Prova scritta di Matematica II - 5 luglio 2006 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Calcolare per quale valore di α il piano Σ_α di equazione $10\,x + 10\,\alpha\,y - 20\,z = 15\,\alpha$ risulta parallelo al piano Σ di equazione $2\,x + 4\,y - 4\,z = 0$. Determinare quindi la distanza tra questi due piani paralleli.

Due piani Σ_1 e Σ_2, di equazioni $a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1$ e $a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2$ sono parallali precisamente quando sono paralleli i vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2). Infatti, il vettore dei coefficienti direttori è sempre ortogonale al piano (Sezione 2.5 del vostro libro di testo). Inoltre, due vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono paralleli se e solo se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Nel nostro caso, il rapporto $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$ risulta verificato per ogni valore di α e resta quindi da impostare il rapporto $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, che conduce al valore $\alpha = 2$. Sostituendo, $\Sigma_\alpha :\, 10\,x + 20\,y - 20\,z = 30$, ossia $\Sigma_\alpha :\, x + 2\,y - 2\,z = 3$.

$$\boxed{\Sigma_\alpha :\, x + 2\,y - 2\,z = 3 \qquad (\alpha = 2)}$$

1/30

La strategia per determinare la distanza tra il piano $\Sigma :\, 2\,x + 4\,y - 4\,z = 0$ ed il piano $\Sigma_2 :\, x + 2\,y - 2\,z = 3$ consiste nello scegliere un punto a caso di Σ_2 e nell'utilizzare quindi la formula per il computo della distanza punto/piano. Un punto conveniente è forse $T = (3, 0, 0)$. A questo punto possiamo riempire il riquadro.

$$\boxed{d(\Sigma, \Sigma_\alpha) = \frac{|2\,(3) + 4\,(0) - 4\,(0)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = \frac{6}{6} = 1}$$

2/30

1.b. Verificare che le rette R_1 ed R_2 di equazioni simmetriche $x = y = z$ e $x + 1 = y/2 = z/3$ sono sghembe, e calcolarne la distanza.

Le due rette non sono parallele poichè i vettori $(1, 1, 1)$ (parallelo ad R_1) e $(1, 2, 3)$ (parallelo ad R_2) non sono tra di loro paralleli (ossia proporzionali). Inoltre, R_1 ed R_2 non si incontrano poichè per un ipotetico punto in comune dovremmo avere $y = 0$ (che segue da $y = z$ e da $y/2 = z/3$) e quindi $x = 0$ (che segue da $x = y$) ma anche $x = -1$ (che segue da $x + 1 = y/2$). Pertanto le due rette sono sghembe.

Il più corto segmento che congiunge R_1 ed R_2 sarà ortogonale ad entrambe ossia parallelo al vettore $(1, 1, 1) \wedge (1, 2, 3) = (1, -2, 1)$. Si prenda un qualsiasi punto della retta R_1, come ad esempio il punto $(0, 0, 0)$ e si osservi che la retta R_1 sarà contenuta nel piano Π_1 di equazione $(x - 0) - 2(y - 0) + (z - 0) = 0$, ossia $x - 2y + z = 0$. Si prenda un qualsiasi punto della retta R_2, come ad esempio il punto $(-1, 0, 0)$ e ci si avvalga ancora una volta della formula per il computo della distanza punto/piano per riempire il seguente riquadro.

$$\boxed{d(R_1, R_2) = \frac{|1\,(-1) - 2\,(0) + 1\,(0)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}}$$

3/30

1.c. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (1, -2, 3) \qquad Q = v = (0, -1, -2) \qquad T = w = (4, -1, 8)\,.$$

1.c.a. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$$u \cdot v \wedge w = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \underbrace{1 \cdot (-1) \cdot 8}_{-8} + \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot 4}_{+16} + 12 - 2 = 18$$

2/30

Al fine di assicurarmi di aver ottenuto il valore corretto del determinante, ricomputo il determinante avvalendomi solamente di operazioni di riga o colonna. In pratica, almeno in questo caso, conviene ridursi al determinante di una matrice diagonale sommando o sottraendo multipli di riga ad altre righe.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = (1)(-1)(-18) = 18\,,$$

dove ho prima sottratto il quadruplo della prima riga dalla terza, ed ho poi sommato 7 volte la seconda riga alla terza.

1.c.b. Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

L'area del triangolo é metá dell'area del parallelogramma di lati $\vec{PQ} = (0, -1, -2) - (1, -2, 3) = (-1, 1, -5)$ e $\vec{PT} = (4, -1, 8) - (1, -2, 3) = (3, 1, 5)$, ossia metá della lunghezza del vettore $\vec{PQ} \wedge \vec{PT} = (-1, 1, -5) \wedge (3, 1, 5) = (10, -10, -4)$. Pertanto, $Area(PQT) = ||(5, -5, -2)|| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

$$\text{Area}(PQT) = \tfrac{1}{2}||\vec{PQ} \wedge \vec{PT}|| = ||(5, -5, -2)|| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

2/30

1.c.c. Determinare l'equazione del piano Π_1 passante per P, Q e T.

Il vettore $(10, -10, -4)$ ottenuto al punto precedente é normale a tale piano e quindi possiamo prendere $(5, -5, -2)$ come terna di coefficienti direttori. Poiché il piano passa per $Q = (0, -1, -2)$ l'equazione del piano trova pertanto la forma: $5\,(x - 0) - 5\,(y - (-1)) - 2\,(z - (-2)) = 0$, ossia $5\,x - 5\,y - 2\,z = 9$. É facile verificare che tale equazione risulta soddisfatta anche dai punti Q e T, ottenendo cosí una verifica esauriente per questo punto (1.c.) ed una verifica parziale per il punto precedente (1.b.).

$$\Pi_1 : 5\,x - 5\,y - 2\,z = 9$$

2/30

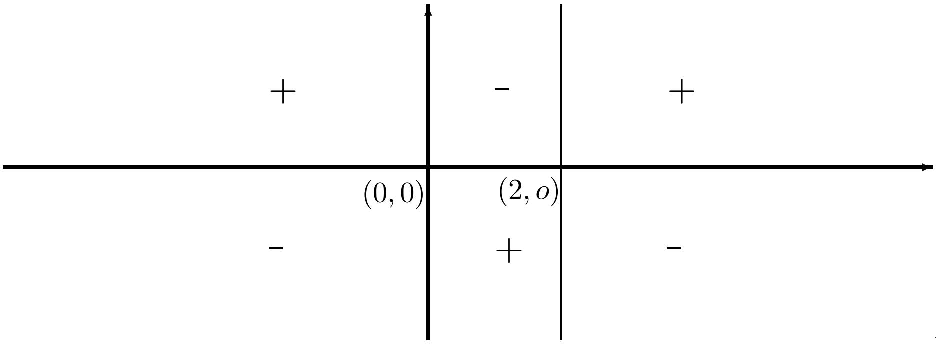
2. È data la funzione $F(x, y) = 2\,x^2\,y - 4\,x\,y\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\,\}$ e studiare il segno di F;

La funzione $F(x, y) = 2\,x^2\,y - 4\,x\,y = 2x(x - 2)y$ é data come prodotto di 3 monomi: $2x$, $(x - 2)$ e y. Per la legge di annullamento del prodotto, l'insieme di livello $\Sigma_0 :=$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\ \}$ é catturato nella scrittura $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0) \vee (x = 2) \vee (y = 0)\ \}$. Può risultare utile, per una prima conoscenza della F, tracciarsi le rette in Σ_0 nel piano $x - y$ preso a dominio della F. Tali rette suddividono il piano in 6 regioni, ciascuna labellabile col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si disporranno a scacchiera.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 4xy - 4y = 4y(x-1)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2x(x-2)$ ed i punti (x,y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 4y(x-1) &= 0 \\ 2x(x-2) &= 0 \end{cases}$$

ottenuto imponendo la condizione di annullamento del gradiente, debbono tutti avere $x \in \{0,2\}$ per soddisfare alla seconda equazione. Pertanto, l'unico modo per soddisfare anche alla prima equazione é di avere $y = 0$. Abbiamo pertanto 2 soli punti stazionari: il punto $(0,0)$ ed il punto $(2,0)$. Si noti che $F(0,0) = 0 = F(2,0)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che entrambi i punti sono di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$ e $(2,0)$.

I punti $(0,0)$ e $(2,0)$ sono entrambi punti di sella.

4/30

2.c. determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1,2,-4)$.

In effetti il punto $(1,2,-4)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1,2) = -4$. Possiamo quindi procedere. Poiché le derivate parziali $F_x = 4y(x-1)$ e $F_y = 2x(x-2)$ esistono e sono continue in un intorno di $(1,2)$, la F é differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto puó essere considerato come l'approssimazione lineare della F nel punto $(1,2,-4)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1,2) = F_x(1,2)\,(x-1) + F_y(1,2)\,(y-2)$ ed otteniamo l'equazione $z + 4 = 0 - 2\,(y-2)$, che si semplifica in $2y + z = 0$.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1, 2, -4)$:
$z = -2\,y$ 4/30

2.d. determinare tutti i punti di massimo e di minimo della funzione nel quadrato Q con vertici in $(0,0)$ e $(2,2)$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera. Infatti, nel quadrato Q la F assume solo valori non positivi, e, ricordando che avevamo compreso l'insieme Σ_0 dei punti su cui la F si annullava, possiamo notare che i tre lati di Q che ricadono in $Q \cap \Sigma_0$ sono tutti punti di massimo assoluto per la F in Q. Restano da individuare i punti di minimo assoluto che necessariamente risiederanno nel segmento da $(0,2)$ a $(2,2)$, ossia sulla retta $y = 2$. Si consideri pertanto la funzione $f(x) = F(x,2) = 4x(x-2) = 4x^2 - 8x$. Questa descrive una parabola con un unico minimo assoluto in corrispondenza di $x = 1$. Pertanto il punto di minimo ricercato è $(1,2)$, dove $F(1,2) = -4$.

2.d)
1 Minimo Assoluto: $(1,2)$; $F(1,2) = -4$
1 Massimo Assoluto: tutti i punti di $Q \cap \Sigma_0$, dove F vale 0
7/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z, sia M_R l'intersezione della palla di raggio R centrata nell'origine con il semispazio $\{z \geq R/2\}$.

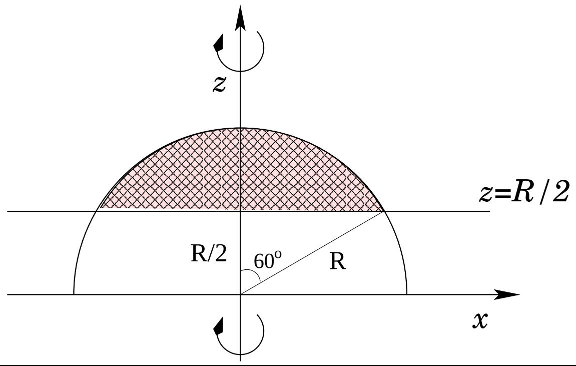
3.a. Disegnare M_R (o una sua sezione significativa);

3.b. esprimere M_R in coordinate Cartesiane;

3.c. calcolare il volume di M_R mediante integrazione;

3.d. calcolare la superficie di M_R.

a) Disegnare M_R (o una sua sezione significativa)



1/30

b)

$$M_R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \tfrac{R}{2} \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right\}$$

1/30

Vista la simmetria di M_R rispetto all'asse z, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate cilindriche per il computo del volume V di M_R:

$$\begin{aligned}
V &= \int_M 1 \; dx\,dy\,dz = \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta\right)\left(\int_{\frac{R}{2}}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho \; d\rho\, dz\right) \\
&= 2\pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz = \pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} R^2 - z^2 \; dz \\
&= \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{\frac{R}{2}}^{R} = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{24}\right) = \frac{5}{24}\,\pi\, R^3 \,.
\end{aligned}$$

c) $V = \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta\right)\left(\int_{\frac{R}{2}}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho \; d\rho\, dz\right) = \frac{5}{24}\,\pi\, R^3$

5/30

Alternativamente, si poteva osservare che, per ogni valore di z nell'intervallo $[R/2, R]$, il piano orizzontale disposto a quota z interseca il solido M_R in un cerchio di raggio $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ ed area $A(z) = \pi(R^2 - z^2)$. A questo punto,

$$V = \int_{R/2}^{R} A(z) \; dz = \int_{R/2}^{R} \pi(R^2 - z^2) \; dz = \int_{R/2}^{R} \pi R^2 \; dz - \int_{R/2}^{R} \pi z^2 \; dz$$

$$= \quad \pi \frac{R^3}{2} - \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_{R/2}^{R} = \pi \left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{24}\right) = \frac{5}{24}\,\pi\,R^3\,.$$

In base alla Formula 7 a pag. 293 del testo, Ovviamente, la superficie di M_R che è in contatto con il piano di equazione $z = R/2$ è una circonferenza di raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ ed area $\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 = \frac{3}{4}\pi\,R^2$.

In base alla Formula 7 a pag. 293 del testo, la superficie di M_R che è in contatto col la sfera, dove $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$, è data da

$$\begin{aligned} 2\,\pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} r(z)\sqrt{1 + (r'(z))^2}\,dz &= 2\,\pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} \sqrt{R^2 - z^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - z^2}}\,dz = 2\,\pi\,R \int_{\frac{R}{2}}^{R}\,dz \\ &= 2\,\pi\,R\left(R - \frac{R}{2}\right) = \pi\,R^2\,, \end{aligned}$$

È poi la somma che fa il totale.

d) $S = \frac{3}{4}\pi\,R^2 + \pi\,R^2 = \frac{7}{4}\pi\,R^2$ 8/30