Prova scritta di Matematica II - 20 settembre 2007 - CORREZIONE Fila B
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 parallelo al piano $x+y=10$ e distante 1 da $(0,0,0)$;

1.a.b. piano Π_2 passante per $(3,5,0)$ e contenente almeno 2 assi coordinati;

1.a.c. piano Π_3 costituito dai punti equidistanti da $(5,-5,5)$ e $(-5,5,5)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

La normale al piano Π_1 passante per $(0,0,0)$ è data da $N(t)=(t,t,0)$ e quindi il punto del piano Π_1 a minima distanza da $(0,0,0)$ ha la forma $(t,t,0)$. Il valore di t resta determinato dalla condizione $d((0,0,0),(t,t,0))=1$; ad esempio:

$$1 = 1^2 = d^2((0,0,0),(t,t,0)) = t^2+t^2 = 2\,t^2$$

da cui segue $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il piano risponde pertanto all'equazione $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

Contenendo 2 assi coordinati, il piano Π_2 sarà giocoforza normale al terzo asse (quale esso sia), ossia normale ad uno dei versori $(1,0,0)$ oppure $(0,1,0)$ oppure $(0,0,1)$. Allo stesso tempo, dovendo contenere l'origine (comune a tutti e 3 gli assi coordinati), il piano Π_1 conterrà il vettore $(3,5,0)$ che però è normale solamente a $(0,0,1)$. L'equazione ricercata è pertanto $z=0$ dato che la coordinata z del punto $(3,5,0)$ vale 0.

Il vettore $(5,-5,5)-(-5,5,5)=(10,-10,0)$ risulta ortogonale al piano Π_3 che inoltre passa per il punto $\frac{(5,-5,5)+(-5,5,5)}{2}=(0,0,5)$ ed avrà pertanto equazione $x-y=0$.

I piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono mutualmente ortogonali, come evidenziato dall'annullamento dei tre prodotti scalari $(1,1,0)\cdot(0,0,1)$, $(0,0,1)\cdot(1,-1,0)$, e $(1,-1,0)\cdot(1,1,0)$.

Π_1: $x+y=\sqrt{2}$	Π_1 (H) Π_2 (H) Π_3 (H) Π_1
Π_2: $z=0$	
Π_3: $x-y=0$	1+1+1+2/30

1.b. Determinare i valori di α e β per cui il seguente sistema

$$\begin{cases} x + y + \alpha\, z = 3 \\ x + y + z = \beta \\ y + 2\,z = 3 \end{cases}$$

1. ammette una ed una sola soluzione;
2. non ammette alcuna soluzione;
3. ammette infinite soluzioni.

La prima domanda chiede quando i 3 piani $x + y + \alpha\, z = 3$, $x + y + z = \beta$ e $y + 2z = 3$ si incontrano in uno ed un sol punto. Due rette si incontrano in un sol punto se e solo se non sono parallele. Analogamente, due piani si incontrano in una retta (cerniera) a meno che essi non siano paralleli. Questa retta incontrerá poi in un sol punto il terzo piano, a meno che non risulti parallela ad esso. Pertanto, i tre piani si incontrano in uno ed un sol punto se e solo se i rispettivi vettori normali non sono coplanari (si noti che la direzione della retta cerniera è ortogonale alle normali ai primi due piani). Un modo pratico per vedere se i 3 vettori sono coplanari consiste nel verificare l'eventuale annullamento del prodotto triplo:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right\| = 2 + \alpha - 2 - 1 = \alpha - 1\,.$$

Il sistema ha pertanto una ed una sola soluzione purchè $\alpha - 1 \neq 0$, ossia $\alpha \neq 1$. Si noti quindi che la risposta alla prima domanda (esistenza ed unicità della soluzione) non dipende in alcun modo dai termini noti delle tre equazioni ma solo dal determinante della matrice dei coefficienti. Quando $\alpha = 1$ si possono presentare due casi a seconda del valore di β. Qualora $\beta \neq 3$ allora la prima e seconda equazione si contraddicono, e quindi il sistema non ammette alcuna soluzione. (In questo caso i piani descritti da prima e seconda equazione sono paralleli). Se invece $\beta = 3$ allora le due equazioni non si contraddicono, anzi, esprimono precisamente la stessa condizione (i due piani sono coincidenti). A questo punto il numero delle soluzioni é infinito poichè questo piano ribadito con ridondanza nelle prime due equazioni non è comunque mai parallelo al piano descritto dalla terza equazione.

1.) una ed una sola soluzione per: $\alpha \neq 1$

2.) nessuna soluzione per: $\alpha = 1,\ \beta \neq 3$

3.) infinite soluzioni per: $\alpha = 1,\ \beta = 3$

2+1+2/30

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $O = (0,0,0)$ e la retta di equazioni parametriche $R(t) = (\sqrt{8},\ 2\,\pi\, t + 3,\ 1 - 2\,\pi\, t)$.

Conviene innanzittutto ricorrere ad una parametrizzazione più semplice, quale $R(t) = (\sqrt{8},\ t + 3,\ 1 - t)$ e realizzare che la retta ha direzione $(0, 1, -1)$. Poichè le altezze cadono ortogonali, risulta utile individuare il piano passante per O ed ortogonale alla retta: $(0, 1, -1) \cdot (x, y, z) = (0, 1, -1) \cdot (0, 0, 0)$, ossia $y - z = 0$. Tale piano interseca la retta nel punto determinato da $t + 3 = y = z = 1 - t$, ossia nel punto $R(-1) = (\sqrt{8},\ 2,\ 2)$. La distanza di $R(t)$ da O coincide con la distanza di $(\sqrt{8},\ 2,\ 2)$ da O e vale $\sqrt{8 + 4 + 4} = 4$.

$d(R, O) = 4\,.$

2/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R_1 di equazioni $x = 1$ e $z = y + 1$ e la retta R_2 di equazioni parametriche $R_2(t) = (-\sqrt{7},\ \pi\, t,\ 1 - \pi\, t)$ e determinare se esse siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Conviene innanzittutto ricorrere ad una parametrizzazione più semplice, quale $R_2(t) = (-\sqrt{7},\, t,\, 1-t)$. Si noti ora che, mentre la retta R_1 è contenuta nel piano $x = 1$, la retta R_2 è contenuta nel piano $x = -\sqrt{7}$; quindi $d(R_1, R_2) \geq 1 + \sqrt{7}$. Nel contempo, i punti $(1, 0, 1) \in R_1$ e $R_2(0) = (-\sqrt{7},\, 0,\, 1) \in R_2$ distano precisamente $1 + \sqrt{7}$; quindi $d(R_1, R_2){=}1 + \sqrt{7}$.

Nel reperire i due piani ed i due punti mi sono avvalso di un disegno, ossia della comprensione geometrica della situazione. Comunque, avrei potuto ottenere la normale a questi due piani paralleli facendo il prodotto vettoriale tra le direzioni $(0, 1, 1)$ e $(0,\, 1,\, -1)$ delle due rette. A questo punto l'ottenimento dei due piani era immediato, anche se non strettamente necessario al computo della distanza (potevo avvalermi del solo vettore normale ed ottenere ad esempio la distanza come norma del prodotto scalare tra il versore normale $(1, 0, 0)$ ed un qualsiasi vettore spostamento tra un punto di R_1 ed uno di R_2). Sempre osservando le direzioni $(0, 1, 1)$ e $(0,\, 1,\, -1)$ scopro che le rette non sono parallele, e quindi, visto che esse non sono incidenti (distanza maggiore di 0), ne deduco che nessun piano le possa contenere entrambe, ossia sono sghembe.

$d(R_1, R_2) = 1 + \sqrt{7}\,.$
le rette R_1 e R_2 sono sghembe 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = (x^2 + y^2)(xy - 1) + (x - y)^2 + xy\,.$

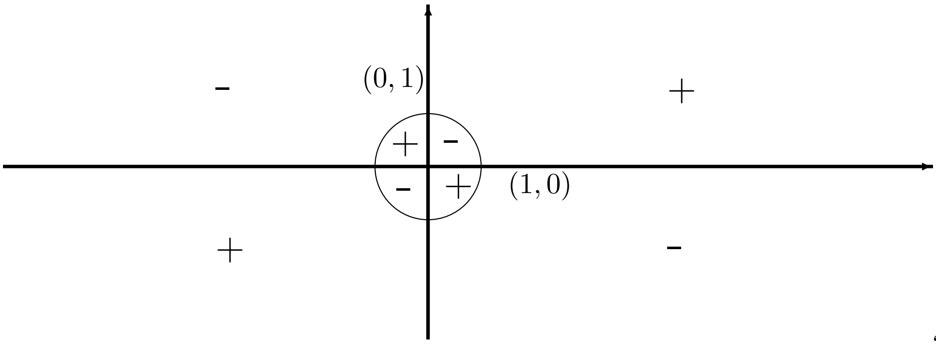
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F operando nelle tre solite fasi (sviluppare, semplificare, raccogliere):

$$\begin{array}{lll}
F(x, y) & = (x^2 + y^2)(xy - 1) + (x - y)^2 + xy & \text{come data} \\
& = x^3\, y - x^2 + y^3\, x - y^2 + x^2 + y^2 - 2\, xy + xy & \text{esplosa, sciolti i termini, sviluppata} \\
& = x^3\, y + y^3\, x - xy & \text{raccolti i termini, semplificata} \\
& = xy(x^2 + y^2 - 1)\,. & \text{raccolta, fattorizzata, semplificata}
\end{array}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o y o $(x^2 + y^2 - 1)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0 \vee x^2 + y^2 = 1\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 8 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Quattro di queste regioni sono limitate (quelle interne al cerchio).

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = xy(x^2+y^2-1)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = y(x^2+y^2-1)+xy(2\,x) = y(3\,x^2+y^2-1)$ ed analogamente (visto che $F(x,y) = F(y,x)$) si avrà $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x(3\,y^2+x^2-1)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} y(3\,x^2+y^2-1) &= 0 \\ x(3\,y^2+x^2-1) &= 0\,. \end{cases}$$

Si nota subito che $(x,y) = (0,0)$ è un punto stazionario. A dire il vero ciò risultava evidente anche dallo studio del segno che indicava per altro anche la presenza di altri quattro punti stazionari: $(0,\pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$. Di fatto, dallo studio del segno posso anche dedurre che questi 5 punti sono tutti selle. Ma vediamo come sia possibile estrarre, con metodo, tutti i punti che soddisfino le equazioni scritte sopra. (Caso mai ce ne siano altri, e comunque, anche solo per il gusto di meglio capire come vadano queste cose). Chiediamoci innanzittutto come stanare i 5 punti che già ci sono stati rivelati: assumendo $x = 0$, la seconda equazione risulta appagata e la prima equazione diventa $y(y^2-1) = 0$ portando ad individuare i punti $(0,0)$ e $(0,\pm 1)$. Parimenti, vista l'interscambiabilità della x e della y, assumendo $y = 0$, si individueranno i punti $(0,0)$ e $(\pm 1, 0)$. Pertanto, resta solo da indagare l'eventualitá che $x \neq 0$ e $y \neq 0$ valgano entrambe. Assumendo $x \neq 0$, la seconda equazione diviene $3\,y^2+x^2-1 = 0$, mentre, assumendo $y \neq 0$, la prima equazione diviene $3\,x^2+y^2-1 = 0$. Pertanto $3\,x^2+y^2 = 3\,y^2+x^2$ e quindi $2\,x^2 = 2\,y^2$ che porta a concludere $x = \pm y$. Dopo questa importante scoperta, dalla prima equazione segue $4\,x^2 = 1$ ossia $x = \pm\frac{1}{2}$ e restano così individuati i 4 ulteriori punti $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$. In effetti, a ripensarci, anche l'esistenza di questi 4 ulteriori punti (uno per ciascuna delle 4 regioni limitate) era deducibile dallo studio del segno poichè, per dirla alla Vasco, ogni regione limitata vive almeno un punto di massimo ed uno di minimo. (Inoltre, che la condizione $x = \pm y$ fosse rispettata da questi quattro punti era deducibile a priori dalle simmetrie della F: interscambiabilitá delle variabili ossia $F(x,y) = F(y,x)$, ma anche $F(-x,y) = -F(x,y) = F(x,-y)$). Ciascuno di questi 4 punti è il punto estremale ricercato nella regione chiusa di sua pertinenza (ossia nel suo quarto di cerchio), ed è pertanto punto estremale anche per la F (almeno in senso locale). Su tutto il piano, questi quattro punti sono dei massimi/minimi relativi, dacchè la F non è limitata. Ora, $F\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$ mentre $F\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

2.b) Elencare le selle, i massimi, i minimi:

5 PUNTI DI SELLA: $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm 1, 0)$.

2 PUNTI DI MAX. RELATIVO: $\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$ con $F\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

2 PUNTI DI MIN. RELATIVO: $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ con $F\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$.

3+3+2/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0, 1, 2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i, 0, F(i, 0))$;

Chiaramente, il punto $(i, 0, F(i, 0))$ appartiene al grafico della F per definizione stessa del concetto di grafico di funzione. Poichè $(0,0)$ e $(1,0)$ sono punti stazionari, ci attendiamo che il piano ivi tangente sia orrizzontale. Inoltre, $(0,0)$ e $(1,0)$ appartengono a Σ_0, quindi Π_0 e Π_1 hanno equazione $z = 0$. Inoltre, poichè Σ_0 contiene l'asse delle x, anche nel punto $(2,0)$ la F vale 0 ed inoltre la prima coordinata del gradiente è nulla. Quindi il piano tangente può essere inclinato solamente nella direzione delle y. L'equazione del piano tangente (testo, pag. 192) si riduce pertanto a

$$z = F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)\,,$$

Nel caso di Π_3, ricordando che $F_y = x(3\,y^2 + x^2 - 1)$, otteniamo l'equazione $z = F_y(2,0)\,(y - 0) = 6\,y$. Quanto ora trovato trova corrispondenza con le informazioni provenienti dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = 0$ Π_1: $z = 0$ Π_2: $z = 6\,y$

1+1+1/30

2.d. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x,y) := [xy(x^2 + y^2 - 1)]^2$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$D[h] = \mathbb{R}^2$

1/30

2.e. Determinare tutti i punti estremali di $h(x,y) = [xy(x^2 + y^2 - 1)]^2$ nella regione $D[h]$.

Poichè $h(x,y) = [F(x,y)]^2$, e considerato che nell'elevare al quadrato si perde il segno ma la funzione $(\cdot)^2$ è monotona crescente sui reali non-negativi, possiamo allora avvalerci dell'analogo studio per la funzione F. Si giunge alle seguenti conclusioni.

2.f)

NON LIMITATA SUPERIORMENTE MA CON DEI MAX RELATIVI.

4 MAX RELATIVI: $\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ dove $h = \frac{1}{64}$

INFINITI MIN ASSOLUTI: tutti e soli i punti di Σ_0

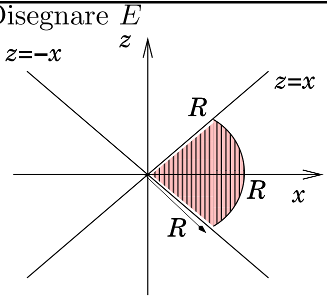
2/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $|z| \leq x$ e $x^2 + z^2 \leq R^2$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z. Sia F l'intersezione tra M ed il piano $z = -\frac{R}{2}$.

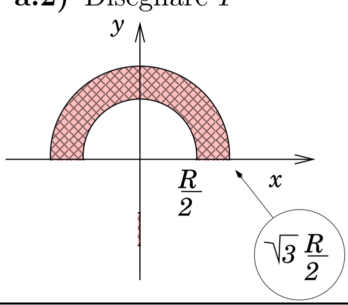
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che F (sulla destra);
3.b. Esprimere F ed M in coordinate cilindriche;
3.c. Esprimere F ed M in coordinate cartesiane;
3.d. Esprimere M in coordinate sferiche;
3.e. Calcolare il volume di M mediante integrazione;
3.f. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_M y \; dx\, dy\, dz$;
3.g. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di M;

La figura piana E è un quarto di circonferenza (la bocca di PacMan). La figura piana F è una circonferenza di raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ cui è stata tolta una circonferenza di raggio $\frac{R}{2}$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare F



1+2/30

b) F **ed** M **in coordinate cilindriche**

$$F = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = -\frac{R}{2},\; 0 \leq \theta \leq \pi,\; \frac{R}{2} \leq \rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R \right\}$$

$$M = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; |z| \leq \rho,\; z^2 + \rho^2 \leq R^2,\; 0 \leq \theta \leq \pi \right\}$$

1+1/30

c) F **ed** M **in coordinate cartesiane**

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = -\frac{R}{2},\; y \geq 0,\; \frac{R^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4} R^2 \right\}$$

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z^2 \leq x^2 + y^2,\; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\; y \geq 0 \right\}$$

1+1/30

d) M **in coordinate sferiche**

$$M = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \; : \; \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3}{4} \pi \; \rho \leq R,\; 0 \leq \theta \leq \pi \right\}$$

1/30

Per il computo del volume V di M conviene lavorare in coordinate sferiche.

$$V = \int\int\int_M \rho^2 \sin\phi \; d\phi \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{R} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^2 \sin\phi \; d\phi \, d\rho \, d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} \rho^2 \; d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin\phi \; d\phi \\
&= \pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R \left[-\cos\phi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi\, R^3 \,.
\end{aligned}
$$

d) $V = \int_0^{\pi} \int_0^{R} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi\, R^3$

3/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_M y\rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{R} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^3 \sin\phi \sin\theta \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta \int_0^{R} \rho^3 \; d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin^2\phi \; d\phi \\
&= \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R \left[\frac{\phi - \sin\phi\cos\phi}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= 2 \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi+2}{4} \\
&= \frac{\pi+2}{8} R^4 \,.
\end{aligned}
$$

e) $I = \int_0^{\pi} \int_0^{R} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} y\rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi+2}{8} R^4$

5/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $z_b = 0$, e

$$
y_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{\pi+2}{8} R^4}{\frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi\, R^3} = \frac{3\sqrt{2}}{16}\, \frac{\pi+2}{\pi}\, R \,.
$$

f) $x_b = 0$ $\quad$ $y_b = \frac{I}{V} = \frac{3\sqrt{2}}{16}\,\frac{\pi+2}{\pi}\, R$ $\quad$ $z_b = 0$

2/30