Prova scritta di Matematica II - 10 settembre 2009 - CORREZIONE Fila B

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(1, 0, 1)$, $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, 1)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R_1(t) = (t, t, 0)$ e la retta $R_2(t) = (t, t, 1)$;

1.a.c. piano Π_3 costituito dai punti equidistanti ai piani $x + y + 2\,z = 3$ e $x + y + 2\,z = 4$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

(1.a.a) Per tutti e tre i punti abbiamo che $x + y - z = 0$, ed è quindi questa l'equazione del piano Π_1.

(1.a.b) Le rette sono parallele, e quindi il piano Π_2 esiste. Le rette sono una sopra l'altra, e quindi il piano Π_2 è verticale. L'equazione $x - y = 0$ descrive il piano Π_2 ed è facile verificare che essa risulta soddisfatta da tutti i punti di tipo $(t, t, 0)$ e da tutti i punti di tipo $(t, t, 1)$. L'equazione non doveva parlare della z data la verticalità del piano.

(1.a.c) I due piani assegnati sono paralleli, e quindi, per questa volta, si tratta semplicemente di infilargliene nel mezzo un terzo: $x + y + 2\,z = \frac{7}{2}$.

(1.a.d) I tre piani sono ortogonali come evidenziato dall'annullamento dei tre prodotti scalari $(1, 1, -1) \cdot (1, -1, 0) = 0$, e $(1, 1, -1) \cdot (1, 1, 2) = 0$ e $(1, -1, 0) \cdot (1, 1, 2) = 0$.

Π_1: $x + y - z = 0$	Π_1 (H) Π_2 (H) Π_3 (H) Π_1
Π_2: $x - y = 0$	
Π_3: $x + y + 2\,z = \frac{7}{2}$	1+1+1+2/30

1.b. Date le 3 rette:

$$R_1(t) : (1 + \alpha\,t + \beta\,t, \beta\,t, 3\,t) \qquad R_2(t) : (\alpha\,t + \beta\,t, -t, t) \qquad R_3(t) : (\beta\,t, 5, t)\,,$$

si determini per quali valori di α e β:

1.1.) R_1 e R_2 sono parallele; 1.2.) R_2 e R_3 parallele; 1.3.) R_1 e R_3 parallele;

2.) R_1 e R_2 sono incidenti;

3.) R_2 e R_3 sono sghembe.

Due rette sono parallele se e solo se hanno la stessa direzione. Si denotino con $v_1 = (\alpha + \beta, \beta, 3)$, $v_2 = (\alpha + \beta, -1, 1)$ e $v_3 = (\beta, 0, 1)$ i vettori che esprimono le direzioni delle rette R_1, R_2 e R_3, rispettivamente. La prima delle tre domande chiede di indagare le relazioni di parallellismo tra questi 3 vettori. Affinchè v_1 sia parallelo a v_2, ossia $v_1 = \lambda v_2$, dovremo avere che $\lambda = 3$ (dal rapporto delle terze componenti di v_1 e v_2) e quindi $\beta = -3$ (seconde componenti) e quindi $\alpha = 3$ (prime componenti). Inoltre v_3 non sarà parallelo a v_2 per alcun valore di α e β (seconde componenti). Il parallellismo di v_1 e v_3 richiede $\alpha = \beta = 0$.

Le rette R_1 ed R_2 sono incidenti se esiste una coppia di valori s e t tali che $R_1(s) = (1+\alpha\, s+\beta\, s, \beta\, s, 3\, s) = (\alpha\, t+\beta\, t, -t, 1\, t) = R_2(t)$. Dal confronto delle terze coordinate segue $3\, s = t$ e quindi si chiede per quali valori di α e β $(1 + \alpha\, s + \beta\, s, \beta\, s) = (3\, \alpha\, s + 3\, \beta\, s, -3\, s)$ per un qualche s. Quindi, dal confronto delle seconde componenti, si hanno 2 casi: o $s = 0$ ma poi non si riesce ad ottenere uguaglianza anche sulle prime componenti o $\beta = -3$ e quindi per ogni valore di $\alpha \neq 0$ esiste un qualche valore di s che rende uguali anche le prime componenti. Quindi R_1 ed R_2 sono incidenti per $\beta = -3$ con $\alpha \neq 0$.

Due rette sono sghembe precisamente quando non sono parallele e non hanno punti in comune. La prima condizione è sempre rispettata (abbiamo visto sopra che R_2 ed R_3 non sono parallele per alcun valore di α e β). Inoltre le rette R_2 ed R_3 sono incidenti se esiste una coppia di valori s e t tali che $R_3(s) = (\beta\, s, 5, 1\, s) = (\alpha\, t + \beta\, t, -t, 1\, t) = R_2(t)$. Dal confronto delle terze coordinate segue $s = t$ e quindi si chiede per quali valori di α e β $(\beta\, s, 5) = (\alpha\, s + \beta\, s, -s)$ per un qualche s. Quindi $s = -5$ e $\alpha = 0$ dal confronto delle prime componenti, e poi ogni valore di $\beta \neq 0$ va bene. Quindi R_3 ed R_2 sono incidenti per $\alpha = 0$. Quindi R_2 ed R_3 sono sghembe per $\alpha \neq 0$.

1.) $R_1 \parallel R_2$: $\alpha = 3 = -\beta$	$R_2 \parallel R_3$: mai	$R_1 \parallel R_3$: $\alpha = \beta = 0$
2.) $R_1 \times R_2$: per $\beta = -3$ con $\alpha \neq 0$		
3.) $R_2 \asymp R_3$: per $\alpha \neq 0$		1+1+1/30

1.c. Calcolare la distanza tra la retta $R(t) = (1 + t, t, 2\, t)$ ed il piano $x + y - z = 0$.

La direzione $(1, 1, 2)$ della retta R è in effetti ortogonale alla normale al piano $(1, 1, -1)$ e pertanto retta e piano sono paralleli. Basta quindi calcolare la distanza dal piano per uno qualsiasi dei punti della retta, come $R(0) = (1, 0, 0)$. Utilizzando la formula per la distanza punto/piano otteniamo $d(R, \Pi) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$d(R, \Pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R_1 di equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 0$ e la retta $R_2 = (t, t + 6, -t)$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo $x = t$ risulta facile trovare una forma parametrica per la prima retta come $R_1(t) = (t, -t, 0)$. Risulta ora evidente che la retta R_1 di direzione $(1, -1, 0)$ e la retta R_2 di direzione $(1, 1, -1)$ non sono parallele. Il versore $\frac{\sqrt{6}}{6}(1, 1, 2)$ risulta ortogonale ad entrambe queste direzioni e cattura pertanto la direzione di un percorso minimo da una retta all'altra. Sia $P_1 = (0, 0, 0)$ un qualsiasi punto della retta R_1 (ottenuto ponendo $t = 0$)

e sia $P_2 = (0, 6, 0)$ un qualsiasi punto della retta R_2 (ottenuto ponendo $t = 0$). La distanza tra le due rette vale allora

$$\frac{\sqrt{6}}{6}(1, 1, 2) \cdot (P_2 - P_1) = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, 1, 2) \cdot (0, 6, 0) = \sqrt{6}\,,$$

ossia quanto ci si muove nella direzione del versore $\frac{\sqrt{6}}{6}(1, 1, 2)$ (ossia si lavora utilmente) nel passare da P_1 a P_2. Le rette sono quindi sghembe poichè non sono parallele e non hanno punti in comune (distanza non nulla).

$d(R_1, R_2) = \sqrt{6}\,.$ Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = x^2\,(y^2 + 5) - 9\,(x^2 + y^2 - 4)\,.$

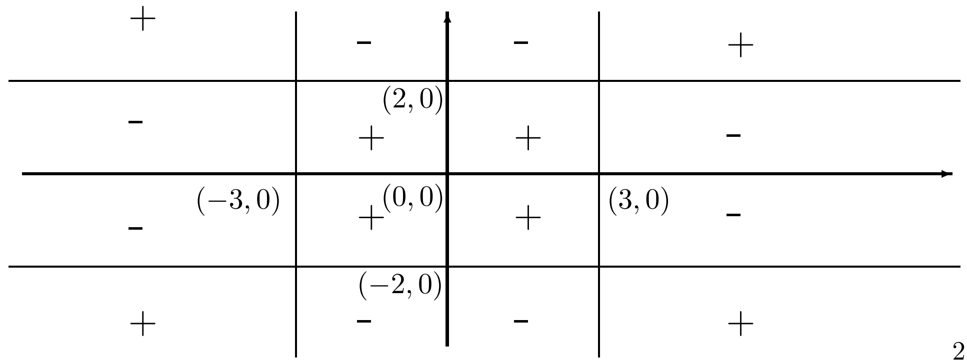
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F.

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x^2\,(y^2+5) - 9\,(x^2+y^2-4) && \text{come data} \\ &= x^2\,y^2 + 5\,x^2 - 9\,x^2 - 9\,y^2 + 36) && \text{sviluppata} \\ &= x^2\,y^2 - 4\,x^2 - 9\,y^2 + 36 && \text{dopo ovvio raccoglimento} \\ &= (x^2-9)(y^2-4) && \text{prima fattorizzazione} \\ &= (x-3)(x+3)(y-2)(y+2)\,. && \text{completamente fattorizzata} \end{aligned}$$

Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno si riduce alla comprensione di Σ_0. Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = (x - 4)(xy^2 - 4\,x + 3\,y^2 - 12) - 12 + y^2(x + 3) - 4\,x = (x^2 - 9)(y^2 - 4)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o $(x^2 - 9)$ o $(y^2 - 4)$. Spingendo un gradino oltre, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 3 \vee y = \pm 3\ \}$ ed il piano resta suddiviso nelle 9 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Di queste regioni, una sola è limitata (quella centrale).

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = (x^2-9)(y^2-4)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,x(y^2-4)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,y(x^2-9)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,x(y^2-4) & = & 0 \\ 2\,y(x^2-9) & = & 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0,0)$ e ciascuno dei quattro punti $(\pm 3, \pm 2)$. Si noti che $F(\pm 3, \pm 2) = 0$, e che i punti $(\pm 3, \pm 2)$ sono tutti e quattro punti di sella per quanto visto allo studio del segno. Il punto $(0,0)$ deve invece essere un punto di massimo in quanto esso cade nella regione limitata a compatta centrale la quale deve necessariamente avere punti di massimo (e di minimo, ma i minimi sono tutti e soli i punti della frontiera di detta regione). A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde, ma avreste perso più tempo e rischiato possibili errori.

> **2.b)** Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:
>
> PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$ più i 4 punti $(\pm 3, \pm 2)$.
>
> I punti $(\pm 3, \pm 2)$ sono tutti e quattro punti di sella.
>
> Il punto $(0,0)$ è punto di massimo. 4/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1,1,24)$;

In effetti il punto $(1,1,24)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1,1) = 24$. Possiamo quindi procedere. Poichè le derivate parziali $F_x = 2\,x(y^2-4)$ e $F_y = 2\,y(x^2-9)$ esistono e sono continue in un intorno di $(1,1)$, la F è differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto può essere considerato come l'approssimazione lineare della F nell'intorno del punto $(1,1)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1,1) = F_x(1,1)\,(x-1) + F_y(1,1)\,(y-1)$ ed otteniamo l'equazione $z - 24 = -6\,(x-1) - 16\,(y-1)$, che si semplifica in $6\,x + 16\,y + z = 46$. A titolo di verifica, si noti come in effetti il punto $(1,1,24)$ appartenga a tale piano.

> **2.c)** Equazione del piano tangente F in $(1,1,24)$:
>
> $6\,x + 16\,y + z = 46$ 2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa.

Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto di minimo, i minimi della F saranno necessariamente situati sulla frontiera, e pertanto investighiamo eventuali estremi sulla frontiera impiegando la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x,y) = x^2 + y^2$ e $g_x = 2\,x$ e $g_y = 2\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 2\,x(y^2-4) & = F_x = \lambda g_x = & 2\,\lambda\,x \\ 2\,y(x^2-9) & = F_y = \lambda g_y = & 2\,\lambda\,y \\ x^2+y^2 & = g(x,y) = & 25\,. \end{cases}$$

Poichè vogliamo ora guardare al di là dei punti stazionari (già investigati), possiamo allora assumere $\lambda \neq 0$. Per incominciare, si assuma $x, y \neq 0$. In questo caso si hanno delle ovvie semplificazioni e $(x^2-9) = (y^2-4)$ segue combinando le prime due equazioni semplificate. Combinando ora con la terza equazione otteniamo $(x^2-9) = (y^2-4) = 25 - x^2 - 4$ da cui $2\,x^2 = 30$. Quindi $x = \pm\sqrt{15}$ e $y = \pm\sqrt{25-15} = \pm\sqrt{10}$. Tutte e quattro le possibilità sono di interesse e ciò suggerisce (nel volerle catalogare) di guardare alla simmetrie della F, che in effetti è pari sia rispetto alla x (ossia $F(-x,y) = F(x,y)$) che rispetto alla y (ossia $F(x,-y) = F(x,y)$). Ora, $F(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10}) = 36$, e quindi questi quattro punti, così come anche l'origine stessa, sono punti di massimo assoluto sulla regione R in quanto, per magica coincidenza, $F(0,0) = 36 = F(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10})$. Ma non abbiamo ancora scovato i minimi. Evidentemente dobbiamo andare a cercare fuori dall'assunzione $x, y \neq 0$ sopra presa per comodità. Ora, se $x = 0$, allora $y = \pm 5$ segue dalla terza equazione. Analogamente, se $y = 0$ allora $x = \pm 5$. Questa volta $F(\pm 5, 0) = -4 \cdot 16 = -64$ e $F(0, \pm 5) = -9 \cdot 21 = -189 < 64$, quindi $(0, \pm 5)$ è minimo assoluto mentre $(\pm 5, 0)$ è minimo relativo su R.

2.d)

2 Min Assoluti: $(0, \pm 5)$, ; $F(0, \pm 5) = -189$

2 Min Relativi: $(\pm 5, 0)$, ; $F(\pm 5, 0) = -64$

5 Max Assoluti: $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10})$; $F(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10}) = F(0,0) = 36$

5/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la regione del primo quadrante del piano $y = 0$ delimitata dagli assi e dalla curva $z = 1 - x^2$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

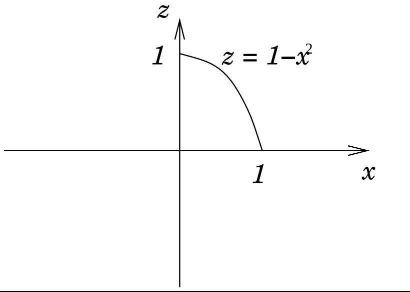
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z\; dx\, dy\, dz$;

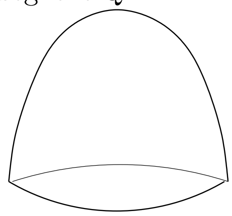
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E, situata nel primo quadrante, è contornata dalle rette $x = e$ e $z = e$ e da un ramo dell'iperbole equilatera $xz = 1$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2 \ \big\}$

cil: $Q = \big\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le z \le 1 - \rho^2 \ \big\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int\int_Q \rho \ dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-\rho^2} \rho \ dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho \int_0^{1-\rho^2} 1 \ dz\, d\rho\right) \\
&= 2\,\pi \left(\int_0^1 \rho(1-\rho^2)\ d\rho\right) = 2\,\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \\
&= 2\,\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

c) $V = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-\rho^2} \rho \ dz\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{2}$

4/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_Q z\,\rho \ dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-\rho^2} z\,\rho \ dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho \int_0^{1-\rho^2} z \ dz\, d\rho\right) = \pi \left(\int_0^1 \rho(1-\rho^2)^2 \ d\rho\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \left(\int_0^1 \rho^5 - 2\,\rho^3 + \rho \; d\rho \right) = \pi \left[\frac{\rho^6}{6} - \frac{1}{2}\rho^4 + \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 \\
&= \pi \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{6}\,\pi\,.
\end{aligned}
$$

d) $I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{6}$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$
z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\,.
$$

e) $x_b = 0$ $\quad$ $y_b = 0$ $\quad$ $z_b = \frac{I}{V} = \frac{1}{3}$

2/30