.....................- Matematica 1 - 21/01/2009-FILA D

COGNOME E NOME ....

N. di matricola .... **FIRMA**.....................

1. È data la funzione reale di variabile reale f definita da
$$f(x) = \frac{x^3}{|x+2|^2}.$$
Disegnare il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, monotonia.
SOLUZIONE
Si osservi che più semplicemente la funzione ha la seguente espressione
$$f(x) = \frac{x^3}{(x+2)^2}.$$
Il dominio è l'insieme dei numeri reali tranne il punto $x = -2$. L'unico zero della funzione è il punto $x = 0$, la funzione è positiva se $x > 0$ e negativa se $x < 0$, $x = -2$ è un asintoto verticale. Si trova che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si ha che la retta $y = x - 4$ è un asintoto obliquo sia sinistro che destro. Infatti, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(x+2)^2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-x(x+2)^2}{(x+2)^2} = -4$. È da osservare che il grafico della funzione interseca l'asintoto nel punto di ascissa $x = -\frac{4}{3}$. Infatti, tale valore è l'unica soluzione di $\frac{x^3}{(x+2)^2} = x - 4$. La derivata prima è pari $f'(x) = \frac{3x^2(x+2)^2-2x^3(x+2)}{(x+2)^4} = ... = \frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3}$, da cui si evince che $x = -6$ è un punto di massimo relativo. L'espressione della derivata seconda è pari a $f''(x) = \frac{[2x(x+6)+x^2](x+2)^3-3x^2(x+2)^2(x+6)}{(x+2)^6}$. Dopo elementari calcoli algebrici si trova che $f''(x) = \frac{24x}{(x+2)^4}$. Pertanto la funzione è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$.

2. Calcolare $I = \int -\frac{2}{x^2(x^2+1)^2}dx$.
SOLUZIONE
Dalla decomposizione in fratti semplici si ha $\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{CX+D}{x^2+1} + \frac{EX+F}{(x^2+1)^2}$, dove i coefficienti A, B, C, D, E, F sono da determinare. Si ricava che
$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

Una primitiva del primo addendo è la funzione $-\frac{1}{x}$, una primitiva del secondo addendo è $\arctan x$. Per determinare una primitiva del terzo addendo si integra per parti $\int \frac{1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{1}{x^2+1} - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}$. Da cui si evince che una primitiva del terzo addendo è $-\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$. Il risultato finale a seguito della moltiplicazione per -2 è $3\arctan x + 2\frac{3x^2+2}{2x(x^2+1)}$.