

Esame di Ricerca Operativa - 28 settembre 2012

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

- CORREZIONE -

Problema 1 (6 punti):

Un robot R , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella E-9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	3	0	1	0	1	0	0	•
B	2	0	0	•	0	•	0	1	0
C	0	1	1	•	0	1	1	1	0
D	1	1	1	0	0	1	•	•	1
E	3	0	1	•	0	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-1 alla cella A-2), il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-1 alla cella B-1), ed infine il **passo diagonale** (ad esempio dalla cella A-1 alla cella B-2). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) è presente un valore intero che esprime un guadagno che viene ottenuto se il robot passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare il guadagno complessivo raccolto con la traversata.

- 1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?
- 1.2(1pt) e se la partenza è in B-3?
- 1.3(1pt) e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in E-6?
- 1.4(1pt) e se con partenza in A-1 ed arrivo in E-9 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?
- 1.5(1pt) Quale è il massimo guadagno raccoglibile nella traversata da A-1 a E-9?
- 1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che consegnano questo guadagno massimo?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si è computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella E-9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	243	113	63	53	39	25	17	5	•
B	90	40	10	•	14	•	8	4	1
C	30	20	10	•	10	4	2	2	1
D	5	5	5	5	4	2	•	•	1
E	0	0	0	•	1	1	1	1	1

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A-1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>A</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	•
<i>B</i>	1	3	5	•	2	•	2	4	5
<i>C</i>	1	5	13	•	2	4	6	12	21
<i>D</i>	1	7	25	38	40	46	•	•	33
<i>E</i>	1	9	41	•	78	164	210	210	243

Ritrovare il valore 243 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.

La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella *C*, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella *A*-1 alla cella *C*. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella *C*, il numero di tali percorsi di massimo valore.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>A</i>	0 ₁	3 ₁	3 ₁	4 ₁	4 ₁	5 ₁	5 ₁	5 ₁	•
<i>B</i>	2 ₁	3 ₁	3 ₂	•	4 ₂	•	5 ₂	6 ₄	6 ₄
<i>C</i>	2 ₁	4 ₁	5 ₁	•	4 ₂	5 ₂	6 ₄	7 ₈	7 ₈
<i>D</i>	3 ₁	5 ₁	6 ₂	6 ₂	6 ₂	7 ₂	•	•	8 ₁₆
<i>E</i>	6 ₁	6 ₁	7 ₃	•	6 ₂	7 ₄	7 ₄	8 ₄	8 ₂₀

Leggendo i valori riportati nella cella *E*-9 scopriamo che il massimo valore raccogliabile dal robot lungo la sua traversata è di 8, e che esistono 20 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
<i>A</i> -1 → <i>E</i> -9	243
<i>B</i> -3 → <i>E</i> -9	10
<i>A</i> -1 → <i>E</i> -6	164
passaggio per <i>D</i> -5	$4 \cdot 46 = 184$
massimo valore	8
numero di max-val paths	20

Problema 2 (2+2=4 punti):

La PhotoMegaLux, azienda leader nella produzione di materiali ad uso fotografico, sta studiando i tempi di reazione di un nuovo acido per lo sviluppo di fotografie professionali. Sperimentalmente sono stati calcolati i tempi di sviluppo di una fotografia in base alla quantità di acido impiegato. In tabella sono riportati i tempi di sviluppo t in funzione delle quantità q di acido, per come rilevati empiricamente su 5 campioni di un provino.

campione	1	2	3	4	5
litri	0.3	0.5	0.6	0.7	0.9
secondi	30	15	4.5	3.5	2.6

La colonna $(i + 1)$ -esima della tabella ($1 \leq i \leq 5$) dice che sul campione i , dove sono stati utilizzati q_i litri di acido, la reazione ha avuto luogo in t_i secondi.

Sulla base dei dati sperimentali si vuole trovare una legge del tipo $t = Aq^2 + Bq + C$ che approssimi il più possibile l'andamento del tempo di reazione dell'acido. In particolare, si vorrebbe determinare una tripla di valori per i coefficienti A , B e C in modo che lo scostamento massimo $\max_{i=1}^5 |t_i - Aq_i^2 - Bq_i - C|$ sia il più contenuto possibile.

Fornire un modello di programmazione lineare per tale problema. Meglio (+2pt) se il modello viene fornito in forma astratta in modo da riferirsi ad un numero n arbitrario di campioni le cui misure possano essere prese in input da un database che raccolga i dati (una sequenza di n coppie (q_i, t_i)) raccolti in un ipotetico esperimento.

svolgimento.

Dobbiamo determinare il valore di tre variabili: A , B e C . Oltre ad esse, consideriamo le n quantità $\epsilon_i = |t_i - Aq_i^2 - Bq_i - C|$ (per $i = 1, 2, \dots, n$), ed introduciamo la variabile $\epsilon = \max_{i=1}^n \epsilon_i$.

L'obiettivo è quello di minimizzare il massimo scostamento, ossia

$$\min \epsilon,$$

dove, per $i = 1, 2, \dots, n$, sarà nostra cura riportare i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} \epsilon &\geq t_i - Aq_i^2 - Bq_i - C \\ \epsilon &\geq Aq_i^2 + Bq_i + C - t_i \end{aligned}$$

Si noti che sia la funzione obiettivo che i $2n$ vincoli sono lineari nelle 4 variabili A , B , C ed ϵ . I coefficienti t_i , q_i^2 e q_i sono valori numerici ricavabili direttamente o per calcolo immediato dal database.

Problema 3 (2+1 punti):

Vogliamo annunciare ad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 il luogo scelto per il prossimo ritrovo tra amici. Conosciamo gli indirizzi delle seguenti mailing list: $L_1 = \{1, 2, 3\}$, $L_2 = \{1, 5, 6\}$, $L_3 = \{3, 4, 5\}$, $L_4 = \{1, 4, 7\}$, $L_5 = \{2, 5, 7\}$, $L_6 = \{3, 6, 7\}$, $L_7 = \{2, 4, 5\}$, $L_8 = \{1, 8\}$, $L_9 = \{7, 8\}$.

Se da un lato vogliamo assolutamente che l'annuncio sia inviato a ciascun amico, dall'altro ci scoccia inviare messaggi ridondanti. Complessivamente, vogliamo minimizzare il numero di messaggi ridondanti.

(2pt) Esprimere come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il nostro piccolo problema di ottimizzazione combinatoria.

(2pt) Indicare come vada espresso in generale il problema del "SETCOVER pesato" in cui, data in input una famiglia L_1, L_2, \dots, L_m di sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, n\}$, ed una funzione di costo $c : \{1, 2, \dots, n\} \mapsto \mathbb{R}$, viene chiesto di individuare un sottoinsieme S di $\{1, 2, \dots, m\}$ a minimo costo tale che per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esista un $j \in S$ tale che $i \in L_j$. Il costo di S è dato da $\sum_{i \in S} c(i)$.

svolgimento.

Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = 1, \dots, 9$, con l'idea che $x_i = 1$ significa “inviare alla mailing list L_i ”.

Volendo minimizzare il numero di mail ridondanti, la funzione obiettivo sarà:

$$-8 + \min \sum_{i=1}^9 |L_i| x_i$$

Poichè desideriamo che tutti gli amici siano raggiunti dalla mail, abbiamo i seguenti vincoli.

amico 1: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$;

amico 2: $x_1 + x_5 + x_6 \geq 1$;

amico 3: $x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$;

amico 4: $x_1 + x_4 + x_7 \geq 1$;

amico 5: $x_2 + x_5 + x_7 \geq 1$;

amico 6: $x_3 + x_6 + x_7 \geq 1$;

amico 7: $x_2 + x_4 + x_5 \geq 1$;

amico 8: $x_1 + x_8 \geq 1$;

amico 9: $x_7 + x_8 \geq 1$.

Nel caso dell'istanza generica di SETCOVER pesato, come specificata dal testo dell'esercizio, introduciamo una variabile $x_j \in \{0, 1\}$ per ogni $j = 1, 2, \dots, m$, con l'idea che $x_j = 1$ significa $j \in S$. (In altre parole x vorrebbe essere il vettore caratteristico del sottoinsieme S di $\{1, 2, \dots, m\}$).

Otteniamo quindi la seguente formulazione PLI per il problema del SETCOVER pesato, dove abbiamo preferito scrivere c_j al posto di $c(j)$ per meglio mettere in evidenza come questi siano parametri poi già specificati in fase di input.

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^m c_j x_j, \\ \sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1 \quad \text{per ogni } i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j \in \{0, 1\} \quad \text{per ogni } j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Problema 4 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = TTCTCACAAATGCTTCTA$ e $t = CTATCAGTCAACCTAT$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t .

- 4.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t ?
- 4.2(1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'A'?
- 4.3(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_9 = TCAACCTAT$ di t ?
- 4.4(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il suffisso $s_8 = TGCCTCTA$ di s ?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
parte con 'A'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

s\t	c	t	a	t	c	a	g	t	c	a	a	c	c	t	a	t	
t	11	11	10	10	9	8	8	8	7	6	5	4	4	3	2	0	
t	11	11	10	10	9	8	8	8	7	6	5	4	4	3	2	0	
c	11	10	10	10	9	8	8	8	7	6	5	4	4	3	2	0	
t	10	10	10	10	9	8	8	8	7	6	5	4	3	3	2	0	
c	9	9	9	9	9	8	7	7	7	6	5	4	3	3	2	0	
a	8	8	8	8	8	8	7	7	7	6	5	4	3	3	2	0	
c	8	7	7	7	7	7	7	7	7	6	5	4	3	2	2	0	
a	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6	5	4	3	2	2	0	
a	7	7	7	6	6	6	5	5	5	5	5	4	3	2	2	0	
t	6	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3	2	1	0
g	6	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	3	2	1	0
c	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	1	0
t	5	5	5	5	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	1	0
t	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	1	0	0
c	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	0	0
t	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	0
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	CTCACCAACCTA
parte con 'A'	8	ACAACCTA
tra s e t_9	8	TCAACCTA
tra s_8 e t	6	TGCCTA

Problema 5 (3 punti):

Si consideri il seguente problema di PL.

$$\begin{cases} \max & 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 \\ & \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 1x_3 \geq 4 \\ 6x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

1.1(1pt) Scrivere il problema duale (impiegando massimo 3 vincoli).

1.2(1pt) Porre il problema primale in forma standard.

1.3(1pt) Scrivere il problema duale in forma standard.

problema duale.

$$\begin{cases} \min & 4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 10\lambda_3 \\ & \begin{cases} 4\lambda_1 + 6\lambda_2 - 1\lambda_3 \geq 3 \\ 5\lambda_1 - 6\lambda_2 - 8\lambda_3 = -7 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 \leq 2 \\ \lambda_1 \leq 0, \lambda_3 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

primale in forma standard.

$$\begin{cases} \max & 3x_1 - 7x_2^+ + 7x_2^- - 2x_3 \\ & \begin{cases} -4x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- - 1x_3 \leq -4 \\ 6x_1 - 6x_2^+ + 6x_2^- - 2x_3 \leq 7 \\ -6x_1 + 6x_2^+ - 6x_2^- + 2x_3 \leq -7 \\ x_1 + 8x_2^+ - 8x_2^- - 3x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

duale in forma standard.

Abbiamo due modi per ottenerlo: standardizzare il duale immediato (come ottenuto al primo punto) oppure dualizzare il primale standardizzato (come ottenuto al secondo punto).

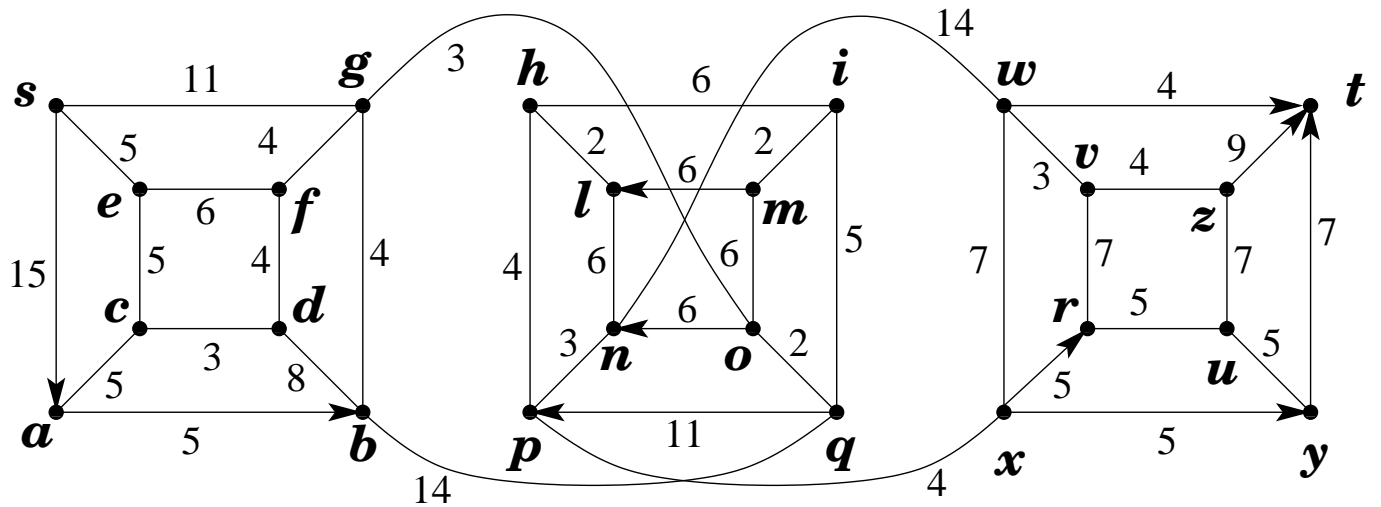
Ecco una prima scrittura che fa riferimento al processo di standardizzazione:

$$\begin{cases} \min & -4\lambda_1' + 7\lambda_2^+ - 7\lambda_2^- + 10\lambda_3 \\ & \begin{cases} -4\lambda_1' + 6\lambda_2^+ - 6\lambda_2^- - 1\lambda_3 \geq 3 \\ -5\lambda_1' - 6\lambda_2^+ + 6\lambda_2^- - 8\lambda_3 \geq -7 \\ 5\lambda_1' + 6\lambda_2^+ - 6\lambda_2^- + 8\lambda_3 \geq 77 \\ \lambda_1' - 2\lambda_2^+ + 2\lambda_2^- + 3\lambda_3 \geq -2 \\ \lambda_1', \lambda_2^+, \lambda_2^-, \lambda_3 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ed ecco una riscrittura ripulita della stessa, coincidente anche con quanto viene prodotto direttamente seguendo la seconda strada. La seconda strada risultava pertanto piú conveniente, anche in quanto comportava l'applicazione di una set di regole di trasformazione sfrondata e piú omogeneo.

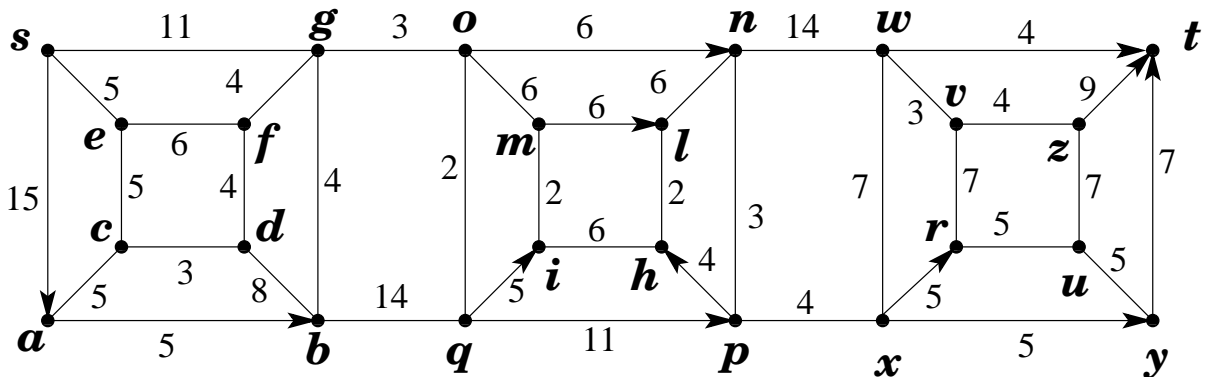
$$\begin{cases} \min & -4\lambda_1 + 7\lambda_2 - 7\lambda_3 + 10\lambda_4 \\ & -4\lambda_1 + 6\lambda_2^+ - 6\lambda_2^- - 1\lambda_4 \geq 3 \\ & -5\lambda_1 - 6\lambda_2^+ + 6\lambda_2^- - 8\lambda_4 \geq -7 \\ & 5\lambda_1 + 6\lambda_2^+ - 6\lambda_2^- + 8\lambda_4 \geq 7 \\ & \lambda_1 - 2\lambda_2^+ + 2\lambda_2^- + 3\lambda_4 \geq -2 \\ & \lambda_1, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \end{cases}$$

Problema 6 (5 punti):



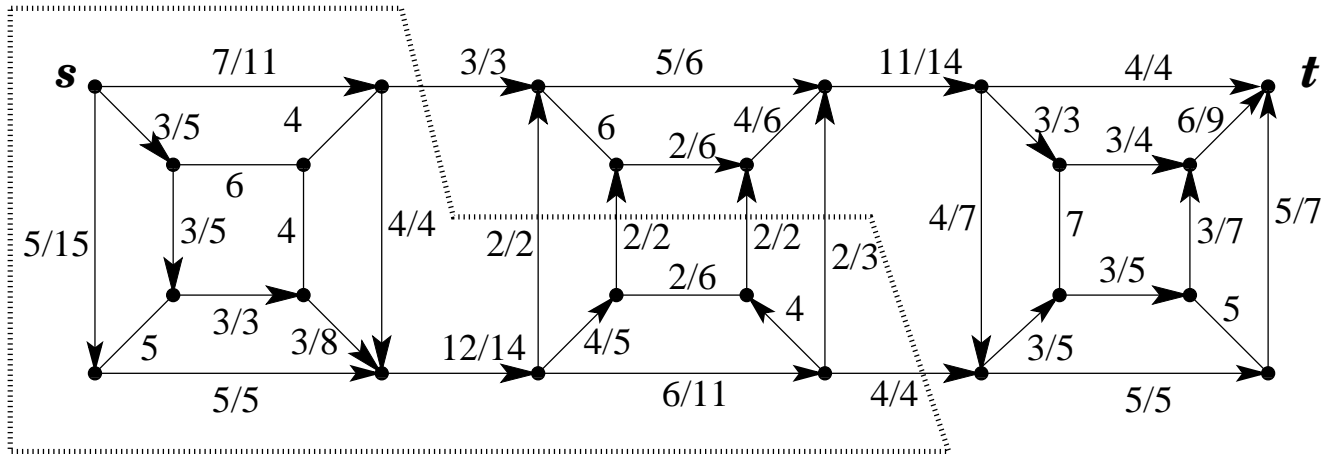
- 6.1(1pt) Dire, certificandolo, se G è planare oppure no.
- 6.2(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 6.3(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

Il fatto che G sia planare può essere messo in evidenza esibendo il planar embedding in figura.



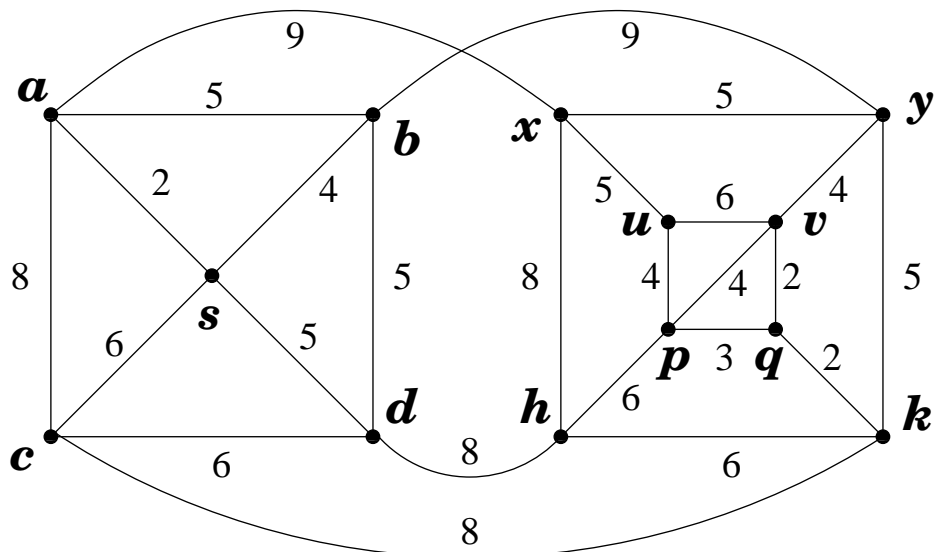
Nello svolgimento dei successivi punti converrà riferirsi al planar drawing fornito sopra.

La seguente figura esibisce un flusso massimo (non serve esibire i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo, ma é invece importante specificare il verso e l'entità del flusso su ogni arco impiegato) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



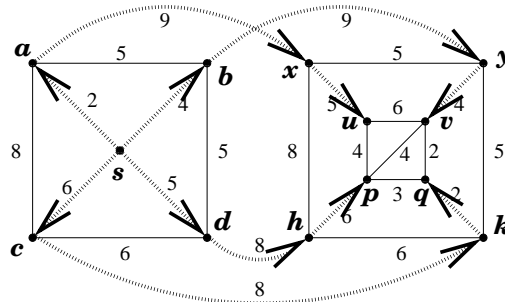
Il flusso ha valore 18 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t (gli archi a senso unico in direzione contraria sono invece di necessità tutti scarichi). Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s, t -taglio, anch'esso di valore 18 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 7 (10 punti):



- 7.1(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi a partire dal nodo s . (Disegnarlo!)
- 7.2(1pt) Indicare con precisione (altra figura o colore, oppure espressione chiara e succinta senza elencarli tutti) quali archi non possano essere rimossi senza allungare almeno un cammino da s ad un qualche altro nodo. Quanti sono gli alberi dei cammini minimi dal nodo s ?
- 7.3(1pt) Il grafo rappresentato in figura ammette un ciclo e/o cammino euleriano? Fornisci un certificato per le tue risposte.
- 7.4(1pt) Il grafo rappresentato in figura ammette un ciclo hamiltoniano? Fornisci un certificato per la tua risposta.
- 7.5(2pt) Il grafo rappresentato in figura è planare? Fornisci un certificato per la tua risposta.
- 7.6(1pt) Il grafo rappresentato in figura è bipartito? Fornisci un certificato per la tua risposta.
- 7.7(1pt) Nel grafo G , trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 7.8(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 7.9(1pt) Per i seguenti archi dire, certificandolo, in quale categoria ricadano (contenuti in ogni/nessuna/qualcuna non-tutte le soluzioni ottime): vy , vp , pu . Trova un arco della categoria mancante e certificane l'appartenenza a detta categoria.

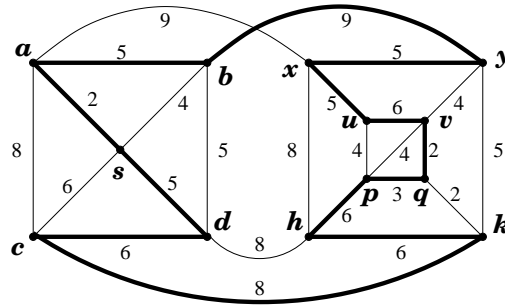
Un albero dei cammini minimi T_1 è riportato nella seguente figura.



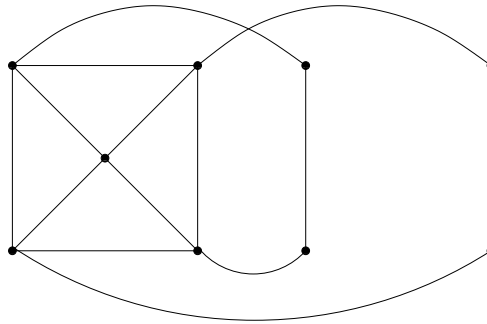
Ovviamente, la rimozione dal grafo di un qualsiasi arco non facente parte dell'albero dei cammini minimi T_1 non allunga il cammino minimo verso alcun nodo. Si noti come l'arco (h, p) possa essere sostituito dall'arco (q, p) sempre consentendo il raggiungimento di p a costo 19. Tale sostituzione restituisce un secondo albero di cammini minimi T_2 . In altre parole, la rimozione dell'arco (h, p) non allunga il cammino minimo verso alcun nodo. Invece, la rimozione di un qualsiasi altro arco dell'albero T_1 da G porterebbe ad allontanare almeno un nodo di G dal nodo s . Non vi sono altri alberi di cammini minimi.

Il grafo riportato in figura presenta due nodi (u e q) di grado dispari. Essi certificano l'assenza di cicli euleriani. Ogni altro nodo ha grado 4 ed inoltre il grafo è connesso come certificato dall'albero esibito più sopra. Pertanto il grafo deve contenere un cammino euleriano.

Il grafo è hamiltoniano come certificato in figura.



Il grafo riportato in figura non è planare in quanto contiene la seguente suddivisione di K_5 .



Il grafo non è bipartito in quanto contiene cicli di lunghezza dispari (ad esempio il triangolo sui nodi s , c , e d).

Nella seguente figura, gli archi in linea spessa costituiscono un albero ricoprente di peso minimo; essi sono in linea continua quando appartengono ad ogni soluzione ottima ed in linea tratteggiata quando sostituibili.

Per analizzare lo spazio di tutte le soluzioni ottime si tenga presente che, avendo noi individuato una soluzione in cui ogni arco pesa al massimo 8, possiamo buttare definitivamente a mare gli archi di peso 9. A questo punto è evidente che i due archi di peso 8 che uniscono le parti sinistra e destra del grafo sono in tutto intercambiabili, e l'analisi si spezza quindi sulle due parti in cui il grafo si spezza con la rimozione di questi archi di peso 8.

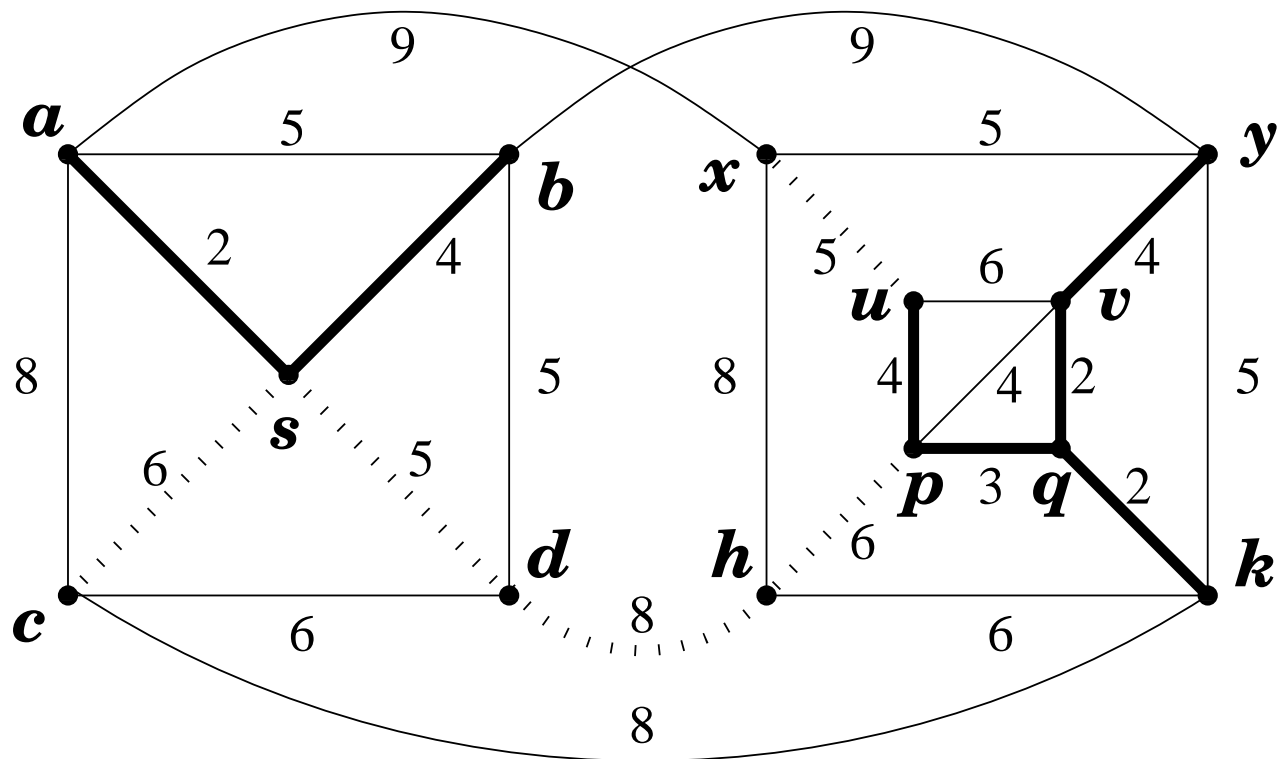
Spezzone di sinistra: -Sono intercambiabili i due archi di peso 5 incidenti nel nodo d .
-Sono intercambiabili i due archi di peso 6 incidenti nel nodo c .

Spezzone di destra: -Sono intercambiabili i due archi di peso 5 incidenti nel nodo x . -
Sono intercambiabili i due archi di peso 6 incidenti nel nodo h .

Queste scelte sono tutte indipendenti e producono pertanto $2^5 = 32$ differenti soluzioni ottime.

Ed ecco infine come rispondere alla domanda successiva:

- l'arco vy è in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso strettamente minimo della stella di y ;



- l'arco vp non é in nessuna soluzione ottima in quanto arco di peso strettamente minimo del triangolo vqp ;
- l'arco pu é in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso strettamente minimo della stella di u .
- un rappresentante della categoria mancante é l'arco dh che é presente nella soluzione ottima proposta, ed in effetti appartiene ad almeno una soluzione ottima in quanto è uno degli archi di peso minimo del taglio che separa le parti sinistra e destra del grafo, ed al tempo stesso è uno degli archi di peso massimo entro il ciclo $cdhk$.