

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 19 giugno 2012 Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

Problema 1 (4 punti):

La fonderia Plegiaminga produce un acciaio, ottenuto dalla fusione di 4 diversi materiali grezzi. Il costo unitario (Euro/kg) di ciascun materiale e la sua composizione espressa in percentuali kg/kg di materiale, sono espressi nella seguente tabella:

	% alluminio	% silicio	% carbonio	costo al kg
materiale 1	2	9	7	700
materiale 2	5	8	7	600
materiale 3	3	6	5	500
materiale 4	4	6	7	650

Si tenga conto che il prodotto finale deve contenere una percentuale di alluminio compresa tra il 3% e l'8%, una percentuale di silicio tra il 4% e il 5%, e una percentuale di carbonio non superiore al 5%. Formalizzare il problema di pianificare la produzione della fonderia con l'obiettivo di minimizzare i costi.

Problema 2 (2+2 punti):

Data la formula booleana $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_5) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_5)$ siamo interessati a quegli assegnamenti di valori di verità alle variabili che rendano vera la formula (ossia che soddisfino ciascuna delle sue 5 clausole).

Assumiamo tuttavia che settare la variabile x_i a *true* comporti dei costi come da seguente tabella.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
cost of truth	2	5	-3	4	-1

(2pt) Formulare come problema di programmazione lineare intera (PLI) l'intento di soddisfare la formula a costo minimo.

(2pt) Più in generale, data una formula booleana in forma normale congiuntiva $\Phi = \bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j=1}^{|p_i|} x_{p_i(j)} \right) \vee \left(\bigvee_{j=1}^{|n_i|} x_{n_i(j)} \right)$, ossia una disgiunzione (.OR.) di m clausole, dove p_i è un vettore che restituisce gli indici delle variabili che appaiono positive nella clausola i e $|p_i|$ indica la lunghezza di p_i , mentre n_i è un vettore che restituisce gli indici delle variabili che appaiono negate nella clausola i e, analogamente, $|n_i|$ è il numero di variabili che compaiono negate nella clausola i , si esprima come un problema di PLI la ricerca di assegnamenti di verità che soddisfino alla formula a costo minimo, dove con c_j , $j = 1, 2, \dots, n$, indichiamo il costo di settare la variabile x_j a *true*.

Problema 3 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = \text{CTGTGAGAAATCGCTGTA}$ e $t = \text{GTACGACTGAAGCTAT}$. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t .

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t ?

3.2(1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

3.3(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 = \text{GTACGACTG}$ di t ?

3.4(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 = \text{CTGTGAGA}$ di s ?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'C'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

17	18	16	44	32	15	52	27	4	9	11	50	48	21	33	10	55	27	6	54	30	23	7	3	8	6	13
----	----	----	----	----	----	----	----	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----	----	---	---	---	---	----

4.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(2pt) una sequenza è detta quasi-decrescente, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l' i -esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga sequenza quasi-decrescente che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 11. Specificare quanto è lunga e fornirla.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
decrescente		
quasi-decrescente		
decrescente con 11		

Problema 5 (8 punti):

$$\begin{cases} \max & 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ & -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ & 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 \leq -5 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

5.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

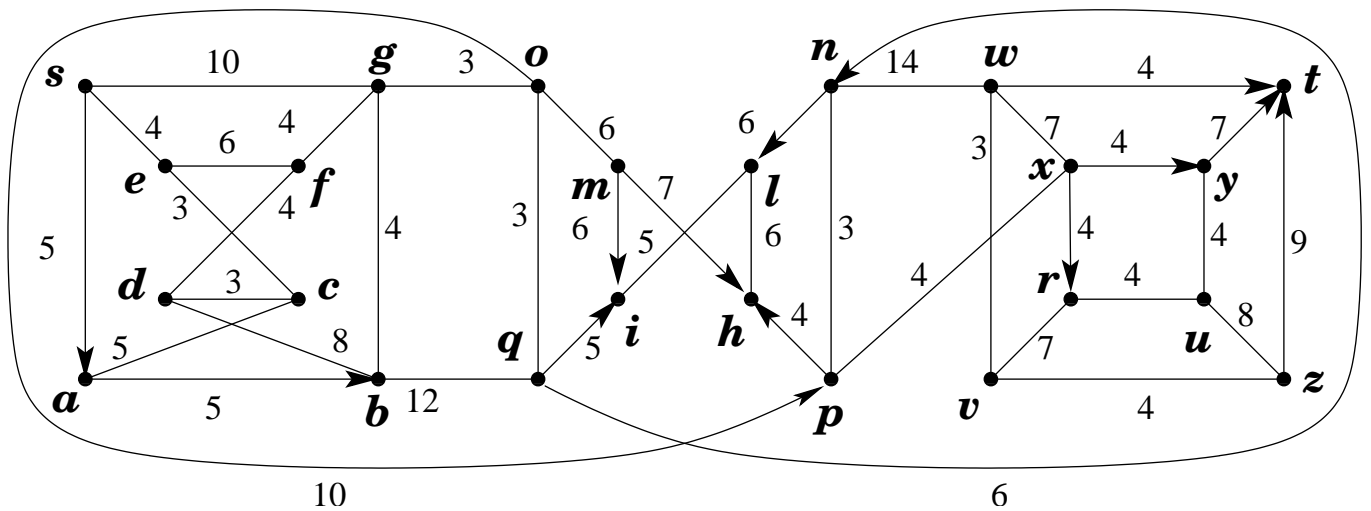
5.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

5.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

5.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

5.5(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

Problema 6 (4 punti):

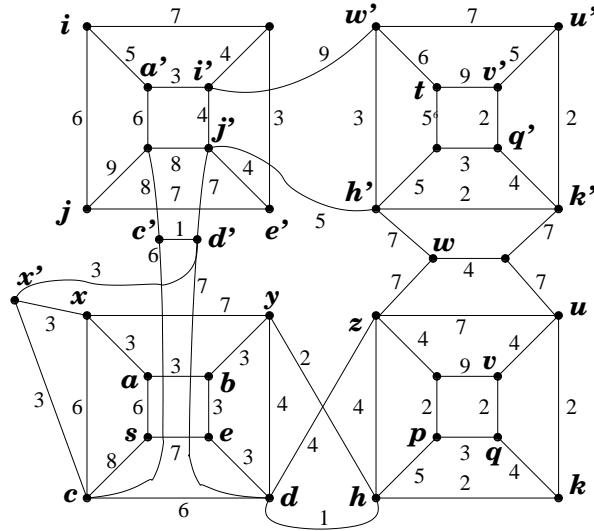


6.1(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .

6.2(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

Problema 7 (13 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 7.1.(1+1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi anche al fine.
- 7.2.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'c$ con un arco $c'x$ è planare oppure no. Se non planare, rimuovere il minimo numero di archi per planarizzarlo.
- 7.3.(1+1+1pt) Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no. Ove non bipartito, rimuovere il minimo numero di archi per bipartizzarlo. (Certificando che la rimozione di quel numero di archi è sufficiente a renderlo bipartito ed argomentando che esso è anche necessario).
- 7.4.(1+1pt) Nel grafo G , trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s . Esprimere la famiglia di tali alberi.
- 7.5.(1pt) Nel grafo G , trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 7.6.(2pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 7.7.(1+1pt) Per i seguenti archi dire, certificandolo, in quale categoria ricadano (contenuti in ogni/nessuna/qualcuna- ma non-tutte le soluzioni ottime): ij , ab , $h'w$. Trova un arco della categoria mancante e certificane l'appartenenza a detta categoria.