Prova scritta di Matematica II - 24 settembre 2008 - CORREZIONE Fila B

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(17, \sqrt{2}, \pi)$, $(\sqrt{2}, \pi, 17)$ e $(\pi, 17, \sqrt{2})$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (2\,t, 2\,t, 1)$ e l'asse delle z;

1.a.c. piano Π_3 passante per $(1, 2, \pi)$ e senza punti in comune con il piano $z = 14$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti abbiamo che $x + y + z = 17 + \sqrt{2} + \pi$, ed è quindi questa l'equazione del piano Π_1.

Contenendo l'asse delle z, il piano Π_2 è verticale e la sua equazione nello spazio coincide con l'equazione della sua traccia nel piano xy, o più in generale in un qualunque piano orizzontale. La retta $R(t)$ è appunto l'intersezione tra Π_2 ed il piano orizzontale $z = 1$. L'equazione ricercata è $x = y$.

Essendo parallelo al piano $z = 14$, il piano Π_3 è orizzontale. La condizione di passaggio per il punto $(1, 2, \pi)$ ci dice che esso è collocato a quota π ed ha quindi equazione $z = \pi$.

Il piano Π_2 è ortogonale ai piani Π_1 e Π_3 come evidenziato dall'annullamento dei prodotti scalari $(1, -1, 0) \cdot (1, 1, 1) = 0$ e $(1, -1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$, rispettivamente. La relazione tra i vettori $(1, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$, come tra i piani Π_1 e Π_3, è invece generica.

Π_1: $x + y + z = 17 + \sqrt{2} + \pi$	Π_1 (H) Π_2 (H) Π_3 (G) Π_1
Π_2: $x - y = 0$	
Π_3: $z = \pi$	1+1+1+2/30

1.b. Dati i 3 vettori:

$$v_1 : (\alpha + \beta, \beta, 0) \qquad v_2 : (\alpha + \beta, -\beta, 1) \qquad v_3 : (\beta, 0, 1)\,,$$

si determini per quali valori di α e β:

1.1.) v_1 e v_2 sono paralleli;

1.2.) v_2 e v_3 sono paralleli;

2.) v_1 e v_2 sono ortogonali;

3.) v_1, v_2 e v_3 sono coplanari.

Mentre v_1 è contenuto nel piano xy il vettore v_2 ha una terza componente non nulla, e quindi il parallellismo tra v_1 e v_2 non ha modo di realizzarsi per nessun valore di α e β. Questo perchè non esiste alcun numero che moltiplicato per 0 dia 1. Similmente, affinchè v_3 sia parallelo a v_2 dovremo avere che $\beta = 0$ (si osservi la seconda componente dei due vettori) e per di più $\alpha = \beta = 0$ (si osservi la prima componente).

Il prodotto scalare $v_1 \cdot v_2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta$ si annulla per $\alpha = 0$ e per $\alpha = -2\beta$, dove si ha l'ortogonalità tra i vettori.

Il prodotto triplo

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha+\beta & \beta & 0 \\ \alpha+\beta & -\beta & 1 \\ \beta & 0 & 1 \end{array} \right\| = -2\,\alpha\beta - \beta^2 = -\beta(2\,\alpha+\beta)\,.$$

Quindi l'intersezione non consta di un singolo punto si annulla per $\beta = 0$ e per $\beta = -2\alpha$, dove si ha la coplanarità tra i vettori.

1.1.) v_1 e v_2 paralleli: mai	1.1.) v_2 e v_3 paralleli: per $\alpha = \beta = 0$
2.) v_1 e v_2 ortogonali: sia per $\alpha = 0$ che per $\alpha = -2\beta$	
3.) v_1, v_2 e v_3 coplanari: sia per $\beta = 0$ che per $\beta = -2\alpha$	1+1+1/30

1.c. Trovare un'equazione parametrica per la retta R contenuta nel piano $x + y + z = 3$ ed incidente ortogonalmente nella retta $R_o(t) = (2 + t, 3 - t, t)$.

L'incidenza tra le due rette avverrà nel piano, e quindi nel punto individuato da $(2+t) + (3-t) + (t) = 3$, ossia da $t = -2$. La retta R passa quindi per il punto $(0, 5, -2)$ e la sua direzione è ortogonale sia alla direzione $(1, -1, 1)$ della retta R_o che alla normale $(1, 1, 1)$ al piano $x + y + z = 3$. Si noti che il vettore $(1, 0, -1)$ soddisfa ad entrambe le condizioni di ortogonalità. Pertanto potremo scrivere $R(t) = (t, 5, -2 - t)$

$R(t) = (t, 5, -2 - t)\,.$

3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta $R_1(t) = (t, 2\,t, -3\,t)$ e la retta R_2 di equazioni $x+y+z = 3$ e $x + 2\,y = 1$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

La retta R_1 è contenuta nel piano $x + y + z = 0$. Quindi le rette R_1 ed R_2 distano almeno quanto questi due piani, ossia almeno $\sqrt{3}$. In effetti $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ sono punti di R_1 ed R_2 rispettivamente, ed indicano che la distanza tra R_1 ed R_2 è precisamente $\sqrt{3}$. Se poniamo $y = t$ per ricercare una forma parametrica di R_2 otteniamo $x = 1 - 2\,y = 1 - 2\,t$ dalla seconda equazione di R_2 e quindi $z = 3 - x - y = 2 + t$ dalla prima equazione di R_2. La scrittura in forma parametrica $R_2(t) = (1 - 2\,t, t, 2 + t)$ mette in evidenza la direzione di R_2: $(-2, 1, 1)$. Si noti che R_1 ed R_2 non sono parallele e quindi, avendo distanza non nulla, sono sghembe. In un approccio standard, dalle direzioni delle due rette si otteneva la direzione della normale, che moltiplicata scalarmente per il vettore spostamento da un qualsiasi punto di R_1 ad un qualsiasi punto di R_2 restituiva il valore della distanza ricercato.

$d(R_1, R_2) = \sqrt{3}\,.$

Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

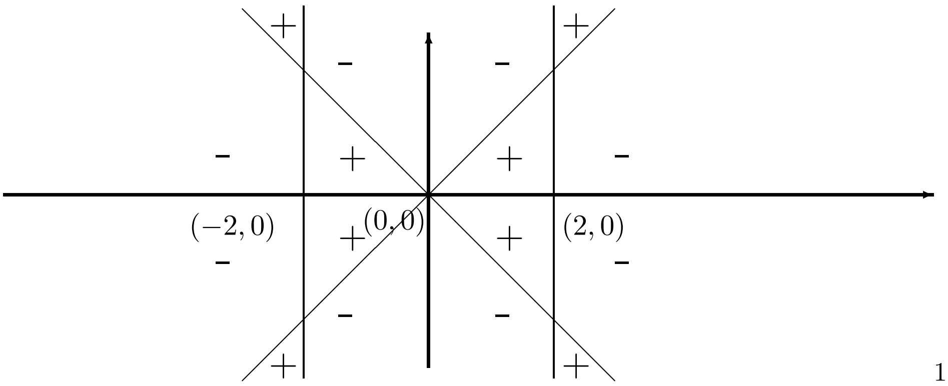
2. È data la funzione $F(x,y) = (y^2 - x^2)(x^2 - 4)$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$ e studiare il segno di F;

Fortunatamente la fattorizzazione della F è stata almeno parzialmente rivelata. Ultimando la fattorizzazione, scriveremo $F(x,y) = (y-x)(y+x)(x+2)(x-4)$, da cui si evince lo studio del segno. Infatti, per la legge di annullameno del prodotto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm x \vee \vee x = \pm 2\}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 10 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". Non essendoci in questo caso radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,x(y^2 + 4 - 2\,x^2)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,y(x^2 - 4)$ e dobbiamo ricercare i punti (x,y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2\,x(y^2 + 4 - 2\,x^2) &= 0 \\ 2\,y(x^2 - 4) &= 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione porta a considerare due casi:

$y = 0$ da cui seguirebbe $x = 0$ oppure $x = \pm\sqrt{2}$ dalla prima equazione, e quindi otteniamo i 3 punti stazionari $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{2}, 0)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0,0)$ è punto di sella. Inoltre, $(\sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, 0)$ devono essere punti di massimo locale per la F visto che la F, essendo continua, deve avere un massimo ed un minimo in ogni chiuso e compatto (si consideri il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(0,-2)$ dove la F, sempre non negativa, si annulla sui bordi e quindi dovrà pur avere un massimo da qualche parte nel mezzo, e questo massimo dovrà essere rilevato come punto stazionario per la differenziabilità della F);

$x = \pm 2$ da cui seguirebbe $y = \pm 2$ dalla prima equazione, e quindi otteniamo i 4 punti stazionari $(2, \pm 2)$ e $(-2, \pm 2)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che questi 4 punti sono selle.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$, $(2, \pm 2)$, $(-2, \pm 2)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

I punti $(0,0)$, $(2, \pm 2)$, $(-2, \pm 2)$ sono selle della F.

I punti $(\pm\sqrt{2}, 0)$ sono massimi locali della F.

6/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(0,0,0)$.

Poichè $F(0,0) = 0$ il punto dato appartiene effettivamente al grafico della F. L'approssimazione lineare in quel punto sarà data da $z = 0 + F_x(0,0) \cdot (x-0) + F_y(0,0) \cdot (y-0) = 0$, il che è come doveveva essere fisto che $(0,0)$ è un punto stazionario della F.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(0,0,0)$:

$z = 0$

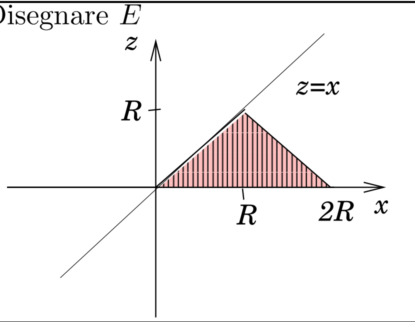
1/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E il triangolo del piano $y = 0$ di vertici $(0,0)$, (R, R) e $(2\,R, 0)$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

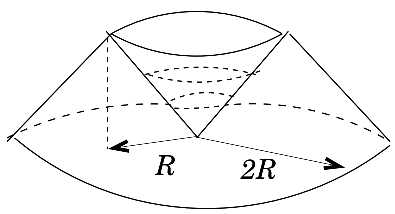
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);
3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;
3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \; dx\, dy\, dz$;
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E è il triangolo di vertici $(0,0)$, (R, R), e $(0, R)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 2\,R - z \} \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \le z \le \rho \le 2\,R - z \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned}
V &= \int\int\int_Q \rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_z^{2\,R-z} \rho\; d\rho\, dz\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R\int_z^{2\,R-z} \rho\; d\rho\, dz\right) = 2\,\pi\int_0^R \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_z^{2\,R-z} dz \\
&= 2\,\pi\int_0^R 2\,R^2 - 2\,R\,z\; dz = 2\,\pi\,\left[2\,R^2\,z - R\,z^2\right]_0^R = 2\,\pi\,R^3\,.
\end{aligned}$$

c) $V = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\,R-z} \rho\; d\rho\, dz\, d\theta = 2\,\pi\,R^3$

5/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_Q z\,\rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_z^{2\,R-z} z\,\rho\; d\rho\, dz\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R z\int_z^{2\,R-z} \rho\; d\rho\, dz\right) = 2\,\pi\int_0^R z\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_z^{2\,R-z} d\rho \\
&= 2\,\pi\int_0^R 2\,R^2\,z - 2\,R\,z^2\; dz = 2\,\pi\,\left[R^2\,z^2 - \frac{2}{3}R\,z^3\right]_0^R = \frac{2}{3}\,\pi\,R^4\,.
\end{aligned}$$

d) $I = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_z^{2\,R-z} z\,\rho\; d\rho\, dz\, d\theta = \frac{2}{3}\,\pi\,R^4$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{2}{3}\,\pi\,R^4}{2\,\pi\,R^3} = \frac{1}{3}\,R\,.$$

e) $x_b = 0$ $\qquad y_b = 0$ $\qquad z_b = \frac{I}{V} = \frac{1}{3}\,R$

2/30