Prova scritta di Matematica II - 6 dicembre 2006 - **CORREZIONE Fila A**

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Calcolare la distanza tra i punti $P = (2,3,5)$ e $Q = (1,-6,2)$.

$$d(P,Q) = \sqrt{\underbrace{(2-1)^2}_{1} + \underbrace{(3-(-6))^2}_{81} + \underbrace{(5-2)^2}_{9}} = \sqrt{91}\,.$$

1/30

1.b. Calcolare la distanza tra il punto $P = (2,3,5)$ ed il piano $\Sigma_1 :\ 4x - 2y + 4z = 4$.

$$d(P,\Sigma_1) = \frac{|4\,(2)-2\,(3)+4\,(5)-4|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{18}{\sqrt{36}} = \frac{18}{6} = 3$$

2/30

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $P = (2,3,5)$ e la retta R di equazioni $4x - 2y + 4z = 2$ e $z = x$. Esprimere R in forma parametrica.

Conviene innanzitutto esprimere R in forma parametrica. Poichè $z = x$, converrà prendere come paramero t proprio il comune valore delle variabili x ed y, pervenendo quindi alla seguente scrittura in forma parametrica.

$$\begin{cases} x &= & t & \\ y &= & 4\,t & -1 \\ z &= & t & \end{cases}$$

Ora che il generico punto $R(t)$ di R è espresso in dipendenza di un singolo parametro t, possiamo minimizzare $d(P,R(t)) = \sqrt{(t-2)^2 + ((4\,t-1)-(3))^2 + (t-5)^2} = \sqrt{18\,t^2 - 46\,t + 45}$ che equivale a minimizzare il funzionale $g(t) = 18\,t^2 - 46\,t + 45$ dacchè la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è monotona crescente. Il minimo si ha per $t = \frac{23}{18}$ come si può evidenziare imponendo $0 = g'(t) = 36\,t - 46$. Il punto di R che minimizza $g(t)$ è pertanto $Q = (23/18, 4\,(23/18) - 1, 23/18) = (23/18, 37/9, 23/18)$. Conviene verificare ora che Q appartiene ai piani $4x - 2y + 4z = 2$ e $z = x$. Per $z = x$ la verifica risulta immediata. Inoltre, $4(23/18) - 2(37/9) + 4(23/18) = 92/9 - 74/9 = 18/9 = 2$. A questo punto, $d(P,R) = d(P,Q) = \sqrt{(2-23/18)^2 + (3-37/9)^2 + (5-23/18)^2} = \sqrt{(13/18)^2 + (-10/9)^2 + (67/18)^2} = \frac{\sqrt{169+400+4489}}{18} = \frac{\sqrt{5058}}{18} = \frac{3\sqrt{562}}{18} = \frac{\sqrt{562}}{6}$.

$$R : \begin{cases} x &= & t & \\ y &= & 4\,t & -1 \\ z &= & t & \end{cases} \qquad d(P,R) = \sqrt{\left(2-\tfrac{23}{18}\right)^2 + \left(3-\tfrac{37}{9}\right)^2 + \left(5-\tfrac{23}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{562}}{6}$$

3/30

1.d. Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = 1+t$, $y = 1-6t$, $z = 2t$ e $x = 1+2s$, $y = 5+15s$, $z = -2+6s$.

Il più corto segmento che congiunge R_1 ed R_2 sarà ortogonale ad entrambe ossia parallelo al vettore $(1,-6,2) \wedge (2,15,6) = (-66,-2,27)$. Si prenda un qualsiasi punto della retta

R_1, come ad esempio il punto $(1,1,0)$ e si osservi che la retta R_1 sarà contenuta nel piano Π_1 di equazione $-66(x-1)-2(y-1)+27(z-0)=0$, ossia $66\,x+2\,y-27\,z=68$. Si noti che anche R_2 è parallela al piano $66\,x+2\,y-27\,z=68$. Si prenda pertanto un qualsiasi punto della retta R_2, come ad esempio il punto $(1,5,-2)$ e ci si avvalga ancora una volta della formula per il computo della distanza punto/piano per riempire il seguente riquadro.

$$d(R_1,R_2)=\frac{|66\,(1)+2\,(5)-27\,(-2)-68|}{\sqrt{66^2+(2)^2+27^2}}=\frac{62}{\sqrt{5089}}$$

4/30

1.e. Calcolare per quale valore di α il piano Σ_α di equazione $\alpha x-3y+\alpha z=-4\,\alpha$ risulta parallelo al piano Σ_1 di equazione $4x-2y+4z=2$. Determinare quindi la distanza tra questi due piani paralleli.

Chiaramente, $\alpha=4\cdot\frac{3}{2}=6$ e $\Sigma_\alpha:\ 6x-3y+6z=-24$.

$$\Sigma_\alpha:\ 6x-3y+6z=-24 \qquad \left(\alpha=4\cdot\tfrac{3}{2}=6\right)$$

1/30

La strategia per determinare la distanza tra il piano $\Sigma_1:\ 4x-2y+4z=2$ ed il piano $\Sigma_6:\ 6x-3y+6z=-24$ consiste nello scegliere un punto a caso di Σ_6 e nell'utilizzare quindi la formula per il computo della distanza punto/piano. Un punto conveniente è forse $T=(-4,0,0)$. A questo punto possiamo riempire il riquadro.

$$d(\Sigma_1,\Sigma_\alpha)=\frac{|4\,(-4)-2\,(0)+4\,(0)-2|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{|-18|}{\sqrt{36}}=\frac{18}{6}=3$$

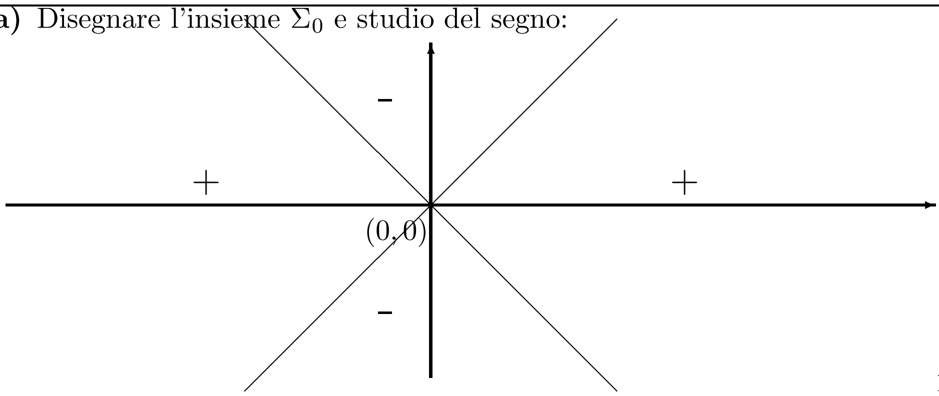
2/30

2. È data la funzione $F(x,y)=3\,x^2-3\,y^2$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0=\{(x,y)\mid F(x,y)=0\ \}$ e studiare il segno di F;

Per la legge di annullamento del prodotto, la funzione $F(x,y)=3\,x^2-3\,y^2=3(x^2-y^2)=3(x-y)(x+y)$ si annulla precisamente per quelle coppie (x,y) tali che $x=\pm y$. Pertanto, l'insieme di livello $\Sigma_0:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid F(x,y)=0\ \}$ é catturato nella scrittura $\Sigma_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=\pm y\ \}$. Può risultare utile, per una prima conoscenza della F, tracciarsi le rette in Σ_0 nel piano $x-y$ preso a dominio della F. Tali rette suddividono il piano in 4 regioni, ciascuna labellabile col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si disporranno a scacchiera.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 6\,x$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = -6\,y$ e, chiaramente, l'origine è l'unico punto (x, y) che soddisfa al sistema

$$\begin{cases} 6\,x &= 0 \\ -6\,y &= 0 \end{cases}$$

ossia rispetta la condizione di annullamento del gradiente. Abbiamo pertanto un solo punto stazionario: il punto $(0,0)$. Si noti che $F(0,0) = 0$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0,0)$ è punto di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$.

L'origine $(0,0)$ è punto di sella.

3/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(0,0,0)$.

Poichè $(0,0)$ è punto stazionario, ne consegue che il piano ivi tangente è orizzontale.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(0,0,0)$:

$z = 0$

2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $9\,x^2 + 4\,y^2 \leq 36$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, ossia lungo il bordo dell'elisse $9\,x^2 + 4\,y^2 \leq 36$, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 6\,x &= F_x = \lambda g_x = & 18\,\lambda\,x \\ -6\,y &= F_y = \lambda g_y = & 8\,\lambda\,y \\ 9\,x^2 + 4\,y^2 &= g(x,y) = & 36\,. \end{cases} \implies \begin{cases} x(3\,\lambda - 1) &= 0 \\ y(4\,\lambda + 3) &= 0 \\ 9\,x^2 + 4\,y^2 &= 36 \end{cases}$$

Anche se non è difficile gestire questo sistema per estrarne le soluzioni procedendo anche in modo automatico ed alla ceca, conviene comunque sempre procedere con nozione di causa. Intendiamo quindi prefigurarci innanzittutto dove possano risiedere i punti estremali e quanti possano/debbano essere. Può sicuramente snellirci il lavoro avere delle intuizioni preliminari sul tipo di radici che possiamo aspettarci. Un primo studio sulla parità della funzione ci rivela che $F(x,-y) = F(x,y) = F(-x,y)$. Pertanto i punti estremali saranno accoppiati: se (x,y) e punto di massimo (o di minimo) relativo (od assoluto) allora anche $(x,-y)$, $(-x,y)$ e $(-x,-y)$ sarà punto di mmassimo (o, rispettivamente, di minimo) relativo (o, rispettivamente, assoluto). Dalla prima equazione segue che se $x \neq 0$ allora $\lambda = \frac{1}{3}$, mentre dalla seconda equazione segue che se $y \neq 0$ allora $\lambda = -\frac{3}{4}$. Poichè l'origine $(0,0)$ non rispetta il terzo vincolo (non è sulla frontiera), allora ogni soluzione ha precisamente una coordinata nulla. Le soluzioni sono pertanto $(0,\pm 3)$ e $(\pm 2, 0)$. Ora, $F(0,\pm 3) = -27 < 0$ mentre $F(\pm 2, 0) = 12 > 0$. È facile dedurre che questi 4 punti non possono essere punti di sella. Di fatto essi sono massimi e minimi assoluti.

2.d)

2 Minimi Assoluti: $(0,\pm 3)$; $F(0,\pm 3) = -27$

2 Massimi Assoluti: $(\pm 2, 0)$; $F(\pm 2, 0) = 12$

5/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $x = 0$ contenuta tra due cerchi concentrici C_1 e C_2 con centro l'origine e raggio $R_1 = 3$ ed $R_2 = 5$ rispettivamente. Sia M_E il solido che si ottiene facendo ruotare E attorno all'asse delle z. Sia M_R il solido ottenuto come intersezione tra M_E ed il semispazio $\{z \geq R_1\}$. Sia R la superfice ottenuta come intersezione tra M_R ed il piano $x = 0$.

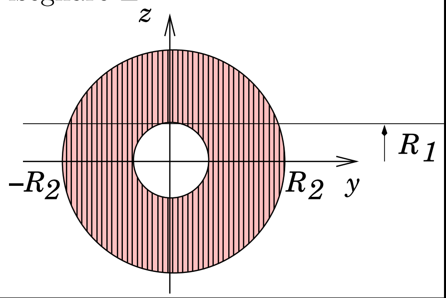
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che R (sulla destra);

3.b. Esprimere M_R ed R in coordinate Cartesiane;

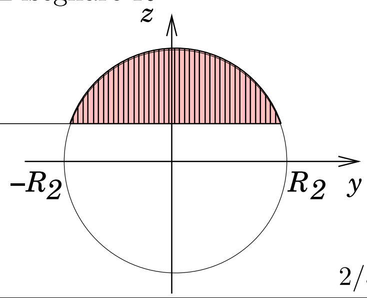
3.c. Calcolare il volume di M_R mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_{M_R} xy \, dx \, dy \, dz$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare R



2/30

b)

$$M_R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; R_1^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R_2^2, z \geq R_1, \;\right\}$$

$$R = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y^2+z^2 \leq R_2^2, z \geq R_1, \;\right\}$$

3/30

Vista la simmetria cilindrica di M, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate cilindriche per il computo del volume V di M.

$$\begin{aligned}
V &= \int_M 1 \; dx\, dy\, dz = \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\sqrt{R_2^2-z^2}} \rho \; d\rho \; dz = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R_2^2-z^2}} dz \\
&= \pi \int_{R_1}^{R_2} R_2^2 - z^2 \; dz = \pi \left[R_2^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{R_1}^{R_2} = \pi \left[R_2^2(R_2-R_1) - \frac{R_2^3-R_1^3}{3}\right] \\
&= \left[R_2^2(R_2-R_1) + \frac{R_1^3-R_2^3}{3}\right] \pi \qquad\qquad \text{(questa è la formula generale)} \\
&= \left[25(2) + \frac{27-125}{3}\right] \pi = \frac{52}{3}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

c)

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R_2^2-R_1^2}} \int_{R_1}^{\sqrt{R_2^2-\rho^2}} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \tfrac{52}{3}\,\pi$$

5/30

A titolo di verifica, propongo anche una seconda derivazione, (anche se tecnicamente più complicata).

$$\begin{aligned}
V &= \int_M 1 \; dx\, dy\, dz = \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) \int_0^{\sqrt{R_2^2-R_1^2}} \rho \left(\int_{R_1}^{\sqrt{R_2^2-\rho^2}} 1 \; dz\right) \; d\rho \\
&= 2\pi \int_0^4 \rho \left(\int_3^{\sqrt{25-\rho^2}} 1 \; dz\right) \; d\rho \\
&= 2\pi \int_0^4 \rho(\sqrt{25-\rho^2}-3) \; d\rho = 2\pi \left(\left[-\frac{3}{2}\rho^2\right]_0^4 - \frac{1}{2}\int_{25}^9 \sqrt{25-\rho^2}\; d(25-\rho^2)\right) \\
&= 2\pi \left(-24 + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_9^{25}\right) = 2\pi \left(-24 + \frac{1}{3}\,(125-27)\right) = \frac{52}{3}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda I, si osservi che la funzione integranda $f(x,y,z) = xy$ gode della anti-simmetria $f(x,-y,z) = -f(x,y,z)$ e la regione di integrazione (tutto il solido M) è simmetrica rispetto al ribaltamento dell'asse delle y. Pertanto i contributi per $y > 0$ si elidono con corrispondenti contributi per $y < 0$, ed $I = 0$.

$$\begin{aligned} I &= \int_M xy\; dx\, dy\, dz = \int_{M, y\geq 0} xy\; dx\, dy\, dz + \int_{M, y\leq 0} xy\; dx\, dy\, dz \\ &= \int_{M, y\geq 0} xy\; dx\, dy\, dz + \int_{M, y\geq 0} x(-y)\; dx\, dy\, dz \\ &= \int_{M, y\geq 0} xy\; dx\, dy\, dz - \int_{M, y\geq 0} xy\; dx\, dy\, dz = 0\,. \end{aligned}$$

d)

$I = 0$ poichè M è simmetrico rispetto a inversione dell'asse delle y

3/30