Mappiamo i nostri modelli di knapsack nel grande modello della PLI

obiettivo nel presente documento:

La Ricerca Operativa studia modelli matematici per i problemi nelle applicazioni e, come disciplina matematica interessata alle soluzioni algoritmiche ultime, studia altresì le relazioni gerarchiche presenti tra questi modelli.

Ad esempio, con riferimento ai due modelli di knapsack introdotti nel precedente documento (`knapsack_prob.pdf`).

Knapsack 1 (il knapsack non-pesato)

INPUT: Due numeri naturali n, B ed un insieme di n oggetti descritti ciascuno da un peso, p_i per ogni $i = 1, \ldots, n$.

OUTPUT: Trovare un sottoinsieme S degli oggetti assegnati in input, a somma dei pesi non eccedente il budget assegnato B, e minimizzando la parte di CD che non risulta utilizzata.

Knapsack 2 (il knapsack pesato)

INPUT: Due numeri naturali n, B ed un insieme di n oggetti descritti ciascuno da una coppia valore/peso, (v_i, p_i) per ogni $i = 1, \ldots, n$.

OUTPUT: Trovare un sottoinsieme S degli oggetti assegnati in input, a somma dei pesi non eccedente il budget assegnato B, e massimizzando il valore totale raccolto.

è facile convincersi che il secondo modello "contiene" in un certo qual senso il primo. In effetti, ogni istanza del primo modello puó essere efficamente rappresentata attraverso un'istanza del secondo modello semplicemente definendo $v_i := p_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Pertanto, se riesco ad entrare in possesso di un buon Solutore per istanze del secondo modello posso avvalermene per risolvere istanze del primo modello.

Scopo del presente documento è mappare ora entrambi questi due modelli di knapsack nel modello generale della **P**rogrammazione **L**ineare **I**ntera (PLI). Questo in pratica ci consentirà di risovere entrambi i problemi senza dover progettare alcun algoritmo, ma avvalendoci invece dei Solutori disponibili per la PLI. La notizia grandiosa consegnataci dalla teoria è che, dato che la PLI è un problema NP-completo, questa mappatura nella PLI può essere fatta per ogni problema in NP (la classe dei problemi **NP**ortanti **N**elle a**P**plicazioni). In questo documento scopriremo come, teoria a parte, questa mappatura tipicamente risulti di fatto assai facile da compiersi.

il modello della PLI:

Domanda: Quali problemi (= famiglie di istanze) consente di esprimere la PLI?

Risposta: sono consentiti problemi come il seguente

$$\max\ 3\,x_1 + 2\,x_2 - 5\,x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 - 7\,x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_3 \quad \text{a valori interi} \end{cases}$$

Nel rappresentare un'istanza di problema generica (ad esempio, nel nostro caso, un'istanza di knapsack generica, dove cioè il numero n di oggetti e variabili in gioco è da trattarsi come un parametro), dovremo ovviamente avvalerci di scritture all'apparenza più libere, ma comunque consentite, tipo:

$$\min \; \sum_{i=1}^{n} (17+2i)\, x_i$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(19+(i-1)^{21})x_i & \leq & 23 \\ x_i & \leq & 27 \text{ per ogni } i=1,\ldots,n \\ x_i & \geq & 0 \text{ per ogni } i=1,\ldots,n \\ x_i & & \text{intero per ogni } i \text{ dispari} \end{cases}$$

La mappatura dei nostri problemi di knapsack nella PLI:

Procediamo ora col formulare come un modello di Programmazione Lineare Intera (PLI) i nostri due modelli di zaino. In realtà basterebbe fare questo lavoro solo con il secondo e più generale modello, poichè abbiamo già indicato come ridurre il primo modello al secondo. Preferisco però incominciare dal primo, in modo da incedere gradualmente e SOPRATTUTTO, consetirti di cimentarti con la mappatura del secondo e più generale modello dopo aver visto come si fa in occasione del primo.

Si lavora come segue: Introduciamo una variabile booleana x_i per ogni $i = 1,\ldots,n$. Nelle nostre intenzioni, $x_i = 1$ significa che l'oggetto i-esimo viene preso nella soluzione S. Se $x_i = 0$ l'oggetto non viene utilizzato. Si perviene alla seguente formulazione di PLI.

$$\min \; B - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i & \leq & B \\ x_i & \leq & 1 \text{ per ogni } i=1,\ldots,n \\ x_i & \geq & 0 \text{ per ogni } i=1,\ldots,n \\ x_i & & \text{intero per ogni } i=1,\ldots,n \end{cases} \tag{1}$$

Generalizziamo al knapsack pesato:

Ti suggerisco di provare prima tu a mappare il knapsack pesato nella PLI, se ci riesci, stai portando a casa il mestiere.

In caso contrario, la soluzione è poi questa:

Introduciamo una variabile booleana x_i per ogni $i = 1,\ldots,n$. Nelle nostre intenzioni, $x_i = 1$ significa che l'oggetto i-esimo viene preso nella soluzione S. Se $x_i = 0$ l'oggetto non viene utilizzato. Si perviene alla seguente formulazione di PLI.

$$\max \; \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i & \leq & B \\ x_i & \leq & 1 \text{ per ogni } i=1,\ldots,n \\ x_i & \geq & 0 \text{ per ogni } i=1,\ldots,n \\ x_i & & \text{intero per ogni } i=1,\ldots,n \end{cases} \tag{2}$$

Ed eccovi un'istanza specifica di knapsack pesato:

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N
peso	2	13	14	6	13	3	11	16	4	46	41	44
valore	11	63	60	33	30	13	60	66	20	66	60	20

Sapresti scrivere l'istanza di PLI cui perverresti applicando la mappatura da knapsack 2 a PLI proposata sopra con la Formulazione (**??**)?

Prova a dare questa istanza di PLI in pasto a qualche solver (ne trovi anche di disponibili online ad esempio ai seguenti siti:

`http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html`

`https://www.easycalculation.com/operations-research/simplex-method-calculator.php`

`http://www.neos-server.org/neos/solvers/`

) per ottenere la soluzione al tuo problema di knapsack (e in realtà trovare la masterizzazione ottima per il CD di Mario, poichè io l'istanza di knapsack proposta qui sopra l'avevo ottenuta partendo proprio dal problema del mio amico Mario).

Ovviamente sarebbe bello se io al Solver potessi dare solo il modello di PLI astratto, come visto nella Formulazione (**??**), più ovviamente fargli avere tutti i numeretti specifici all'istanza in input, invece che dovergli fare avere un'istanza di PLI specifica e quindi di dimensione descrittiva varibile come quella che ti ho chiesto di produrre come esercizio qui sopra, per poi doverla passare ai Solver online. In fondo la Formulazione (**??**) specifica con precisione ciò che va fatto, ossia questo passo dovrebbe essere automatizzabile e subordinabile allo schiacciare un unico bottone.

Ebbene, i cosidetti linguaggi di modellazione matematica (come AMPL e GMPL) consentono proprio di fare questo. Il nostro percorso didattico prosegue ora con il tradurre la Formulazione (**??**) in tali linguaggi. Prova a compiere tu autonomamente questo passo esplorativo di AMPL o GMPL, od altrimenti vedi le soluzioni da noi proposte nelle rispettive cartelle per poi essere in grado di fare tu gli ulteriori esercizi, o modellarti e risolvere problemi delle applicazioni.