Prova scritta di Matematica II - 23 gennaio 2008 - CORREZIONE Fila D

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

- **1.a.a.** piano Π_1 passante per i punti $(1,1,1)$, $(1,0,4)$ e $(2,0,2)$;
- **1.a.b.** piano Π_2 contenente le rette $R_1(t) = (t,t,3)$ e $R_2(s) = (s, 2\,s, s+3)$;
- **1.a.c.** piano Π_3 costituito dai punti equidistanti da $(0,0,0)$ e $(4,6,2)$;
- **1.a.d.** i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Se una retta contiene i punti (x_0, y_0, z_0) e (x_1, y_1, z_1) allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, essa contiene il punto $\lambda \cdot (x_0, y_0, z_0) + (1-\lambda) \cdot (x_1, y_1, z_1)$. Il piano Π_1 contiene pertanto i seguenti punti: $2 \cdot (1,0,4) - 1 \cdot (2,0,2) = (0,0,6)$, $2 \cdot (2,0,2) - 1 \cdot (1,0,4) = (3,0,0)$ e $2 \cdot (1,1,1) - 1 \cdot (2,0,2) = (0,2,0)$. Dalle 3 intersezioni sugli assi è immediato ottenere la forma segmentaria $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$, e da essa consegue $2\,x + 3\,y + z = 6$. Consiglio: si verifichi il passaggio per i 3 punti dati.

Le due rette $R_1(t)$ e $R_2(s)$ si incontrano nel punto $R_1(t) = R_2(s) = (0,0,3)$. Pertanto Π_2 passa per $(0,0,3)$ ed è ortogonale al vettore $(1,1,0) \wedge (1,2,1) = (1,-1,1)$ ed ha quindi equazione $(1,-1,1) \cdot (x,y,z) = (1,-1,1) \cdot (0,0,3)$, ossia $x - y + z = 3$. Consiglio: si verifichi il contenimento di $R_1(t) = (t,t,3)$ e $R_2(s) = (s, 2\,s, s+3)$.

Il vettore $(4,6,2)$ risulta ortogonale al piano Π_3 che inoltre passa per il punto $\frac{(4,6,2)+(0,0,0)}{2} = (2,3,1)$. ed avrà pertanto equazione $(4,6,2) \cdot (x,y,z) = (4,6,2) \cdot (2,3,1)$, ossia $2\,x + 3\,y + z = 14$.

I piani Π_1 e Π_3 sono paralleli in quanto hanno gli stessi coefficienti direttori. Il piano Π_2 è ortogonale ai piani Π_1 e Π_3 come evidenziato dall'annullamento del prodotto scalare $(2,3,1) \cdot (1,-1,1) = 0$.

Π_1: $2\,x + 3\,y + z = 6$	Π_1 (H) Π_2 (H) Π_3 (P) Π_1
Π_2: $x - y + z = 3$	
Π_3: $2\,x + 3\,y + z = 14$	1+1+1+2/30

1.b. Sono dati i tre versori

$$u = (0, \cos\alpha, \sin\alpha) \qquad v = (\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, 0) \qquad w = (1,0,0)\,.$$

Determinare i valori di α per cui:

1. u e v sono paralleli; v e w sono paralleli;
2. u e v sono ortogonali; v e w sono ortogonali;
3. $u \cdot v$ è massimo; $u \cdot v$ è minimo.
4. $u \cdot v \wedge w$ è massimo; $u \cdot v \wedge w$ è minimo.

1.) u e v paralleli: $\alpha = k\pi$	v e w paralleli: $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$
2.) u e v ortogonali: $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\}$	v e w ortogonali: $\alpha = k\frac{\pi}{2}$
3.) $u \cdot v$ è massimo: $\alpha = 2k\pi$	$u \cdot v$ è minimo: $\alpha = (1 + 2k)\pi$
4.) $u \cdot v \wedge w$ è massimo: $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$u \cdot v \wedge w$ è minimo: $\alpha = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$
	1+1+1+1/30

Se questo esercizio veniva impostato algebricamente occorreva poi riferirsi a delle equazioni trigonometriche. Conveniva invece manipolarlo direttamente considerando la disposizione dei tre versori nello spazio al variare di α e ricordando che il prodotto scalare di due vettori è compreso tra -1 (paralleli, verso opposto) ed 1 (paralleli, stesso verso). Analogamente, il prodotto triplo di 3 vettori è compreso tra -1 (mutuale ortogonalità, disposizione destrorsa) ed 1 (mutuale ortogonalità, disposizione sinistrorsa).

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $O = (1, 2, 3)$ e la retta di equazioni parametriche $R(t) = (1 + \sqrt{17},\ 3\,\pi\,t + 5,\ 4 - 3\,\pi\,t)$.

Conviene innanzittutto ricorrere ad una parametrizzazione più semplice, quale $R(t) = (1 + \sqrt{17},\ t + 5,\ 4 - t)$ e realizzare che la retta ha direzione $(0, 1, -1)$. Poichè le altezze cadono ortogonali, risulta utile individuare il piano passante per O ed ortogonale alla retta: $(0, 1, -1) \cdot (x, y, z) = (0, 1, -1) \cdot (1, 2, 3)$, ossia $y - z = -1$. Tale piano interseca la retta nel punto determinato da $4 - t = z = y + 1 = t + 6$, ossia nel punto $R(-1) = (1 + \sqrt{17},\ 4,\ 5)$. La distanza di $R(t)$ da $(1, 2, 3)$ coincide con la distanza di $(1+\sqrt{17},\ 4,\ 5)$ da $(1, 2, 3)$ e vale $\sqrt{17 + 4 + 4} = 5$.

$d(R, O) = 5\,.$

2/30

1.d. Calcolare la distanza tra l'asse delle z e la retta R_1 di equazioni $x = 1$ e $z = y + 1$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

L'asse delle z è contenuto nel piano $x = 0$, mentre la retta R_1 è contenuta nel piano $x = 1$, parallelo a $x = 0$ ed a distanza 1 da esso. Il punto $(1, 0, 1)$ appartiene ad R_1 e dista 1 dall'asse delle z. Pertanto la distanza tra le due rette vale 1.

Una volta nel piano $x = c$, con $c = 0, 1$, l'asse delle z è caratterizzato dall'equazione $y = 0$, mentre la retta R_1 è caratterizzata dall'equazione $y = z - 1$, dal che risulta evidente che le due rette sono sghembe. In effetti il piano $y = 0$ contiene l'asse delle z ed anche il punto $(1, 0, 1)$ di R_1 ma non riesce a contenere tutto R_1 (non contiene ad esempio $(1, -1, 0)$ di R_1).

$d(\text{asse } z, R_2) = 1\,.$
l'asse delle z e la retta R_1 sono rette sghembe. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x,y) = x\,(x^2+y^2)(2\,xy-1) + x\,(x-y)^2$.

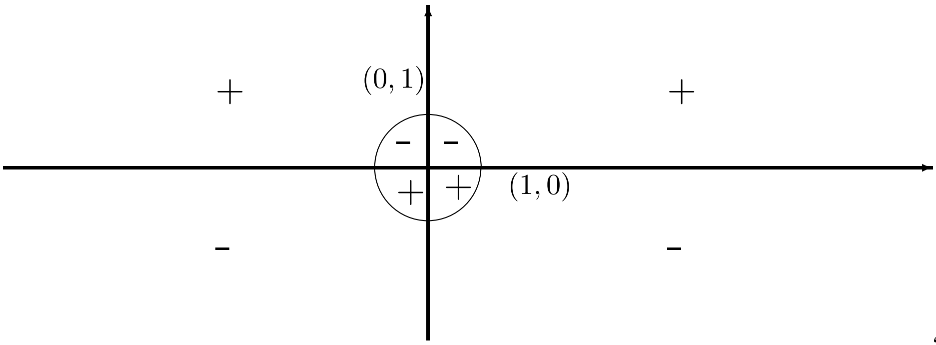
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della F operando nelle tre solite fasi (sviluppare, semplificare, raccogliere):

$$\begin{aligned}
F(x,y) \quad &= x\,(x^2+y^2)(2\,xy-1) + x\,(x-y)^2 && \text{come data}\\
&= x\,(2\,x^3\,y - x^2 + 2\,y^3\,x - y^2 + x^2 + y^2 - 2\,xy) && \text{raccolta la } x\text{, altrimenti sviluppata}\\
&= x\,(2\,x^3\,y + 2\,y^3\,x - 2\,xy) && \text{raccolti i termini, semplificata}\\
&= 2\,x^2 y(x^2+y^2-1)\,. && \text{raccolta, fattorizzata, semplificata}
\end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = 2\,x^2y(x^2+y^2-1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o y o (x^2+y^2-1). Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0 \vee x^2+y^2 = 1\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 8 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Quattro di queste regioni sono limitate (quelle interne al cerchio).

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = 2\,x^2y(x^2+y^2-1)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 4\,xy(x^2+y^2-1) + 2\,x^2y(2\,x) = 4\,xy(2\,x^2+y^2-1)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,x^2(x^2+y^2-1) + 4\,x^2y^2 = 2\,x^2(x^2+3\,y^2-1)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 4\,xy(2\,x^2+y^2-1) &= 0\\ 2\,x^2(x^2+3\,y^2-1) &= 0\,. \end{cases}$$

Si noti che tutti i punti (x,y) con $x=0$ sono punti stazionari. A dire il vero ciò risultava evidente anche dallo studio del segno che indicava per altro anche la presenza di altri due punti stazionari: $(0, \pm 1)$. Di fatto, dallo studio del segno posso anche dedurre che questi 2 punti sono selle. Sempre dallo studio del segno i punti $(0, y)$ sono minimi relativi per $y \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ e massimi relativi per $y \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$; i 3 punti $(0, 0)$ e $(\pm 1, 0)$ sono selle. Ma accertiamoci ora che non ci siano ulteriori soluzioni. I punti con $x = 0$ sono stati ormai esaminati tutti, quindi imponiamo $x \neq 0$ e semplifichiamo le equazioni di conseguenza (dividendo per x) ottenendo:

$$\begin{cases} y(2\,x^2 + y^2 - 1) &= 0 \\ x^2 + 3\,y^2 - 1 &= 0\,. \end{cases}$$

Assumendo $y = 0$, dalla seconda equazione risultano determinati i punti $(0, 0)$ e $(\pm 1, 0)$, anch'essi già riscontrati ed analizzati. Pertanto, resta solo da indagare l'eventualitá che $x \neq 0$ e $y \neq 0$ valgano entrambe. Assumendo $y \neq 0$, la prima equazione diviene $2\,x^2 + y^2 - 1 = 0$, che, combinata con la seconda restituisce $2\,x^2 + y^2 = x^2 + 3\,y^2$ e quindi $x^2 = 2\,y^2$ che porta a concludere $x = \pm\sqrt{2}y$. Dopo questa importante scoperta, dalla prima equazione segue $5\,y^2 = 1$ ossia $y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ e restano così individuati i 4 ulteriori punti $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. In effetti, a ripensarci, anche l'esistenza di questi 4 ulteriori punti (uno per ciascuna delle 4 regioni limitate) era deducibile dallo studio del segno poichè ogni regione limitata vive almeno un punto di massimo ed uno di minimo. Tuttavia era necessario impostare e risolvere le equazioni per determinare con precisione le coordinate di questi 4 punti. Ciascuno di questi 4 punti è il punto estremale ricercato nella regione chiusa di sua pertinenza (ossia nel suo quarto di cerchio), ed è pertanto punto estremale anche per la F (almeno in senso locale). Su tutto il piano, questi quattro punti sono dei massimi/minimi relativi, dacchè la F non è limitata. Ora, $F\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{8}{25\sqrt{5}}$ mentre $F\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{8}{25\sqrt{5}}$.

2.b) Elencare le selle, i massimi, i minimi:

5 PUNTI DI SELLA: $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$.

2 PUNTI DI MAX. RELATIVO: $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ con $F\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{8}{25\sqrt{5}}$.

2 PUNTI DI MIN. RELATIVO: $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ con $F\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{8}{25\sqrt{5}}$.

∞ PUNTI MAX. REL.: $(0, y)$ con $y \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, dove $F = 0$.

∞ PUNTI MIN. REL.: $(0, y)$ con $y \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, dove $F = 0$. 3+3+3/30

2.c. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

I punti estremali di F che si trovano nell'interno di R sono già stati studiati in qualità di punti stazionari. Restano da ricercare i punti estremali di F sulla frontiera di R. Impostiamo quindi il seguente sistema, dove $g(x, y) = x^2 + y^2$ e $g_x = 2\,x$ e $g_y = 2\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 4\,xy(2\,x^2 + y^2 - 1) &= F_x = \lambda g_x &= 2\,\lambda\,x \\ 2\,x^2(x^2 + 3\,y^2 - 1) &= F_y = \lambda g_y &= 2\,\lambda\,y \\ x^2 + y^2 &= g(x, y) &= 4\,. \end{cases}$$

Nel districarsi tra queste equazione potrà sicuramente risultare d'aiuto, o quantomeno di conforto, l'essere consapevoli delle simmetrie per ribaltamento degli assi x (funzione pari) ed y (funzione dispari) godute sia da R che dalla F. Tali simmetrie determineranno la geometria delle soluzioni da estrarsi. Inoltre, sempre per ambientare lo studio, converrà tracciare qualche schizzo, ad esempio riportando una circonferenza di raggio 2 e centro l'origine su una copia del disegno effettuato per lo studio del segno. L'analisi del disegno ottenuto suggerisce che restino da determinarsi due massimi assoluti sull'arco superiore della circonferenza ora tracciata e due minimi assoluti sull'arco inferiore. Facendo ora parlare le equazioni, la prima va divisa per $x \neq 0$, poichè i punti con $x = 0$ sono già stati tutti studiati, e se poi la moltiplichiamo per y otteniamo che in tutte le equazioni appaiono solo potenze pari di x e di y. Inoltre, le prime due equazioni hanno ora entrambe λy come termine di destra, e pertanto posso eguagliare i termini di sinistra ottenendo $4y^2x^2 + 2y^4 - 2y^2 = x^4 + 3x^2y^2 - x^2$. A questo punto si sostituisca $x^2 = 2 - y^2$ dalla terza equazione per ottenere $3y^2 = 2$, ossia $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ cui dalla terza equazione corrisponde $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Abbiamo $F\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ e $F\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

2.d) 2 Max Assoluti: $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $F\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

2 Min Assoluti: $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $F\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

oltre ai max/min relativi di cui a punto precedente

6/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $|z| \leq |x|$ e $x^2 + z^2 \leq R^2$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z. Sia $C_{inf} = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}, z \leq 0\}$. Sia $Q_{inf} = M \cap C_{inf}$ e sia Q_{sup} l'intersezione tra M ed il semispazio $z \geq 0$. Infine, sia $Q = Q_{sup} \cup Q_{inf}$.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra);

3.b. Esprimere M e Q_{inf} in coordinate cilindriche;

3.c. Esprimere M in coordinate Cartesiane e Q_{sup} in coordinate sferiche;

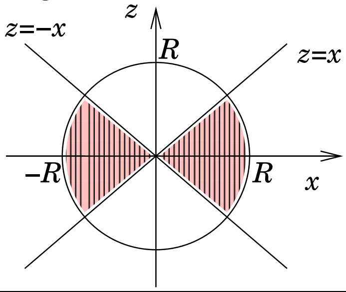
3.d. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.e. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \, dx \, dy \, dz$;

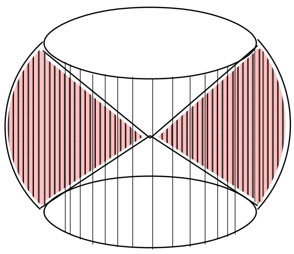
3.f. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E è l'intersezione tra il disco di raggio R centrato nell'origine e la farfalla $|z| \leq |x|$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare M



1+1/30

b) M **e** Q_{inf} **in coordinate cilindriche**

$$M = \{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |z| \le \rho, \rho^2+z^2 \le R^2\}$$

$$Q_{inf} = \{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le -z \le \rho \le \tfrac{R}{2}\}$$

1+1/30

c) M **in coordinate Cartesiane e** Q_{sup} **in coordinate sferiche**

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \le x^2+y^2, x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$$

$$Q_{sup} = \{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le \rho \le R, \ \tfrac{\pi}{4} \le \phi \le \tfrac{\pi}{2}\}$$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q, conviene scomporre Q in Q_{sup} e Q_{inf} con l'intento di lavorare in coordinate sferiche sul primo e cilindriche sul secondo al fine di sfruttare al meglio le simmetrie in gioco.

$$\begin{aligned}
V &= \int\int\int_{Q_{sup}} \rho^2 \sin\phi \ d\phi\, d\rho\, d\theta + \int\int\int_{Q_{inf}} \rho \ dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\phi \ d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{R}{2}}\int_{-\rho}^0 \rho \ dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \ d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \ d\phi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{2}} \rho \int_{-\rho}^0 dz\, d\rho \\
&= 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R [-\cos\phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \int_0^{\frac{R}{2}} \rho^2 \ d\rho \\
&= \frac{2}{3}\pi R^3 \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\frac{R}{2}} = \frac{(4\sqrt{2}+1)}{12}\pi R^3 .
\end{aligned}$$

d)

$$V = \int_{Q_{sup}} \rho^2 \sin\phi \ d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_{Q_{inf}} \rho \ dz\, d\rho\, d\theta = \tfrac{(4\sqrt{2}+1)}{12}\pi R^3$$

4/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_{Q_{sup}} \rho\cos\phi\rho^2\sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int\int\int_{Q_{inf}} z\cdot\rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3\frac{\sin 2\phi}{2} \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{R}{2}}\int_{-\rho}^{0} z\cdot\rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 \; d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\phi}{2} \; d\phi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{2}} \rho \int_{-\rho}^{0} z \; dz\, d\rho \\
&= 2\,\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R \left[-\frac{\cos 2\phi}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\,\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{R}{2}} \rho^3 \; d\rho \\
&= \frac{1}{2}\,\pi\,R^4\,\frac{1}{4} - \pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{R}{2}} = \frac{7}{64}\,\pi\,R^4\,.
\end{aligned}$$

e) $I = \int_{Q_{sup}} \rho\cos\phi\rho^2\sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_{Q_{inf}} z\cdot\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{7}{64}\,\pi\,R^4$ 4/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{7}{64}\,\pi\,R^4}{\frac{(4\sqrt{2}+1)}{12}\,\pi\,R^3} = \frac{21}{16\,(4\sqrt{2}+1)}\,R \;\cdot\; \frac{(4\sqrt{2}-1)}{(4\sqrt{2}-1)} = \frac{21\,(4\sqrt{2}-1)}{496}\,R\,.$$

f) $x_b = 0$	$y_b = 0$	$z_b = \frac{I}{V} = \frac{21\,(4\sqrt{2}-1)}{496}\,R$ 2/30