flusso.



Non e' possibile inviare piu' di 6 unita' di flusso.

Introduco le variabili di decisione ed etichetto i nodi come suggerito in figura:



La circolazione di valore massimo può essere reperita risolvendo il seguente problema di PL.

Question 1 *Sapresti spiegare come la circolazione di valore massimo possa essere reperita risolvendo il seguente problema di PL? Sapresti spiegarne il perchè?*

$$\max\ x_a + x_b$$
$$\begin{cases} x_b - x_c - x_d = 0 \\ x_a + x_c - x_e - x_f = 0 \\ x_d + x_e - x_g = 0 \\ 0 \leq x_a \leq 5 \\ 0 \leq x_b \leq 2 \\ 0 \leq x_c \leq 2 \\ 0 \leq x_d \leq 1 \\ 0 \leq x_e \leq 1 \\ 0 \leq x_f \leq 4 \\ 0 \leq x_g \leq 3 \end{cases}$$

Scrivo il problema duale. Avrò delle variabili duali di nodo (λ_1, λ_2 e λ_3) e delle variabili duali di arco ($\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d, \lambda_e, \lambda_f$ e λ_g). Queste ultime dovranno essere non-negative.

$$\min\ 5\lambda_a + 2\lambda_b + 2\lambda_c + \lambda_d + \lambda_e + 4\lambda_f + 3\lambda_g$$
$$\begin{cases} \lambda_a + \lambda_2 \leq 1 \\ \lambda_b + \lambda_1 \leq 1 \\ \lambda_c + \lambda_2 - \lambda_1 \leq 0 \\ \lambda_d + \lambda_3 - \lambda_1 \leq 0 \\ \lambda_e + \lambda_3 - \lambda_2 \leq 0 \\ \lambda_f - \lambda_2 \leq 0 \\ \lambda_g - \lambda_3 \leq 0 \\ \lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d, \lambda_e, \lambda_f, \lambda_g \geq 0 \end{cases}$$

Riesci ad estrapolare la struttura del problema duale per un generico problema primale di circolazione massima in un digrafo capacitato?

Si osservi che

$$x_a = 5, x_b = 1, x_c = 0, x_d = 1, x_e = 1, x_f = 4, x_g = 2$$

per il primale, e

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_a = 0, \lambda_b = 0, \lambda_c = 0, \lambda_d = 1, \lambda_e = 1, \lambda_f = 1, \lambda_g = 0$$

per il duale, sono soluzioni ammissibili. Entrambe le soluzioni danno 6 come valore della rispettiva funzione obiettivo. Entrambe le soluzioni sono pertanto ottime. (Perchè?)

Question 2 *Che relazione sussiste tra la soluzione primale ed un massimo flusso? Che relazione sussiste tra la soluzione duale ed un minimo taglio?*

Question 3 *Utilizzando gli scarti complementari ti sarebbe possibile ricostruire la soluzione duale ottima a partire da quella primale? E viceversa? Sai dartene una motivazione?*

Problema 2:

$$\max\ x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 \ + 2x_2 \ \le \ 4 \\ x_2 \ + 2x_1 \ \le \ 3 \\ x_1 \ \le \ 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1. Risolvere sia per via grafica che algebricamente.
2. Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto nel primo o secondo vincolo? E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo?
3. Di quanto dovremmo alterare ciascun coefficiente nella funzione obiettivo (singolarmente) affinchè la soluzione non sia più ottima?

Problema 3:

$$\max\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$
$$\begin{cases} \quad\ \ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \le 3 \\ x_1 - x_2 \qquad\quad + x_4 + x_5 - x_6 \le 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 \le 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Si consideri la soluzione: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_5 = \frac{5}{6}$, $x_6 = \frac{2}{3}$, $x_3 = x_4 = 0$.

1. È ammissibile?
2. È ottima?
3. È di base?
4. Trovare le soluzioni ottime di base. (Avvalersi del lavoro svolto al punto **2.**).

Verifica Ammissibilità:

$$\begin{cases} \quad (\frac{2}{3}) + 2(0) + 3(0) + 2(\frac{5}{6}) + (\frac{2}{3}) = 3 \le 3 \\ (\frac{3}{2}) - (\frac{2}{3}) \qquad + (0) + x_5 - (\frac{2}{3}) = 1 \le 1 \\ (\frac{3}{2}) + (\frac{2}{3}) + (0) + 2(0) - (\frac{5}{6}) + (\frac{2}{3}) = 2 \le 2 \\ x_1 = \frac{3}{2} \ge 0,\ x_2 = x_6 = \frac{2}{3} \ge 0,\ x_5 = \frac{5}{6} \ge 0 \end{cases}$$

la soluzione proposta è ammissibile

VERIFICO SE È DI BASE:

la soluzione proposta non può essere di base poichè presenta 4 variabili di decisione non nulle contro 3 soli vincoli nella formulazione primale assegnata.

VERIFICA OTTIMALITÀ:

Considero il problema duale:

$$\min \; w = 3y_7 + y_8 + 2y_9$$
$$\begin{cases} \quad\quad y_8 + y_9 \geq 1 \\ y_7 - y_8 + y_9 \geq 1 \\ 2y_7 \quad\quad + y_9 \geq 1 \\ 3y_7 + y_8 + 2y_9 \geq 1 \\ 2y_7 + y_8 - y_9 \geq 1 \\ y_7 - y_8 + y_9 \geq 1 \\ y_7, y_8, y_9 \geq 0 \end{cases}$$

Utilizzo gli scarti complementari:

$x_1, x_2, x_5, x_6 > 0 \Longrightarrow$ I^o, II^o, V^o e VI^o vincolo del duale soddisfatto ad eguaglianza

Ottengo quindi il sistema:

$$\begin{cases} \quad\quad y_8 + y_9 = 1 \\ y_7 - y_8 + y_9 = 1 \\ 2y_7 + y_8 - y_9 = 1 \\ y_7 - y_8 + y_9 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema giungo a proporre la seguente soluzione per il duale:

$$y_7 = \frac{2}{3}; \quad y_8 = \frac{1}{3}; \quad y_9 = \frac{2}{3}$$

Verifico ora l'ammissibilità di tale soluzione:

$$\begin{cases} \quad\quad (\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3}) = 1 \geq 1 \\ (\frac{2}{3}) - (\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3}) = 1 \geq 1 \\ 2(\frac{2}{3}) \quad\quad + (\frac{2}{3}) = 2 \geq 1 \\ 3(\frac{2}{3}) + (\frac{1}{3}) + 2(\frac{2}{3}) = \frac{11}{3} \geq 1 \\ 2(\frac{2}{3}) + (\frac{1}{3}) - (\frac{2}{3}) = 1 \geq 1 \\ (\frac{2}{3}) - (\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3}) = 1 \geq 1 \\ y_7 = \frac{2}{3} \geq 0, \;\; y_8 = \frac{1}{3} \geq 0, \;\; y_9 = \frac{2}{3} \geq 0 \end{cases}$$

Siccome abbiamo una soluzione primale ammissibile ed una soluzione duale ammissibile che soddisfano gli scarti complementari posso di già concludere per l'ottimalità di tali soluzioni.

In effetti i valori delle funzioni obiettivo in corrispondenza di tali soluzioni coincidono.

$$z = \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) + (0) + (0) + \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}} = 3\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) = w$$

la soluzione proposta è ottima ed un certificato di ottimalità è costituito dalla soluzione duale da noi reperita attraverso le condizioni degli scarti complementari.

Trovo le soluzioni ottime di base:

Nel fare questo mi avvarrò del certificato di ottimalità. Più precisamente la soluzione duale ottima sopra reperita caratterizzerà (tramite gli scarti complementari) l'insieme di tutte le soluzioni ottime.

Utilizzo gli scarti complementari:

$$y_7, y_8, y_9 > 0 \Longrightarrow \text{I}^o,\ \text{II}^o \text{ e III}^o \text{ vincolo del primale soddisfatto ad eguaglianza}$$

Inoltre:

$$\text{III}^o \text{ e IV}^o \text{ vincolo del duale soddisfatto a diseguaglianza} \Longrightarrow x_3, x_4 = 0$$

L'insieme delle soluzioni ottime è pertanto il seguente:

$$\begin{cases} \quad\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 - x_2 \qquad\ + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 2 \\ x_3, x_4 = 0 \\ x_1, x_2, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Eliminiamo la x_3 e la x_4 che sono nulle. Osserviamo inoltre che sommando la seconda e la terza equazione otteniamo $x_1 = \frac{3}{2}$. Una formulazione più compatta per l'insieme delle soluzioni ottime è pertanto la seguente:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ x_2 - x_5 + x_6 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ x_3, x_4 = 0, x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

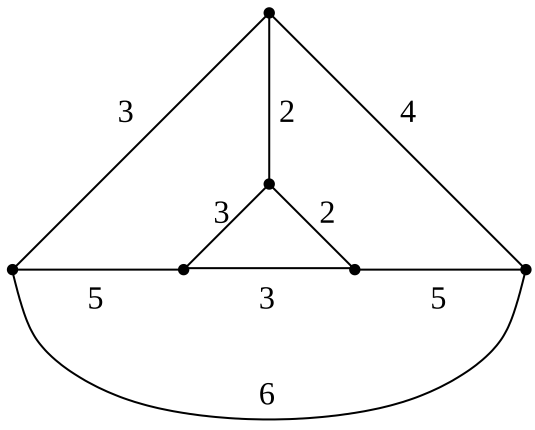
Il numero delle possibili basi sarà pertanto $\binom{3}{2} = 3$ ossia in quanti modi posso scegliere le due variabili da metere in base tra x_2, x_5 ed x_6.

Le tre soluzioni ottime di base sono:

$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = x_3, x_4 = 0, x_5 = \frac{5}{6}, x_6 = \frac{4}{3}$	Ammissibile!
$x_1 = \frac{3}{2}, x_5 = x_3, x_4 = 0, x_2 = ?, x_6 = ?$	Non posso invertire. Non è una base!
$x_1 = \frac{3}{2}, x_6 = x_3, x_4 = 0, x_5 = \frac{5}{6}, x_2 = \frac{4}{3}$	Ammissibile!

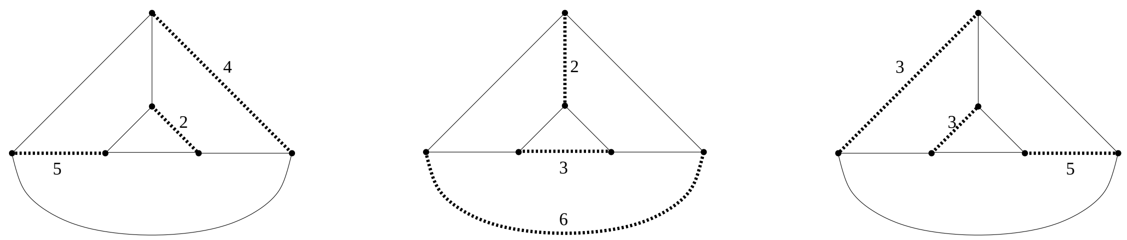
Di fatto avrei potuto arrivare direttamente alla stessa conclusione osservando come nel problema originario le variabili x_2 ed x_6 svolgessero ovunque il medesimo ruolo.

Problema 4:

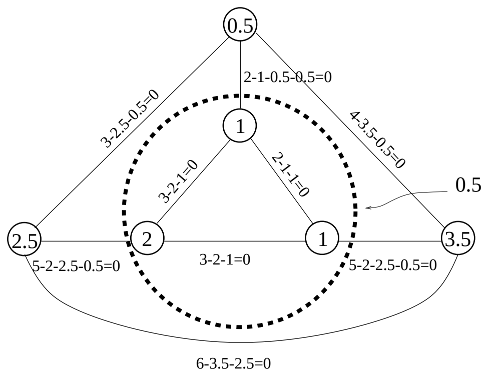


1. Fornire un accoppiamento perfetto di peso minimo.
2. Fornire un certificato di ottimalità.
3. Indicare quali accoppiamenti perfetti siano ottimi, motivando la risposta con riferimento al certificato di ottimalità fornito al punto **2.**).

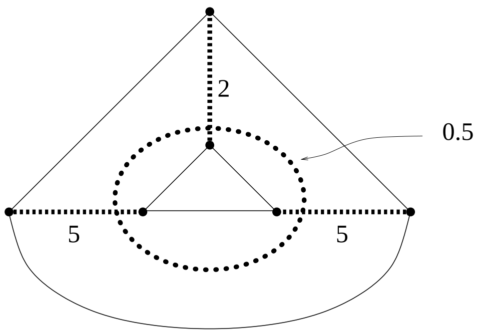
Gli accoppiamenti ottimi sono i seguenti.



Il certificato di ottimalità è il seguente:



Siccome il costo ridotto di ogni arco è zero tutti gli accoppiamenti perfetti, eccetto quelli che intersecano la componente dispari associata alla variabile duale di valore 0.5, sono ottimi. In pratica l'unico accoppiamento non ottimo è il seguente (interseca 3 volte tale componente dispari):



Problema 5_(coincisione, chiarezza e semplicità)_**:**

1. Dimostrare la formula di Eulero per grafi planari
2. Utilizzare la formula di Eulero per dimostrare che K_5 e $K_{3,3}$ non sono planari.

Data una rappresentazione piana di un grafo G, sia n il numero dei nodi, m il numero degli archi ed f il numero delle facce. (In principio potrebbero esistere grafi in cui f dipende dalla particolare rappresentazione piana scelta). Qualora G sia connesso, la formula di Eulero recita: $f = m - n + 2$. Sia T un albero ricoprente di G. Qualora G sia aciclico (ossia $G = T$) abbiamo $m = n - 1$ e poichè $f = 1$ la formula risulta verificata. Altrimenti G contiene un arco non in T ossia è stato ottenuto da un altro grafo connesso aggiungendo un arco. Tuttavia l'aggiunta di un arco non altera n ed incrementa m ed f entrambi di 1.

Exercise 1 _Generalizzare la formula di Eulero al caso di k componenti connesse._

Question 4 _Esistono davvero grafi planari per cui f dipende dalla particolare rappresentazione piana scelta? Perchè?_

Indichimao con $K_5{}^*$ il duale di K_5 ossia quel grafo planare ottenuto da una rappresentazione piana di K_5 ponendo un nodo al centro di ogni faccia e congiungendo (con archi) i nodi relativi a faccie confinanti. In pratica K_5 e $K_5{}^*$ avranno lo stesso numero di archi.

$K_5{}^*$ dovrebbe avere $f = 10-5+2 = 7$ nodi. Siccome K_5 è semplice (nè autoanelli nè archi paralleli), ogni nodo di $K_5{}^*$ ha grado almeno 3. Ma allora $K_5{}^*$ ha almeno $\lceil \frac{3*7}{2} \rceil = \lceil \frac{21}{2} \rceil = 11$ archi. Contraddizione!

Exercise 2 _Dimostrare che $K_{3,3}$ è non planare._ Sugg: Occorre avvalersi del fatto che $K_{3,3}$ non solo è semplice ma anche bipartito (e quindi senza triangoli).