Prova scritta di Matematica II - 31 agosto 2006 - **CORREZIONE Fila A**

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a piano Π_1 passante per $(1,1,0),(2,1,0),(0,2,2)$;

1.a.b piano Π_2 passante per $(0,2,2)$ e ortogonale a $(0,2,-1)$;

1.a.c piano Π_3 contenente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (1+t,1,0)$ e che interseca il piano $y-z$ nel punto $(0,2,2)$.

Il piano Π_2 passante per $(0,2,2)$ e ortogonale a $(0,2,-1)$ avrà equazione $[(x,y,z)-(0,2,2)]\cdot(0,2,-1) = 0$ ossia $2y-z-2=0$. È facile verificare che tale equazione risulta soddisfatta anche dai punti $(1,1,0)$ e $(2,1,0)$ e più in generale da tutti i punti della forma $(1+t,1,0)$. Ne consegue che questo piano è un sol piccione per 3 fave.

Π_1:2y-z-2=0

Π_2:2y-z-2=0

Π_3:2y-z-2=0

2+2+2/30

1.b. In un riferimento Cartesiano x,y,z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (3,4,0) \qquad Q = v = (0,3,4) \qquad T = w = (4,3,0)\,.$$

1.b.a. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$$u \cdot v \wedge w = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{3\cdot 3\cdot 0}_{0} + \underbrace{4\cdot 4\cdot 4}_{+64} + \underbrace{0\cdot 0\cdot 3}_{0} - \underbrace{4\cdot 3\cdot 3}_{36} - 0 - 0 = 28$$

1/30

1.b.b. Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

L'area del triangolo é metá dell'area del parallelogramma di lati $\vec{PQ} = (0,3,4)-(3,4,0) = (-3,-1,4)$ e $\vec{PT} = (4,3,0)-(3,4,0) = (1,-1,0)$, ossia metá della lunghezza del vettore $\vec{PQ} \wedge \vec{PT} = (-3,-1,4) \wedge (1,-1,0) = (4,4,4)$. In effetti $(4,4,4)$ è ortogonale (= prodotto scalare nullo) sia a $(-3,-1,4)$ che a $(1,-1,0)$ il che mi vale come rapida verifica parziale (per altro assai affidabile -dovrei fare 3 errori per non rilevare l'errore) del prodotto vettoriale computato. Pertanto, $Area(PQT) = \frac{1}{2}\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}$.

$$\text{Area}(PQT) = \tfrac{1}{2}||\vec{PQ} \wedge \vec{PT}|| = \tfrac{1}{2}||(4,4,4)|| = \tfrac{1}{2}4\sqrt{1^2+1^2+1^2} = 2\sqrt{3}$$

2/30

1.b.c. Determinare la distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q e la distanza di P dalla retta r_{QT} passante per Q e T.

La distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q corrisponde all'altezza del triangolo PQT rispetto alla base $\overline{PQ}$. Conviene avvalersi di quanto calcolato al punto precedente.

$$d(T, r_{PQ}) = \frac{2 \cdot \text{Area}(PQT)}{||\vec{PQ}||} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{6}}{13} \qquad d(P, r_{QT}) = \frac{4\sqrt{3}}{||(4,0,-4)||} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

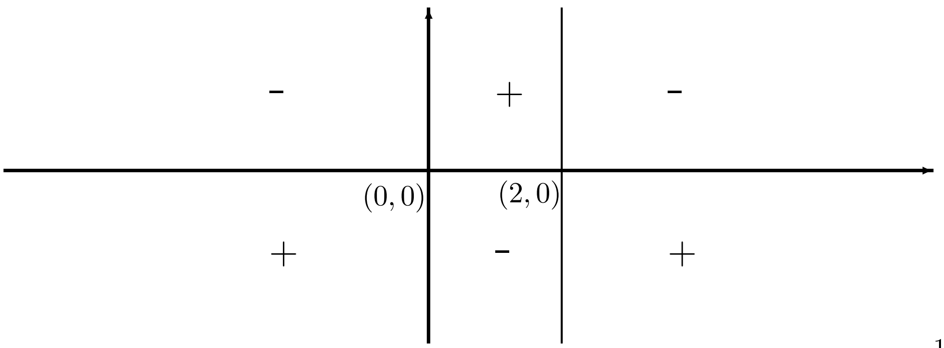
3/30

2. È data la funzione $F(x, y) = 2\,x\,y - x^2\,y$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

La funzione $F(x, y) = 2\,x\,y - x^2\,y = xy(2-x)$ é data come prodotto di 3 monomi: x, $(2-x)$ e y. Per la legge di annullamento del prodotto, l'insieme di livello $\Sigma_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\ \}$ é catturato nella scrittura $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0) \vee (x = 2) \vee (y = 0)\ \}$. Può risultare utile, per una prima conoscenza della F, tracciarsi le rette in Σ_0 nel piano $x - y$ preso a dominio della F. Tali rette suddividono il piano in 6 regioni, ciascuna labellabile col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si disporranno a scacchiera.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2y - 2xy = 2y(1-x)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2x - x^2 = x(2-x)$ ed i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2y(1-x) &= 0 \\ x(2-x) &= 0 \end{cases}$$

ottenuto imponendo la condizione di annullamento del gradiente, debbono tutti avere $x \in \{0, 2\}$ per soddisfare alla seconda equazione. Pertanto, l'unico modo per soddisfare anche alla prima equazione é di avere $y = 0$. Abbiamo pertanto 2 soli punti stazionari: il punto $(0,0)$ ed il punto $(2,0)$. Si noti che $F(0,0) = 0 = F(2,0)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che entrambi i punti sono di sella.

> **2.b)** Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:
>
> PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$ e $(2,0)$.
>
> I punti $(0,0)$ e $(2,0)$ sono entrambi punti di sella. 4/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1,2,2)$.

In effetti il punto $(1,2,2)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1,2) = 2$. Possiamo quindi procedere. Poiché le derivate parziali $F_x = 2y(1-x)$ e $F_y = x(2-x)$ esistono e sono continue in un intorno di $(1,2)$, la F é differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto puó essere considerato come l'approssimazione lineare della F nel punto $(1,2,2)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1,2) = F_x(1,2)\,(x-1) + F_y(1,2)\,(y-2)$ ed otteniamo l'equazione $z - 2 = 0 + 1\,(y-2)$, che si semplifica in $z = y$. A titolo di verifica, si noti come in effetti il punto $(1,2,2)$ appartenga a tale piano.

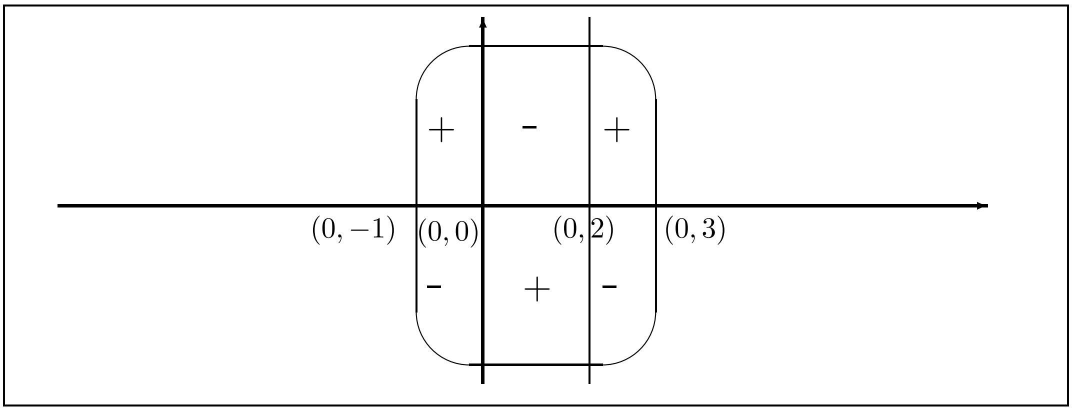
> **2.c)** Equazione del piano tangente F in $(1,2,2)$:
>
> $z = y$ 4/30

2.d. Determinare tutti gli estremi di F nella regione $R = \{\,(x,y)\ :\ 3\,x^2 - 6\,x + y^2 \leq 9\,\}$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 2y(1-x) & = F_x = \lambda g_x = & \lambda(6x-6) = 6\,\lambda(x-1) \\ x(2-x) & = F_y = \lambda g_y = & \lambda(2y) \\ 3x^2 - 6x + y^2 & = g(x,y) = & 9\,. \end{cases}$$

Vedremo più sotto che risulta umanamente possibile gestire questo sistema per estrarne le soluzioni, però è necessario procedere con cautela e metodo. Siccome che ciò sia possibile non può mai essere dato troppo per scontato, risulta sempre conveniente prendere in esame la forma del problema catturato dalle equazioni al fine di avere delle intuizioni preliminari sul tipo di radici che possiamo aspettarci. Un primo studio sulla parità della funzione ci rivela che $F(x,-y) = F(x,y)$. Pertanto, eccetto ove $y = 0$, i punti estremali saranno accoppiati: se (x,y) e punto di massimo (o di minimo) relativo (od assoluto) allora $(x,-y)$ e punto di minimo (o, rispettivamente, di massimo) relativo (o, rispettivamente, assoluto). Poichè la F è il prodotto di un monomio nella sola y per un polinomio di secondo grado nella sola x, un occhio più attento potrebbe rivelare anche una parità sulla x: $F(1+x,y) = F(1-x,y)$ che, anche se non intendiamo sfruttare, può sempre venire comoda nel confermarci che le radici eventualmente prodotte hanno un aspetto ragionevole. Ma quante di queste radici dobbiamo aspettarci e dove potrebbero essere grosso modo posizionate? Per rispondere a queste domande, visualizziamo il contorno della regione $R = \{ (x,y) \ : \ 3\,x^2 - 6\,x + y^2 \le 9 \}$ sul piano dove abbiamo condotto lo studio del segno.



Possiamo ora osservare che R si compone di 6 regioni chiuse incollate tra loro su quelle parti di bordo complessivamente costituenti Σ. Su ciascuna di tali regioni la F assume solo valori non negativi, se la regione è contrassegnata con un "-", o non positivi, se la regione è contrassegnata con un "+". Su ciascuna di tali regioni la F dovrà avere sia punti di massimo che di minimo e questi punti dovranno essere situati sul contorno della regione. Se la regione è contrassegnata con un "+", allora sappiamo già dove sono situati gli infiniti punti di minimo (tutti a valore nullo della F e situati in Σ), ma poiche nella regione la F assume anche valori non nulli, resta da localizzare almeno un punto di massimo, necessariamente localizzato internamente all'arco di elisse che contorna tale regione. Analogo discorso (solo rovesciato) vale se la regione è contrassegnata con un "-". Le equazioni di Lagrange dovranno pertanto restituire almeno 6 soluzioni, e tutte le soluzioni prodotte dovranno godere delle caleidoscopiche simmetrie sopra annunciate.

Torniamo ora al nostro sistema. La prima equazione si semplifica in $2y = -6\,\lambda$ assumendo $(x-1) \neq 0$. In effetti il caso $x = 1$ è presto sviscerato: dalla terza equazione consegue $y = \pm\sqrt{12} = \pm 2\,\sqrt{3}$ ed esiste sicuramente un valore di λ che rende soddisfatta anche la terza equazione. Teniamo quindi presente che $F(1, \pm 2\sqrt{3}) = \mp 2\sqrt{3}$ ma, prima di poter stabilire l'effettiva natura di tali punti, dobbiamo andare a vedere quali altre soluzioni restino individuate dalle equazioni di Lagrange, ossia se vi sono altri candidati ad essere punti di estremo (le condizioni di Lagrange sono necessarie ma non sufficienti). Sostituendo prima $\lambda = -\frac{y}{3}$ (dalla prima equazione), e quindi $y^2 = 9 - 3x^2 + 6x$ (dalla terza equazione), la seconda equazione diviene un'equazione di secondo grado nella sola x che si semplifica poi in $x^2 - 2x - 2 = 0$ ed ha radici $x = 1 \pm \sqrt{3}$. Dall'equazione $y^2 = 9 - 3x^2 + 6x$ possiamo ora ottenere

$$y^2 = 9 - 3(1 \pm \sqrt{3})^2 + 6(1 \pm \sqrt{3}) = 9 - 3(1 + 3 \pm 2\sqrt{3}) + 6(1 \pm \sqrt{3}) = 3$$

da cui $y = \pm\sqrt{3}$. Campionando la F sui punti messi in evidenza otteniamo $F(1\pm\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ e $F(1 \pm \sqrt{3}, -\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$. Queste sono tutte e sole le soluzioni alle equazioni di Lagrange. Siamo fortunati: abbiamo esattamente una soluzione per ciascuno degli archi di elisse, e quindi non ci sono dubbi che ciascuna di tali soluzioni individua un punto di estremo della F su R.

2.d)

3 Minimi Assoluti: $(1, 2\sqrt{3}),\ (1 \pm \sqrt{3}, -\sqrt{3}),\ ;\ \ F = -2\sqrt{3}$

3 Massimi Assoluti: $(1, -2\sqrt{3}),\ (1 \pm \sqrt{3}, \sqrt{3})\ ;\ \ F = 2\sqrt{3}$

7/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati: E = parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $x^2 + z^2 \leq R^2$ e $|z| \leq |x|$, e M = solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra);

3.b. Esprimere M in coordinate Cartesiane;

3.c. Calcolare il volume di M mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_M z\ dx\, dy\, dz$;

3.e. Calcolare la superficie di M.

La figura piana E è data dall'intersezione del disco di raggio R con l'insieme di punti che soddisfano alla diseguaglianza $|z| \leq |x|$. Molti di voi hanno avuto difficoltà ad interpretare il luogo del piano descritto da $|z| \leq |x|$. Le diseguaglianze sono più astratte da afferrare ed esprimere che non le eguaglianze, ma, poichè la diseguaglianza in questione coinvolge solo operatori continui, sarà sufficiente comprendere l'eguaglianza $|z| = |x|$ che catturerà il contorno della regione di interesse. I punti che rispondono a tale eguaglianza sono i punti $z = \pm x$. Se questo ultimo passaggio sembra ancora troppo difficile da intuire, allora uno può adottare un metodo carroarmato (ed in primo principio universale) per la gestione dell'operatore di valore assoluto:

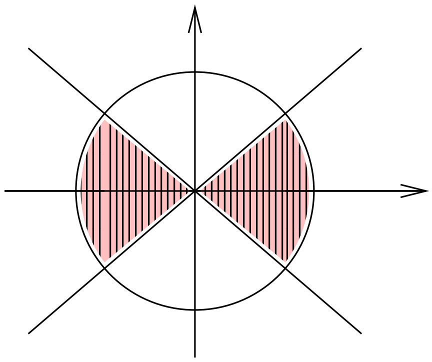
caso 1: $x, z \geq 0$ - siamo nel 1^o quadrante, dove $|z| = |x|$ traccia la semiretta $x = z$.

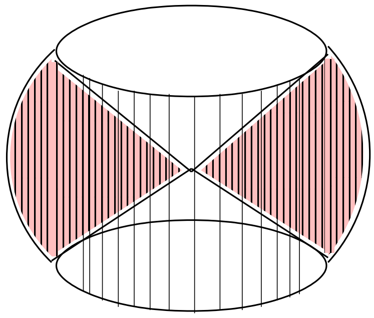
caso 2: $x \geq 0$, $z \leq 0$, - siamo nel 1^o quadrante, dove $|z| = |x|$ traccia la semiretta $x = -z$.

caso 3: $z \geq 0$, $x \leq 0$, - siamo nel 1^o quadrante, dove $|z| = |x|$ traccia la semiretta $x = -z$.

caso 4: $x, z \leq 0$ - siamo nel 1^o quadrante, dove $|z| = |x|$ traccia la semiretta $x = z$.

a) Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra)





1/30

b)

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \le R^2, \ |z| \le |x| \ \right\}$$

1/30

Vista la simmetria sferica di M, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate sferiche per il computo del volume V di M.

$$\begin{aligned}
V &= \int_M 1 \ dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^2 \sin\phi \ d\phi\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) \left(\int_0^R \rho^2 \ d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin\phi \ d\phi \right) \\
&= 2\pi \, \frac{R^3}{3} \, [-\cos\phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = 2\pi \, \frac{R^3}{3} (2 \, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}\,\pi \, \frac{R^3}{3} \, .
\end{aligned}$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^2 \sin\phi \ d\phi\, d\rho\, d\theta = 2\sqrt{2}\,\pi \, \frac{R^3}{3}$

5/30

Inoltre, le coordinate sferiche combinate con la formule trigonometriche di duplicazione degli angoli consentono anche un facile calcolo di I.

$$\begin{aligned}
I &= \int_M z \ dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho\cos\phi\,\rho^2 \sin\phi \ d\phi\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) \left(\int_0^R \rho^3 \ d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin 2\phi}{2} \ d\phi \right)
\end{aligned}$$

$$= \quad 2\pi\,\frac{R^4}{4}\left[-\frac{1}{4}\cos 2\phi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = 0\,.$$

In effetti il solido M gode della seguente simmetria $(x,y,z)\in M$ se e solo se $(x,y,-z)\in M$. Inoltre la funzione integranda z è ovviamente dispari rispetto al ribaltamento dell'asse delle z e quindi il contributo ad I raccolto nel semispazio $z\geq 0$ si elide con il contributo ad I raccolto nel semispazio $z\leq 0$. Con un pó di spirito di osservazione non serviva pertanto effettuare alcun calcolo per risolvere questo integrale. Per tutti gli altri un'ottima verifica dei conteggi effettuati.

d)

$$I = 0 \quad \text{poichè} \int_{\substack{x^2+y^2+z^2\leq R^2 \\ 0\leq z\leq |x|}} z\; dx\,dy\,dz = -\int_{\substack{x^2+y^2+z^2\leq R^2 \\ -|x|\leq z\leq 0}} z\; dx\,dy\,dz$$

3/30

La superfice di M andava scomposta nella superfice sulla sfera e nella superfice sul cono, avvalendosi quindi del celebre motto di Totò riguardo le somme. La superfice sul cono poteva essere facilmente calcolata tramite formule ripescate da riminescenze della scuola primaria, o dal Bignami, ma anche da una qualsiasi enciclopedia, o infine da internet (questa ultima possibilità vi è però preclusa durante il compito poichè non è consentito l'utilizzo di alcun dispositivo dalle calcolatrici e dai telefonini in su). Per la superficie sulla sfera conveniva probabilmete avvalersi della Formula 7 a pag. 293 del testo, e considerarla come prodotta dalla rotazione di un arco di circonferenza, ottenendo

$$\begin{aligned} S_{ext} &= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sqrt{R^2-z^2}\sqrt{1+\frac{4z^2}{4(R^2-z^2)}}\; dz \\ &= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} R\; dz = 2\sqrt{2}\,\pi\,\mathbb{R}^2\,. \end{aligned}$$

Per la superfice del cono, i parametri sono R (altezza obliqua) e $2\pi\frac{R}{\sqrt{2}}$ (circonferenza). Quindi, con riferimento alla sola metà del doppio cono (ad esempio il cono che si apre verso l'alto), la superfice interessata misurerà $\pi R^2\frac{2\pi\frac{R}{\sqrt{2}}}{2\pi R} = \frac{1}{2}\pi R^2$.

e)

$$S = \pi R^2 + 2\sqrt{2}\,\pi\,\mathbb{R}^2$$

7/30