Prova scritta di Matematica II - 31 marzo 2006 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Calcolare la distanza tra i punti $P = (4, 6, -2)$ e $Q = (1, -6, 2)$.

$$d(P, Q) = \sqrt{\underbrace{(4-1)^2}_{9} + \underbrace{(6-(-6))^2}_{144} + \underbrace{(-2-2)^2}_{16}} = \sqrt{169} = 13\,.$$

1/30

1.b. Calcolare la distanza tra il punto $P = (4, 6, -2)$ ed il piano $\Sigma_1 : 4x - 2y + 4z = 2$.

$$d(P, \Sigma_1) = \frac{|4\,(4)-2\,(6)+4\,(-2)-2|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{36}} = \frac{6}{6} = 1$$

2/30

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $P = (4, 6, -2)$ e la retta R di equazioni $4x - 2y + 4z = 2$ e $z = -\frac{1}{2}$.

Si noti che il punto $Q = \left(4, 6, -\frac{1}{2}\right)$ appartiene ad R. Pertanto $d(P, R) \leq d(P, Q) = \frac{3}{2}$. Inoltre, $d(P, R) \geq \frac{3}{2}$ poichè tutti i punti (x, y, z) di R soddisfano $z - \frac{1}{2}$ mentre la terza coordinata di P è -2. Pertanto, $d(P, R) = \frac{3}{2}$.

Un approccio generale per rispondere a questa tipologia di domanda sarebbe passato per l'esprimere R in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ora che il generico punto $R(t)$ di R è espresso in dipendenza di un singolo parametro t, possiamo minimizzare $d(P, R(t)) = \sqrt{(t-4)^2 + ((2\,t-2)-(6))^2 + \left(-\frac{1}{2}-(-2)\right)^2}$ che equivale a minimizzare il funzionale $g(t) = (t-4)^2 + (2\,t-8)^2 = 5\,t^2 - 40\,t + 80$ poichè la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è monotona crescente e poichè il termine $\left(-\frac{1}{2}-(-2)\right)^2$ non dipende dalla t. Il minimo si ha per $t = 4$ come si può evidenziare imponendo $0 = g'(t) = 10\,t - 40$. Il punto di R che minimizza $g(t)$ è pertanto $Q = \left(4, 2\,(4) - 2, -\frac{1}{2}\right) = \left(4, 6, -\frac{1}{2}\right)$. A questo punto le argomentazioni di cui sopra potrebbero risultare più naturali e, se entrano, ci servono come utile verifica.

$$d(P, R) = d\left((4, 6, -2), \left(4, 6, -\tfrac{1}{2}\right)\right) = d\left((0, 0, -2), \left(0, 0, -\tfrac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}$$

3/30

1.d. Calcolare per quale valore di α il piano Σ_α di equazione $6x-3y+\alpha z = -\alpha$ risulta parallelo al piano Σ_1 di equazione $4x-2y+4z=2$. Determinare quindi la distanza tra questi due piani paralleli.

Chiaramente, $\alpha = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ e $\Sigma_\alpha :\ 6x-3y+6z=-6$.

$$\Sigma_\alpha :\ 6x-3y+6z=-6 \qquad \left(\alpha = 4\cdot\tfrac{3}{2}=6\right)$$

1/30

La strategia per determinare la distanza tra il piano $\Sigma_1 :\ 4x-2y+4z=2$ ed il piano $\Sigma_6 :\ 6x-3y+6z=-6$ consiste nello scegliere un punto a caso di Σ_6 e nell'utilizzare quindi la formula per il computo della distanza punto/piano. Un punto conveniente è forse $T=(-1,0,0)$. A questo punto possiamo riempire il riquadro.

$$d(\Sigma_1,\Sigma_\alpha) = \frac{|4\,(-1)-2\,(0)+4\,(0)-2|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{36}} = \frac{6}{6} = 1$$

2/30

Dovrebbe ora venire il sospetto che anche il punto $P=(4,6,-2)$ appartenga al piano Σ_α. In effetti $6\,(4)-3\,(6)+6\,(-2)=-6$, ed anche questo fatto ci vale come verifica incrociata.

1.e. Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x=1+t$, $y=1+6t$, $z=2t$ e $x=1+2s$, $y=5+15s$, $z=-2+6s$.

Il più corto segmento che congiunge R_1 ed R_2 sarà ortogonale ad entrambe ossia parallelo al vettore $(1,6,2)\wedge(2,15,6)=(6,-2,3)$. Si prenda un qualsiasi punto della retta R_1, come ad esempio il punto $(1,1,0)$ e si osservi che la retta R_1 sarà contenuta nel piano Π_1 di equazione $6(x-1)-2(y-1)+3(z-0)=0$, ossia $6x-2y+3z=4$. Si prenda un qualsiasi punto della retta R_2, come ad esempio il punto $(1,5,-2)$ e ci si avvalga ancora una volta della formula per il computo della distanza punto/piano per riempire il seguente riquadro.

$$d(R_1,R_2) = \frac{|6\,(1)-2\,(5)+3\,(-2)-4|}{\sqrt{6^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{49}} = \frac{14}{7} = 2$$

3/30

2. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo della funzione

$$F(x,y) = 2x^2-4x+2y^2+2,$$

nella regione $2x^2+3y^2 \leq 16$, specificando la natura di tali estremi (assoluti o relativi).

La funzione $F(x,y)=2x^2-4x+2y^2+2$ é un paraboloide e pertanto, quando considerata su tutto $\mathbb{R}^2$, avrá un unico punto estremale. Esso costituirá un minimo assoluto (i coefficienti dei termini x^2 ed y^2 sono entrambi positivi) e sará anche l'unico punto stazionario della F. Per individuare tale punto stazionario della F ricerchiamo quel punto di $\mathbb{R}^2$ in cui entrambe le componenti del gradiente della F si annullano. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 4\,x-4$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 4\,y$ ed il punto ricercato sará pertanto $(1,0)$. Tale punto cade internamente alla regione $2x^2 + 3y^2 \leq 16$, e pertanto costituirá un minimo assoluto per la F anche in riferimento a tale regione. Sostituendo i valori delle coordinate nella forma della F, $F(1,0) = 0$. In effetti $F(x,y) = 2(x-1)^2 + y^2$ non potrà mai assumere valori negativi e quindi $(1,0)$ resta confermato come punto di minimo assoluto. La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere anche un punto di massimo assoluto sulla regione assegnata. Esso sará necessariamente situato sulla frontiera, e pertanto lo ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 4x - 4 & = F_x = & \lambda(4x) \\ 4y & = F_y = & \lambda(6y) \\ 2x^2 + 3y^2 & = & 16 \end{cases}$$

Di queste equazioni, la seconda è quella che parla per prima portando a considerare due casi:

1. $y = 0$, e quindi $x = \pm 2\sqrt{2}$ (per la terza equazione);

2. $y \neq 0$, quindi $\lambda = \frac{2}{3}$ (per la seconda equazione), quindi $x = 3$ (per la prima equazione), il che risulta impossibile (per la terza equazione).

In conclusione, a seguito di questa analisi restano individuati il punto $(2\sqrt{2}, 0)$ in cui $F(2\sqrt{2}, 0) = 18 - 8\sqrt{2}$, ed il punto $(-2\sqrt{2}, 0)$ in cui $F(-2\sqrt{2}, 0) = 18 + 8\sqrt{2}$. Pertanto, il punto $(-2\sqrt{2}, 0)$ costituisce sicuramente il punto di massimo assoluto per la F sulla regione assegnata.

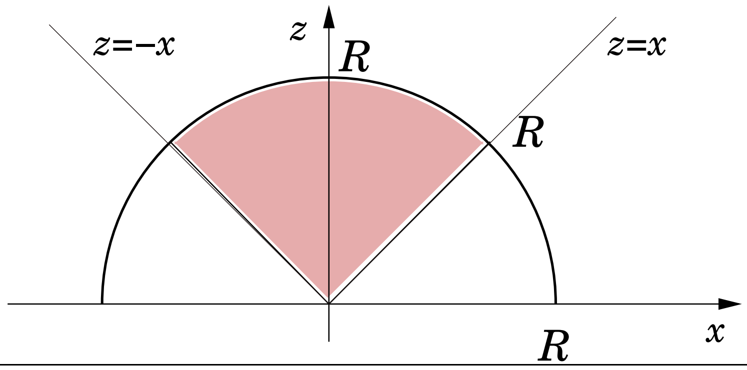
Volendo comprendere la natura del punto $(2\sqrt{2}, 0)$, risulta di grande aiuto il considerare che le curve di livello della F sono le circonferenze con centro nel punto $(1,0)$. Poichè lo studio dei moltiplicatori di Lagrange ha condotto a queste due sole soluzioni, ne consegue che due sole di queste circonferenze sono tangenti all'elisse $2x^2 + 3y^2 = 16$: quella con tangenza nel punto $(-2\sqrt{2}, 0)$, che risulta tutta esternaall'elisse, e quella con tangenza nel punto $(2\sqrt{2}, 0)$, che pertanto è tutta contenuta nell'elisse, altrimenti altre circonferenze con centro in $(1,0)$ sarebbero tangenti all'elisse. Pertanto, il punto $(2\sqrt{2}, 0)$ non è nè di massimo nè di minimo locale: per ridurre il valore della F basta spostarsi verso il punto $(1,0)$, mentre spostarsi lungo l'elisse porta ad incrementare il valore della F.

1 Minimo Assoluto: $(1,0)$; $F(1,0) = 0$
1 Massimo Assoluto: $(-2\sqrt{2}, 0)$; $F(-2\sqrt{2}, 0) = 18 + 8\sqrt{2}$
7/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z, sia M_R l'intersezione della palla di raggio R centrata nell'origine con il cono con vertice nell'origine, asse di simmetria coincidente con l'asse delle z, e la cui intersezione con il piano $y = 0$ è data da $\{(x, 0, z) \mid z \geq |x|\}$.

3.a Disegnare M_R (o una sua sezione significativa);

a) Disegnare M_R (o una sua sezione significativa)



1/30

3.b esprimere M_R in coordinate Cartesiane;

b)

$$M_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x^2 + y^2 \leq z^2\ \}\,.$$

1/30

3.c calcolare il volume di M_R mediante integrazione;

Il solido M_R gode di simmetria sferica e, quando espresso tramite le coordinate di Eulero, esso corrisponde al rettangolo $M_R = \left\{(\phi, \theta, \rho) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \rho \leq R\right\}$. In questo modo, ricordando di introdurre il termine $\rho^2 \sin\phi$ corrispondente allo Jacobiano, otteniamo la seguente misura per il volume di M_R

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2\ \sin\phi\ d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2\ d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi\ d\phi \\ &= 2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R [-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}\pi R^3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\,\pi R^3\,. \end{aligned}$$

c)

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2\ d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi\ d\phi = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\,\pi R^3$$

6/30

Come verifica, ricomputiamo lo stesso integrale in coordinate cilindriche, ricordando che ora il fattore dovuto allo Jacobiano è ρ.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\theta\left(\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\int_0^z \rho\ d\rho\ dz + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho\ d\rho\ dz\right) \\ &= 2\,\pi\left(\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{z^2}{2}\ dz + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \frac{R^2-z^2}{2}\ dz\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \left(\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{R}{\sqrt2}} + R^2\left(R-\frac{R}{\sqrt2}\right) - \left[\frac{z^3}{3}\right]_{\frac{R}{\sqrt2}}^{R} \right) = \pi\, R^3 \left(\frac{\sqrt2}{12} + 1 - \frac{\sqrt2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt2}{12}\right) \\
&= \frac{2-\sqrt2}{3}\, \pi R^3 .
\end{aligned}
$$

Osserviamo che l'integrazione sarebbe risultata assai più difficoltosa se si fosse deciso di integrare prima rispetto a z e poi rispetto a ρ, ossia in questo caso è risultato preferibile spezzare la regione di integrazione in due regioni di tipo 2 piuttosto che non considerarla come un'unica regione di tipo 1 (con riferimento alla figura di cui sopra).

3.d calcolare la superficie di M_R.

In base alla Formula 7 a pag. 293 del testo, la superficie di M_R che è in contatto col cono, dove $r(z) = z$, è data da

$$
2\,\pi \int_0^{\frac{R}{\sqrt2}} r(z)\sqrt{1+(r'(z))^2}\;dz = 2\,\pi \int_0^{\frac{R}{\sqrt2}} z\sqrt2\;dz = 2\sqrt2\,\pi \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{R}{\sqrt2}} = \frac{\sqrt2\,\pi}{2} R^2 .
$$

In virtù della stessa formula, la superficie di M_R che è in contatto col la sfera, dove $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$, è data da

$$
\begin{aligned}
2\,\pi \int_{\frac{R}{\sqrt2}}^{R} r(z)\sqrt{1+(r'(z))^2}\;dz &= 2\,\pi \int_{\frac{R}{\sqrt2}}^{R} \sqrt{R^2-z^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-z^2}}\;dz = 2\,\pi\, R \int_{\frac{R}{\sqrt2}}^{R} dz \\
&= 2\,\pi\, R \left(R - \frac{R}{\sqrt2}\right) = \pi\, R^2\,(2-\sqrt2)\,,
\end{aligned}
$$

È poi la somma che fa il totale.

d) $S = \frac{\sqrt2\,\pi}{2} R^2 + \pi\, R^2\,(2-\sqrt2) = \pi\, R^2\, \frac{4-\sqrt2}{2}$

8/30