Prova scritta di Matematica II - 4 settembre 2008 - CORREZIONE Fila B

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(50, 100+\pi, 5)$, $(40, 80+\pi, 4)$ e $(10, 20+\pi, 10)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente le rette $R_1(t) = (1-t, 2-2\,t, \pi)$ e $R_2(s) = (2+s, 4+2\,s, 1-s)$;

1.a.c. piano Π_3 ortogonale alla retta $R(t) = (1+t, 1+2\,t, \pi)$ e passante per $(\pi, 0, 0)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti abbiamo che $y = 2\,x + \pi$, ed è quindi questa l'equazione del piano Π_1. È pertinente notare che i tre punti non sono allineati: ove il terzo punto fosse stato $(10, 20+\pi, 100)$ allora infiniti piani li avrebbero contenuti tutti e tre.

Tutti i punti di R_1 e tutti i punti di R_2 soddisfano alla condizione $y = 2\,x$, ed è quindi questa l'equazione del piano Π_2.

Il vettore $(1, 2, 0)$ esprime la direzione della retta R ed è quindi ortogonale al piano Π_3. L'equazione del piano Π_3 è pertanto $(1, 2, 0) \cdot (x, y, z) = (1, 2, 0) \cdot (\pi, 0, 0)$ ossia $x + 2\,y = \pi$.

I piani Π_1 e Π_2 sono paralleli ed entrambi risultano ortogonali al piano Π_3 come evidenziato dall'annullamento del prodotto scalare $(2, -1, 0) \cdot (1, 2, 0) = 0$.

Π_1: $y = 2\,x + \pi$	Π_1 (P) Π_2 (H) Π_3 (H) Π_1
Π_2: $y = 2\,x$	
Π_3: $x + 2\,y = \pi$	1+1+1+2/30

1.b. Dati i 3 piani:

$$\Pi_1 : \alpha\,x + 2\,y + 4\,\beta\,z = \beta + \sqrt{2} \qquad \Pi_2 : y = 1 \qquad \Pi_3 : \beta\,x + \alpha\,z = 2\,\sqrt{\alpha\,\beta}\,,$$

si determini per quali valori di α e β:

1.) l'intersezione $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ consiste di uno ed un solo punto;

2.) l'intersezione $\Pi_1 \cap \Pi_2$ è vuota;

3.) i piani Π_2 e Π_3 sono ortogonali.

I tre piani si incontrano in uno ed un sol punto qualora il sistema composto dalle loro tre equazioni ammetta un'unica soluzione, ossia ove si annulli il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\left\|\begin{array}{ccc} \alpha & 2 & 4\,\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{array}\right\| = \alpha^2 - 4\,\beta^2 = (\alpha - 2\,\beta)(\alpha + 2\,\beta)\,.$$

Quindi l'intersezione non consta di un singolo punto solo quando $\alpha = \pm 2\,\beta$.

Quando $\alpha = \beta = 0$ i piani Π_1 e Π_2 sono paralleli, e quindi l'intersezione $\Pi_1 \cap \Pi_2$ è vuota (eccetto ove $\Pi_1 = \Pi_2$, il che non accade per $\alpha = \beta = 0$).

I piani Π_1 e Π_3 sono ortogonali quando sono ortogonali i rispettivi vettori ortogonali, il che risulta vero per ogni valore di α e β.

1.) $|\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3| = 1$: ogniqualvolta $\alpha \neq \pm 2\,\beta$

2.) $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$: quando $\alpha = \beta = 0$

3.) Π_2 e Π_3 ortogonali: per ogni valore di α e β

2+1+1/30

1.c. Trovare un'equazione parametrica per la retta R la cui proiezione sul piano xy dia $x = 2\,y + 1$ e la cui proiezione sul piano xz dia $x = 2\,z - 1$.

Le equazioni $x = 2\,y+1$ e $x = 2\,z-1$ descrivono la retta R come intersezione di due piani. Per ottenere un'equazione parametrica poniamo $y = t$, da cui segue $x = 2\,t+1$ dalla prima equazione, da cui segue $z = t + 1$ dalla seconda equazione. Un'equazione parametrica è quindi $R(t) = (2\,t + 1, t, t + 1)$, ed è facile verificare che il punto generico $(2\,t + 1, t, t + 1)$ soddisfa sia alla condizione $x = 2\,y + 1$ che alla condizione $x = 2\,z - 1$.

$R(t) = (2\,t + 1, t, t + 1)\,.$

2/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta $R_1(t) = (1+t, 1-t, 1)$ e la retta R_2 di equazioni $x+y+z = 3$ e $x+y = 2$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Si noti come ogni punto $(1 + t, 1 - t, 1)$ di R_1 soddisfi sia all'equazione $x + y + z = 3$ che all'equazione $x + y = 2$. Quindi le rette R_1 ed R_2 sono la stessa retta, ossia coincidono punto a punto.

$d(R_1, R_2) = 0\,.$
Le rette R_1 ed R_2 coincidono. Sono la stessa retta. 2+1/30

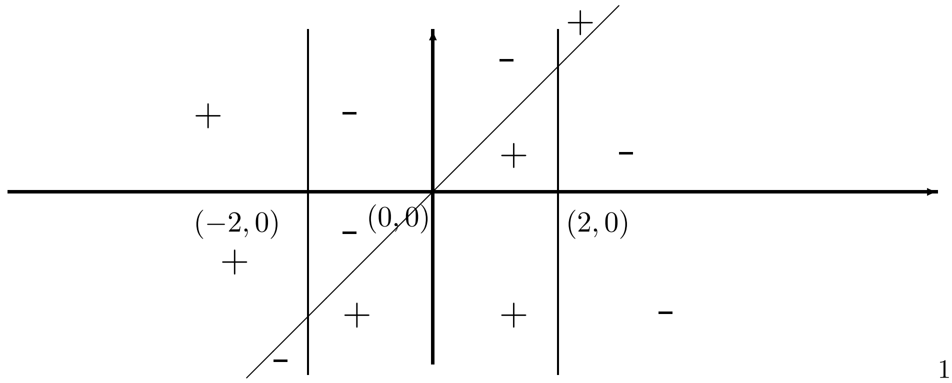
2. È data la funzione $F(x, y) = (y - x)(x^2 - 4)\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Questa volta ho preferito fornire la F in forma già fattorizzata. (Per esercizio provare a fattorizzare $yx^2 - x^3 - 4y + 4x$). Ultimando la fattorizzazione, scriveremo $F(x, y) = (y-x)(x+2)(x-4)$, da cui si evince lo studio del segno. Infatti, per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = (y - x)(x + 2)(x - 4)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulli $(y - x)$ o $(x + 2)$ o $(x - 2)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \vee \vee x = \pm 2\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 6 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie “piú per piú = piú”. In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = -3\,x^2 + 2\,x\,y - 4$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 4$ e dobbiamo ricercare i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} -3\,x^2 + 2\,x\,y - 4 &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione ci dice che $x = \pm 2$, ed i corrispondenti valori della y restano poi determinati dalla prima prima equazione. Otteniamo così i 2 punti stazionari: $(2, 2)$, $(-2, -2)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che essi sono entrambi punti di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(2, 2)$, $(-2, -2)$.

I punti $(2, 2)$ e $(-2, -2)$ sono entrambi selle della F.

3/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(0, 0, 0)$.

Poichè $F(0, 0) = 0$ il punto dato appartiene effettivamente al grafico della F. L'approssimazione lineare in quel punto sarà data da $z = 0 + F_x(0, 0) \cdot (x - 0) + F_y(0, 0) \cdot (y - 0) = 4\,x - 4\,y$.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(0, 0, 0)$:

$z = 0 + F_x(0, 0) \cdot (x - 0) + F_y(0, 0) \cdot (y - 0) = 4\,x - 4\,y$

1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nel quadrato Q di spigoli $(2, 2)$ e $(-2, -2)$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa e limitata. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, ossia lungo il perimetro di Q. Lo studi del segno di cui al punto (a) restringe la nostra ricerca ai lati orizzontali, e vista la simmetria $F(-x,-y) = -F(x,y)$ ci si limita all'esame del bordo superiore, caratterizzato dall'equazione $y = 2$. Qui $F(x,y) = (y-x)(x^2-4) = 2\,x^2-x^3+4\,x-8$ e $F_x = 4\,x-3\,x^2+4$. Ponendo $F_x = 0$ otteniamo $x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{3}$. La radice $x = 2$ era scontata (e vale quindi a conferma/verifica) ma non è interessante. La soluzione interessante individua il punto di minimo assoluto $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$.

2.d) punti estremali di F in Q

1 Max Assoluto: $\left(\frac{2}{3}, -2\right)$

1 Min Assoluto: $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$

3/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $0 \leq z \leq x \leq R$, e sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

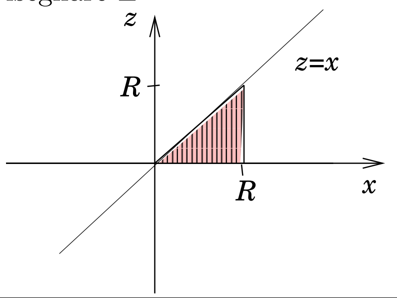
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \; dx\, dy\, dz$;

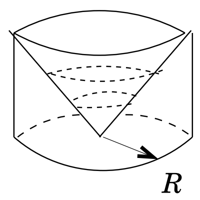
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E è il triangolo di vertici $(0,0)$, (R,R), e $(0,R)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1+1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R\}\right\}$

cil: $Q = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq z \leq \rho \leq R\right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_Q \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\rho \rho\, dz\, d\rho\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^R \rho \int_0^\rho 1\; dz\, d\rho\right) = 2\pi \int_0^R \rho\, [z]_0^\rho\; d\rho \\ &= 2\pi \int_0^R \rho^2\; d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3 . \end{aligned}$$

c)	$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\rho \rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{2}{3}\pi R^3$
	4/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_Q z\,\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\rho z\,\rho\, dz\, d\rho\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^R \rho \int_0^\rho z\; dz\, d\rho\right) = 2\pi \int_0^R \rho \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^\rho\; d\rho \\ &= \pi \int_0^R \rho^3\; d\rho = \pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{4}\pi R^4 . \end{aligned}$$

d)	$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\rho z\rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{4}\pi R^4$
	3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2} R .$$

e)	$x_b = 0$	$y_b = 0$	$z_b = \frac{I}{V} = \frac{3}{8} R$
			2/30