Esercizi tipo per la Prova Scritta di Matematica II

- c.d.L. Scienze dell'Architettura, Università di Udine -

a cura del docente Romeo Rizzi, e per disponibilità della Prof. Roberta Musina

VERSIONE: 10 gennaio 2008

- questa **dispensa** raccoglie tutti **i temi d'esame** ed alcuni esercizi per casa assegnati a partire dall'anno accademico 2003/2004. Fino al 2005, si tratta dei temi proposti dalla Prof. Roberta Musina in precedenti edizioni del corso, ma tutti i temi restano ad oggi rappresentativi. Debitamente ringrazio Roberta per avermi fornito i sorgenti di tutti i suoi vecchi testi, per i consigli, e più in generale per la disponibilità dimostratami e l'aiuto nell'impostazione del corso.

- **testo di riferimento per il corso:** *"Calcolo, Funzioni di più variabili" James Stewart, 2002 - APOGEO, ISBN: 88-7303-748-8.*
  Questo testo, (e vi sarà sicuramente importante e forse necessario fare riferimento ad un qualche testo), è il completamento del testo di riferimento per il propedeutico corso di Matematica 1: Calcolo, Funzioni di una variabile. Ovviamente, lo studio dell'analisi nel caso di più variabili poggia pesantemente sullo studio del caso monovariabile.

- questa dispensa propone anche **le correzioni** di alcuni temi. Si raccomanda di fare un uso intelligente di questo materiale, ossia di provare a risolvere in autonomia gli esercizi prima di confrontarsi con le soluzioni qui proposte. Ovviamente non si richiede di omologarsi negli stili risolutivi ma solo di saper portare a casa i risultati in modo efficiente e congruo al momento della verifica.

- questa dispensa viene stampata all'ufficio fotocopie presso i Rizzi e puoi scaricarne l'ultima versione elettronica al sito del corso: `www.dimi.uniud.it/~rrizzi/classes/Mat2`

- se trovate errori, o ritenete che alcune spiegazioni possano o debbano essere rese più esaurienti, segnalatemelo tramite mail a: `Romeo.Rizzi@dimi.uniud.it`
  Chi corregge un'errore nella versione elettronica corrente riceve punti bonus additivi sul voto dell'esame.

- un testo d'esame integrale si compone anche di un'intestazione completa, di spazi dove apporre proprio nome, cognome e numero di matricola, di spazi predisposti per le risposte in forma sintetica, e di una sezione di istruzioni per l'uso titolata: "Leggere con molta attenzione". Si veda ad esempio il testo d'esame del 18/04/2007 di cui questa dispensa riporta versione integrale a titolo esemplificativo. Nel caso degli altri testi d'esame, volendo ridurre gli sprechi, si è qui rimossa la parte relativa alle modalità di espletamento dell'esame (nonostante sia talvolta soggetta a lievissime variazioni e quindi richieda di volta in volta la vostra attenzione) e sono stati stralciati i riquadri per le risposte (nonostante il saperne fare buon uso sia una competenza che incide criticamente sull'esito dell'esame). Anche se questi riquadri sono spesso omessi dai testi (ma mai dalle correzioni), nessuna modifica è stata apportata per quanto concerne le domande e la sostanza degli esercizi. Inoltre, a partire da quello del 16/03/2006, tutti i testi originali in versione integrale e completi dei riquadri per le risposte sono disponibili al sito di cui sopra. Vi consiglio di avvalervene nelle vostre simulazioni d'esame (tempo: 3 ore e mezza, con piccole variazioni).

- Si analizzi pertanto il testo del 18/04/2007 per meglio comprendere la prassi dell'esame e le sue regole. Ribadisco qui sotto due soli punti che vogliono anche esprimere lo spirito dell'esame (ma per i dettagli sulla prassi si veda il testo del 18/04/2007 o le versioni originali di testi più recenti come scaricabili da www).

  – all'esame puoi portare testi ed appunti, ma non puoi utilizzare calcolatrici od altra strumentazione elettronica, nè scambiare alcunchè con i tuoi compagni.

  – nella stragrande maggioranza dei casi l'esame è solo scritto. Se allo scritto hai preso almeno 18, puoi ottenere direttamente la registrazione del voto semplicemente esprimendo il tuo consenso sotto SINDY. (Con la registrazione elettronica non è richiesto che tu debba venire in facoltà per effettuare la registrazione.)

    Alcune situazioni possono condurre ad un orale, ma però l'orale resta sempre facoltativo e non siete mai costretti a sotenere l'orale (potete sempre rifare semplicemente lo scritto). Queste situazioni sono in gran massima le seguenti: (1) Nel caso al tuo scritto venga assegnato un 17* (un voto convenzionale che non corrisponde sintatticamente alla somma dei punteggi ottenuti), sei invitato ad un orale che segua immediatamente quello scritto ed inteso a meglio comprendere cosa sia accaduto allo scritto. (2) Se hai preso almeno 26 sei forse interessato a sostenere un orale per raffinare la mia valutazione ed il voto. (Se vuoi migliorare un voto basso ti conviene invece rifare lo scritto: all'orale, e nel migliore dei casi, non posso discostarmi di molto dal voto dello scritto).

    Un voto positivo (dal 18 in sù, ossia escluso 17*) resta valido per max 4 mesi dallo scritto ma viene immediatamente cancellato con la consegna di uno scritto successivo o con lo svolgimento di un orale.

Parte I
Testi dei temi d'esame

Prova scritta di Matematica II - 20 settembre 2007 - FILA B
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 parallelo al piano $x + y = 10$ e distante 1 da $(0, 0, 0)$;
1.a.b. piano Π_2 passante per $(3, 5, 0)$ e contenente almeno 2 assi coordinati;
1.a.c. piano Π_3 costituito dai punti equidistanti da $(5, -5, 5)$ e $(-5, 5, 5)$;
1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Π_1:	$\Pi_1 \ldots\ldots \Pi_2 \ldots\ldots \Pi_3 \ldots\ldots \Pi_1$
Π_2:	
Π_3:	1+1+1+2/30

1.b. Determinare i valori di α e β per cui il seguente sistema

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 3 \\ x + y + z = \beta \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

1. ammette una ed una sola soluzione;
2. non ammette alcuna soluzione;
3. ammette infinite soluzioni.

1.) una ed una sola soluzione per:
2.) nessuna soluzione per:
3.) infinite soluzioni per:
2+1+2/30

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $O = (0, 0, 0)$ e la retta di equazioni parametriche $R(t) = (\sqrt{8},\, 2\pi t + 3,\, 1 - 2\pi t)$.

$d(R, O) =$
2/30

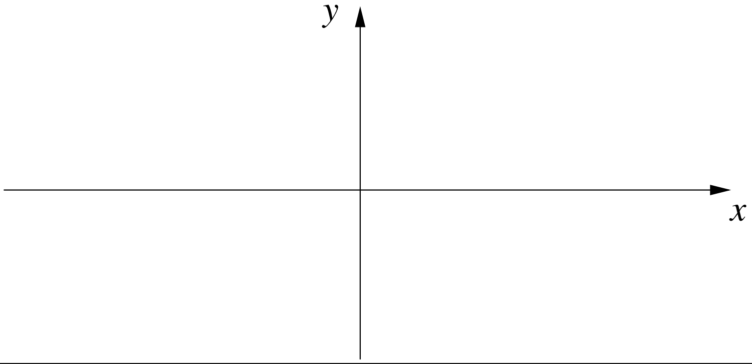
1.d. Calcolare la distanza tra la retta R_1 di equazioni $x = 1$ e $z = y + 1$ e la retta R_2 di equazioni parametriche $R_2(t) = (-\sqrt{7},\, \pi t,\, 1 - \pi t)$ e determinare se esse siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

$d(R_1, R_2) =$
le rette R_1 e R_2 sono 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = (x^2 + y^2)(xy - 1) + (x - y)^2 + xy$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ e studiare il segno di F;

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

2.b) Elencare le selle, i massimi, i minimi:

N^o ... PUNTI DI SELLA:

N^o ... PUNTI DI MAX. RELATIVO:

N^o ... PUNTI DI MIN. RELATIVO:

3+3+2/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0, 1, 2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i, 0, F(i, 0))$;

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: Π_1: Π_2:

1+1+1/30

2.d. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x, y) := [xy(x^2 + y^2 - 1)]^2$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$D[h] =$

1/30

2.e. Determinare tutti i punti estremali di $h(x, y) = [xy(x^2 + y^2 - 1)]^2$ nella regione $D[h]$.

Poichè $h(x, y) = [F(x, y)]^2$, e considerato che nell'elevare al quadrato si perde il segno ma la funzione $(\cdot)^2$ è monotona crescente sui reali non-negativi, possiamo allora avvalerci dell'analogo studio per la funzione F. Si giunge alle seguenti conclusioni.

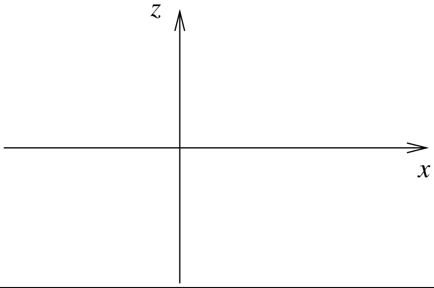
2.f)

2/30

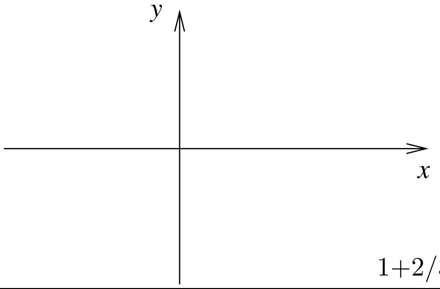
3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $|z| \leq x$ e $x^2 + z^2 \leq R^2$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z. Sia F l'intersezione tra M ed il piano $z = -\frac{R}{2}$.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che F (sulla destra);
3.b. Esprimere F ed M in coordinate cilindriche;
3.c. Esprimere F ed M in coordinate cartesiane;
3.d. Esprimere M in coordinate sferiche;
3.e. Calcolare il volume di M mediante integrazione;
3.f. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_M y \; dx \, dy \, dz$;
3.g. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di M;

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare F



1+2/30

b) F **ed** M **in coordinate cilindriche**

$F =$

$M =$

1+1/30

c) F **ed** M **in coordinate cartesiane**

$F =$

$M =$

1+1/30

d) M **in coordinate sferiche**

$M =$

1/30

e)

$V =$

3/30

f)

$I =$

5/30

g)

$x_b =$ $y_b =$ $z_b =$

2/30

Prova scritta di Matematica II - 6 settembre 2007 - FILA C

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 ortogonale al piano $4\,x - 3\,y = 0$ e contenente uno dei tre assi coordinati;

1.a.b. piano Π_2 costituito dai punti equidistanti da $(8, -6, 6)$ e $(0, 0, 0)$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alle sfere $x^2 + y^2 + z^2 \le 25$ e $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 + z^2 \le 25$ nel loro unico punto di contatto;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Π_1:	$\Pi_1 \ldots\ldots \Pi_2 \ldots\ldots \Pi_3 \ldots\ldots \Pi_1$
Π_2:	
Π_3:	1+1+1+2/30

1.b. Sono dati i tre versori

$$u = \frac{(0, 3+\alpha, 4+\alpha)}{\sqrt{2\,\alpha^2 + 14\,\alpha + 25}} \qquad v = \frac{(3+\alpha, 4+\alpha, 0)}{\sqrt{2\,\alpha^2 + 14\,\alpha + 25}} \qquad w = \frac{(|4+\alpha|, 0, |3+\alpha|)}{\sqrt{2\,\alpha^2 + 14\,\alpha + 25}}\,.$$

Determinare i valori di α per cui:

1. u risulta definito; w risulta definito;
2. u e v sono ortogonali; v e w sono ortogonali;
3. u e v sono paralleli; v e w sono paralleli;
4. $u \cdot v \wedge w$ è massimo; $u \cdot v \wedge w$ è minimo.

1.) u risulta definito:	w risulta definito:
2.) u e v sono ortogonali:	v e w sono ortogonali:
3.) u e v sono paralleli:	v e w sono paralleli:
4.) $u \cdot v \wedge w$ è massimo:	$u \cdot v \wedge w$ è minimo:
	1+1+1+1/30

1.c. Calcolare la distanza tra le due rette distinte R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $R_1(t) = (\sqrt{2},\, 2\,\pi\,t+3,\, 1-2\,\pi\,t)$ e $R_2(s) = (\sqrt{2}\,s,\, 3\,s-\pi,\, \pi+s)$ e determinare se esse siano sghembe, incidenti, o coplanari.

$d(R_1, R_2) =$
le rette R_1 e R_2 sono ... ... 2+1/30

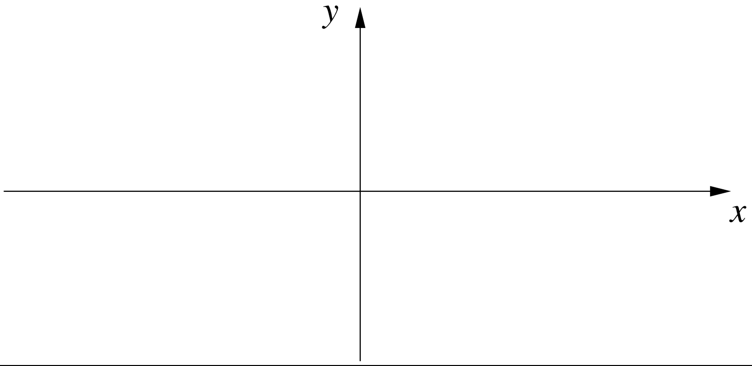
1.d. Calcolare la distanza tra la retta R di equazione $R(t) = (3 + t, 5 - t, 0)$ ed il piano Π di equazione $\frac{1}{\sqrt{3}}\,x + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y + \frac{1}{\sqrt{3}}\,z = 3\,\sqrt{3}$ e determinare la relazione geometrica che sussiste tra R e Π.

$d(R, \Pi) =$
la retta R ed il piano Π sono ... ... 2+1/30

2. È data la funzione $F(x,y) = 11\,xy + x^2(y+6) - (x+3\,y+2)\,(y+3)\,x\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

3/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0,1,2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i, 0, F(i,0))$;

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: Π_1: Π_2:

1+1+1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3\,y^2 \leq 3\,\}$.

2.d)

6/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x,y) := \sqrt{3\,x\,(x - y^2 - 2)}$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$D[h] =$

1/30

2.f. Determinare tutti i punti estremali di $h(x,y) = \sqrt{3\,x\,(x - y^2 - 2)}$ nella regione $R \cap D[h]$.

2.f)

1/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $|z| \leq |x| \leq R$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z. Sia S la sfera di centro l'origine e raggio R e sia S_{sup} la semisfera ottenuta intersecando S con il semispazio $z \geq 0$. Sia $Q_{sup} = M \cap S_{sup}$ e sia Q_{inf} l'intersezione tra M ed il semispazio $z \leq 0$. Infine, sia $Q = Q_{sup} \cup Q_{inf}$.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra);

3.b. Esprimere M e Q_{inf} in coordinate cilindriche;

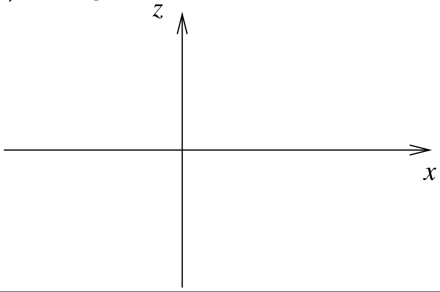
3.c. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e Q_{sup} in coordinate sferiche;

3.d. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.e. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \; dx\, dy\, dz$;

3.f. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare M

1/30

b) M **e** Q_{inf} **in coordinate cilindriche**

$M =$

$Q_{inf} =$

1+1/30

c) Q **in coordinate Cartesiane e** Q_{sup} **in coordinate sferiche**

$Q =$

$Q_{sup} =$

1+1/30

d)

$V =$

4/30

e)

$I =$

4/30

f)

$x_b =$ $y_b =$ $z_b =$

2/30

Prova scritta di Matematica II - 27 giugno 2007 - FILA D
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 tangente nel punto $(3, 4, 0)$ alla sfera di raggio 5 e centro nell'origine;

1.a.b. piano Π_2 passante per $(3, 4, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$;

1.a.c. piano Π_3 passante per $(3, 4, 0)$ e contente la retta $P(t) = (3\,t + 3, 4\,t + 4, 1)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Π_1:	Π_1 ...... Π_2 ...... Π_3 ...... Π_1
Π_2:	
Π_3:	1+1+1+2/30

1.b. Sono dati i tre versori

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha}(0, \alpha, \alpha) \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \qquad w = \frac{1}{\sqrt{3\,\alpha^2 - 2\,\alpha + 1}}(1 - \alpha, \alpha, \alpha)\,.$$

1.b.a. Determinare i valori di α per cui:

1. u risulta definito; w risulta definito;
2. u e v sono ortogonali; v e w sono ortogonali;
3. u e v sono paralleli; v e w sono paralleli;
4. $u \cdot v$ è massimo; $v \cdot w$ è massimo.

1.) u risulta definito:	w risulta definito:
2.) u e v sono ortogonali:	v e w sono ortogonali:
3.) u e v sono paralleli:	v e w sono paralleli:
4.) $u \cdot v$ è massimo:	$v \cdot w$ è massimo: 1+1+1+1/30

1.b.b. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$u \cdot v \wedge w =$
1/30

1.c. Calcolare la distanza tra le due rette distinte R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = \sqrt{2}$, $y = \pi\,t + 3$, $z = 1 - \pi\,t$ e $x = 0$, $y = 3 + \sqrt{2} - s$, $z = 1 + s$ e determinare se esse siano sghembe, incidenti, o coplanari.

$d(R_1, R_2) =$
le rette R_1 e R_2 sono ... ... 3+1/30

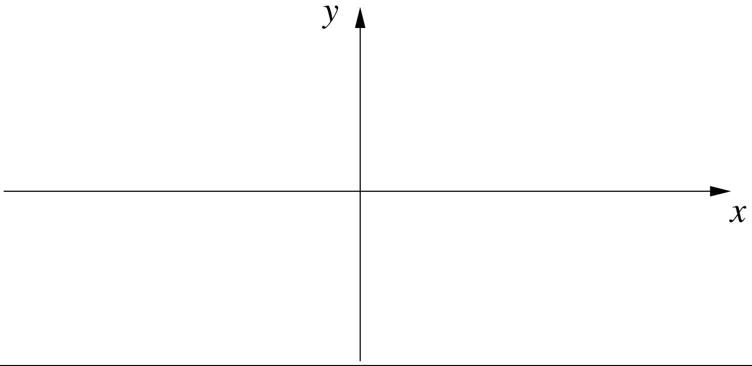
1.d. Calcolare la distanza tra la retta R di equazione vettoriale $R(t) = (3 + t, 5 + t, t)$ ed il piano Π passante per l'origine ed ortogonale al versore $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$.

$d(R, \Pi) =$
2/30

2. È data la funzione $\quad F(x,y) = (x-y)^2 + x^2 y - (x^2+y^2)\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

3/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0,1,2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i,0,0)$;

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $\qquad\qquad$ Π_1: $\qquad\qquad$ Π_2: $\qquad$ 1+1+1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x \leq 12\,\}$.

2.d)

6/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x,y) := \log_2 x(x-2)y$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$D[h] =$

1/30

2.f. Determinare tutti i punti estremali di $h(x,y) := \log_2 x(x-2)y$ nella regione $R \cap D[h]$.

2.f)

2/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $0 \leq z \leq x \leq R$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z. Sia Q l'intersezione tra M ed il piano $z = \frac{R}{2}$.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere M e Q in coordinate cilindriche;

3.c. Esprimere Q in coordinate Cartesiane;

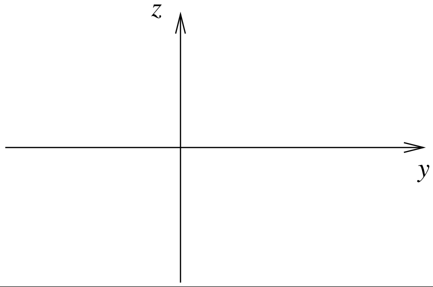
3.d. Calcolare il volume di M mediante integrazione;

3.e. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_M z \; dx\, dy\, dz$;

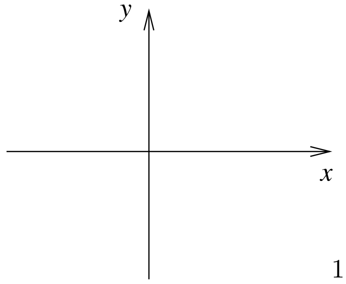
3.f. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di M;

3.g. Calcolare la superfice S di M.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1+1/30

b) coordinate cilindriche

$M =$

$Q =$

1+1/30

c) coordinate Cartesiane

$Q =$

1/30

d)

$V =$

3/30

e)

$I =$

3/30

f)

$x_b =$ $y_b =$ $z_b =$

2/30

g)

$S =$

2/30

Prova scritta di Matematica II - 18 aprile 2007 - FILA D

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

COGNOME E NOME ....

N. di matricola .... **FIRMA**..............................

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per $(1, -1, 1)$ e ortogonale a $(3, 2, 0)$;

1.a.b. piano Π_2 passante per $(0, -3, 3)$, $(12, 0, 0)$, $(3, -6, 0)$;

1.a.c. piano Π_3 passante per $(3, 1, 1)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t + 1, 2\,t - 2, 0)$.

1.a.d. quale relazione geometrica osserviamo tra i piani Π_1, Π_2 e Π_3? Sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Π_1:	Π_1 ......Π_2 ......Π_3 ......Π_1
Π_2:	
Π_3:	1+1+1+2/30

1.b. Siano dati tre vettori

$$u = (1, 2, 0) \qquad v = (\alpha - 1, 2\,\alpha - 2, 2 - 2\,\alpha) \qquad w = (2, 0, 1)\,.$$

1.b.a. Determinare i valori di α per cui:
1. u e v sono ortogonali; oppure v e w sono ortogonali;
2. u e v sono paralleli; oppure v e w sono paralleli.

1.) u e v sono ortogonali:	v e w sono ortogonali:
2.) u e v sono paralleli:	v e w sono paralleli:
	1+1/30

1.b.b. Calcolare $u \cdot v \wedge w$ e dire per quali valori di α $u \cdot v \wedge w$ risulta negativo.

$u \cdot v \wedge w =$	
$u \cdot v \wedge w < 0$ per	1+1/30

1.c. Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = 5$, $y = 1$, $z = 2\sqrt{3}\,t + 11\sqrt{\pi - 3}$ e $x = -7 - 561\sqrt{\pi + 2}\,s$, $y = 561\sqrt{\pi + 2}\,s$, $z = 1$.

$d(R_1, R_2) =$	4/30

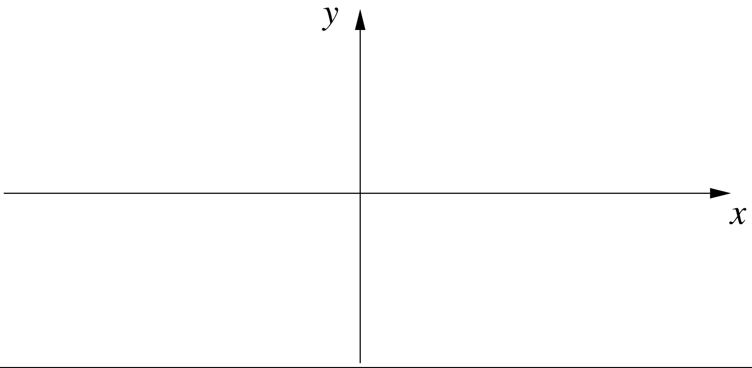
1.d. Calcolare la distanza tra il punto $P = (2, 3, 4)$ ed il piano Π passante per l'origine ed ortogonale al vettore $(0, 1, 1)$.

$d(P, \Pi) =$	2/30

2. È data la funzione $F(x, y) = (x-4)(xy^2 - 4\,x + 3\,y^2 - 12) - 12 + y^2(x+3) - 4\,x$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

4/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1, 1, 24)$;

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1, 1, 24)$:

2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\ \}$.

2.d)

6/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x, y) := \sqrt{49\,(x^2-9)(y^2-4)}$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$D[h] =$

1/30

2.f. Determinare tutti i punti estremali di $h(x, y) = \sqrt{49\,(x^2-9)(y^2-4)}$ nella regione $R \cap D[h]$.

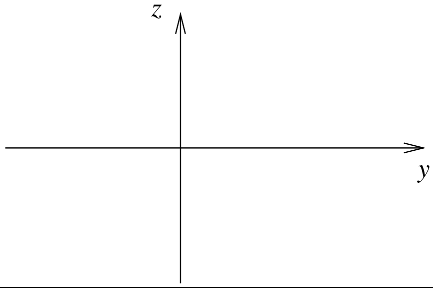
2.f)

2/30

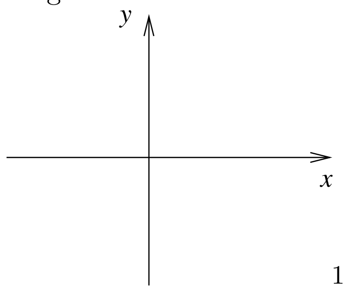
3. Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 - 8\,y + 15 \leq 0\,\}$. Sia M_E il solido che si ottiene facendo ruotare E attorno all'asse delle z. Sia R l'intersezione tra M_E ed il piano $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- **3.a.** Disegnare sia E (sulla sinistra) che R (sulla destra);
- **3.b.** Esprimere M_E ed R in coordinate cilindriche;
- **3.c.** Esprimere R in coordinate Cartesiane;
- **3.d.** Calcolare il volume di M_E mediante integrazione;
- **3.e.** Calcolare l'integrale triplo $I = \int_{M_E} z + x + xy\ dx\,dy\,dz$;
- **3.f.** Calcolare la superfice S di R.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare R



1+1/30

b) coordinate cilindriche

$M_E =$

$R =$

1+1/30

c) coordinate Cartesiane

$R =$

1/30

d)

$V =$

4/30

e)

$I =$

3/30

f)

$S =$

2/30

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME **-controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico.
3) È consentito l'utilizzo di materiale cartaceo, a piacere, ma non è consentito lo scambio tra di voi di alcun materiale.
4) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti e (2) non venite all'esame solo per fare i curiosi (i testi vengono pubblicati sul sito successivamente all'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO **-assegnazione punti**

1) La risoluzione **COMPLETA ed ESAURIENTE** dell'esercizio "in bella copia" deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
2) Tutti i fogli consegnati, inclusa la copertina, debbono riportare NOME, COGNOME e MATRICOLA (sia per l'assegnazione dei punti che per il controllo).
3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina.

ATTENZIONE: All'elaborato verrà data una prima valutazione in base ai risultati riportati negli appositi riquadri della copertina. Solamente nel caso in cui tale provvisoria valutazione sia superiore ai 16/30, si procederà allora alla correzione dello svolgimento degli esercizi come riportato sui fogli allegati e verrà quindi data la valutazione finale.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI **-completamento esame**

I voti verrano resi disponibili sotto SINDI. Dal 18 in sù potete registrare il voto: basta che esprimiate il vostro consenso sotto SINDI. Ad alcuni di voi verrà richiesto di completare la prova scritta con un orale, ma costoro sono esonerati dal presentarsi a me per un orale qualora intendano comunque rifare lo scritto. I voti scadono dopo alcuni mesi (li garantiamo per 3 mesi) od alla consegna di un successivo scritto.

Prova scritta di Matematica II - 29 marzo 2007 - FILA B
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. (pt: 1+1+1+1/30) Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per $(1, 1, 1)$ e ortogonale a $(2, -3, 5)$;

1.a.b. piano Π_2 passante per $(0, -1, 1)$, $(4, 0, 0)$, $(1, -2, 0)$;

1.a.c. piano Π_3 passante per $(5, 1, 1)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t + 3, 2\,t - 2, 0)$.

1.a.d. quale relazione geometrica osserviamo tra i piani Π_1, Π_2 e Π_3?

1.b. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (1, 2, 0) \qquad Q = v = (0, 1, 2) \qquad T = w = (2, 0, 1)\,.$$

1.b.a. (pt: 1/30) Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

1.b.b. (pt: 1/30) Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

1.b.c. (pt: 1+1/30) Determinare la distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q e la distanza di P dalla retta r_{QT} passante per Q e T.

1.c. (pt: 3/30) Calcolare la distanza tra il punto $P = (0, 0, 1)$ e la retta R di equazioni $z = 2 - y$ e $z = 2 - x$. Esprimere R in forma parametrica.

1.d. (pt: 4/30) Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = 1$, $y = 1$, $z = 2\,t$ e $x = -1$, $y = 165\sqrt{2}\,s + \sqrt{3}$, $z = 1$.

2. È data la funzione $\quad F(x, y) = 5\,(y - x)^2 + 10\,y(x - y) + 5\,.$

2.a. (pt: 2/30) Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

2.b. (pt: 3/30) Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

2.c. (pt: 2/30) Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1, 1, 5)$;

2.d. (pt: 5/30) Determinare tutti i punti estremali di F nella regione R, dove $R = \big\{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 9\,x^2 + 4\,y^2 - 36 \le 0\,\big\}$.

2.e. (pt: 1/30) Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x, y) := \sqrt{5\,x^2 - 5\,y^2 + 5}$ in coordinate cartesiane.

2.f. (pt: 2/30) Determinare tutti i punti estremali di $h(x, y) = \sqrt{5\,x^2 - 5\,y^2 + 5}$ nella regione $R = \cap D[h]$.

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $x = 0$ delimitata dai paraboloidi $z = 5 - (y - 2)^2 - (x - 2)^2$ e $z = -5 + (y - 2)^2 + (x - 2)^2$. Sia M_E il solido che si ottiene facendo ruotare E attorno all'asse delle z. Sia R l'intersezione tra M_E ed il piano $z = 1$.

3.a. (pt: 1+1/30) Disegnare sia E (sulla sinistra) che R (sulla destra);

3.b. (pt: 1+1/30) Esprimere M_E in coordinate cilindriche ed R in coordinate Cartesiane;

3.c. (pt: 4/30) Calcolare il volume di M_E mediante integrazione;

3.d. (pt: 4/30) Calcolare l'integrale triplo $I = \int_{M_E} z + xy\ dx\,dy\,dz\,;$

3.e. (pt: 1+2/30) Calcolare la lunghezza L di R ed impostare un integrale per il computo della superfice S di M_E.

Prova scritta di Matematica II - 6 dicembre 2006 - FILA A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Calcolare la distanza tra i punti $P = (2, 3, 5)$ e $Q = (1, -6, 2)$.

$d(P, Q) =$
1/30

1.b. Calcolare la distanza tra il punto $P = (2, 3, 5)$ ed il piano $\Sigma_1 : 4x - 2y + 4z = 4$.

$d(P, \Sigma_1) =$
2/30

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $P = (2, 3, 5)$ e la retta R di equazioni $4x - 2y + 4z = 2$ e $z = x$. Esprimere R in forma parametrica.

$R : \begin{cases} x & = \\ y & = \\ z & = \end{cases}$	$d(P, R) =$
	3/30

1.d. Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = 1+t$, $y = 1 - 6t$, $z = 2t$ e $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

$d(R_1, R_2) =$
4/30

1.e. Calcolare per quale valore di α il piano Σ_α di equazione $\alpha x - 3y + \alpha z = -4\,\alpha$ risulta parallelo al piano Σ_1 di equazione $4x - 2y + 4z = 2$. Determinare quindi la distanza tra questi due piani paralleli.

Σ_α :
1/30

$d(\Sigma_1, \Sigma_\alpha) =$
2/30

2. È data la funzione $F(x, y) = 3\,x^2 - 3\,y^2$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:
1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

3/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(0,0,0)$;

2.c) Equazione del piano tangente F in $(0,0,0)$:

2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $9\,x^2 + 4\,y^2 \leq 36$.

2.d)

5/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $x = 0$ contenuta tra due cerchi concentrici C_1 e C_2 con centro l'origine e raggio $R_1 = 3$ ed $R_2 = 5$ rispettivamente. Sia M_E il solido che si ottiene facendo ruotare E attorno all'asse delle z. Sia M_R il solido ottenuto come intersezione tra M_E ed il semispazio $\{z \geq R_1\}$. Sia R la superfice ottenuta come intersezione tra M_R ed il piano $x = 0$.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che R (sulla destra);

3.b. Esprimere M_R ed R in coordinate Cartesiane;

3.c. Calcolare il volume di M_R mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_{M_R} xy \; dx\, dy\, dz$.

a.1) Disegnare E	**a.2)** Disegnare R
	2/30

b)

$M_R =$

$R =$

3/30

c)

$V =$

5/30

d)

$I =$

3/30

Prova scritta di Matematica II - 28 settembre 2006 - FILA A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (3, 4, 0) \qquad Q = v = (0, 3, 4) \qquad T = w = (4, 0, 3)\,.$$

1.a. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$u \cdot v \wedge w =$
1/30

1.b. Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

$\text{Area}(PQT) =$
2/30

1.c. Determinare la distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q e la distanza di P dalla retta r_{QT} passante per Q e T.

$d(T, r_{PQ}) =$	$d(P, r_{QT}) =$
	3/30

1.d. Determinare le seguenti equazioni:

1.d.a equazioni del piano Π passante per P, Q, e T;

1.d.b equazioni parametriche della retta r passante per P e parallela al segmento $\overline{QT}$;

1.d.c equazioni simmetriche della retta r.

Π: $\qquad\qquad = 0$	$r : \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$	$r :$ 2+2+2/30

2. È data la funzione $\quad F(x, y) = 2\,x^3\,y - 8\,xy\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:
1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:
4/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1, 2, -12)$.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1, 2, -12)$: 3/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nel quadrato Q di spigoli $(-2, -2)$ e $(2, 2)$.

2.d) 5/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $|z| \leq |x| \leq R$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra);

3.b. Esprimere M in coordinate Cartesiane;

3.c. Calcolare il volume di M mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_M z \; dx\, dy\, dz$;

3.e. Calcolare la superficie di M.

a.1) Disegnare E	**a.2)** Disegnare M 1/30

b) $M =$ 2/30

c) $V =$ 5/30

d) $I =$ 3/30

e) $S =$ 4/30

Prova scritta di Matematica II - 31 agosto 2006 - FILA A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a piano Π_1 passante per $(1,1,0),(2,1,0),(0,2,2)$;

1.a.b piano Π_2 passante per $(0,2,2)$ e ortogonale a $(0,2,-1)$;

1.a.c piano Π_3 contente la retta di equazioni parametriche $P(t)=(1+t,1,0)$ e che interseca il piano $y-z$ nel punto $(0,2,2)$.

Π_1:

Π_2:

Π_3:

2+2+2/30

1.b. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (3,4,0) \qquad Q = v = (0,3,4) \qquad T = w = (4,3,0)\,.$$

1.b.a. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$u \cdot v \wedge w =$

1/30

1.b.b. Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

$\text{Area}(PQT) =$

2/30

1.b.c. Determinare la distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q e la distanza di P dalla retta r_{QT} passante per Q e T.

$d(T, r_{PQ}) =$ $\qquad$ $d(P, r_{QT}) =$

3/30

2. È data la funzione $F(x,y) = 2\,x\,y - x^2\,y$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$ e studiare il segno di F;

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:

1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura: 4/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1, 2, 2)$.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1, 2, 2)$: 4/30

2.d. Determinare tutti gli estremi di F nella regione $R = \{ (x, y) \; : \; 3\,x^2 - 6\,x + y^2 \leq 9 \}$.

2.d)   7/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati: E = parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $x^2 + z^2 \leq R^2$ e $|z| \leq |x|$, e M = solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra);
3.b. Esprimere M in coordinate Cartesiane;
3.c. Calcolare il volume di M mediante integrazione;
3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_M z \; dx\, dy\, dz$;
3.e. Calcolare la superficie di M.

a) Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra)   1/30

b) $M =$ 1/30

c) $V =$ 3/30

d) $I =$ 4/30

e) $S =$ 7/30

Prova scritta di Matematica II - 5 luglio 2006 - FILA A
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. (1pt +2pt) Calcolare per quale valore di α il piano Σ_α di equazione $10\,x+10\,\alpha\,y-20\,z = 15\,\alpha$ risulta parallelo al piano Σ di equazione $2\,x+4\,y-4\,z=0$. Determinare quindi la distanza tra questi due piani paralleli.

1.b. (3pt) Verificare che le rette R_1 ed R_2 di equazioni simmetriche $x=y=z$ e $x+1 = y/2 = z/3$ sono sghembe, e calcolarne la distanza.

1.c. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (1, -2, 3) \qquad Q = v = (0, -1, -2) \qquad T = w = (4, -1, 8)\,.$$

1.c.a. (2pt)
Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

1.c.b. (2pt) Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

1.c.c. (2pt) Determinare l'equazione del piano Π_1 passante per P, Q e T.

2. È data la funzione $F(x, y) = 2\,x^2\,y - 4\,x\,y\,.$

2.a. (1pt) Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

2.b. (4pt) determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

2.c. (4pt) determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1, 2, -4)$.

2.d. (7pt) determinare tutti i punti di massimo e di minimo della funzione nel quadrato Q con vertici in $(0, 0)$ e $(2, 2)$.

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z, sia M_R l'intersezione della palla di raggio R centrata nell'origine con il semispazio $\{z \geq R/2\}$.

3.a. (1pt) Disegnare M_R (o una sua sezione significativa);

3.b. (1pt) esprimere M_R in coordinate Cartesiane;

3.c. (5pt) calcolare il volume di M_R mediante integrazione;

3.d. (8pt) calcolare la superficie di M_R.

Prova scritta di Matematica II - 31 marzo 2006 - FILA A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. (pt: 1/30)
Calcolare la distanza tra i punti $P = (4, 6, -2)$ e $Q = (1, -6, 2)$.

1.b. (pt: 2/30)
Calcolare la distanza tra il punto $P = (4, 6, -2)$ ed il piano $\Sigma_1 : 4x - 2y + 4z = 2$.

1.c. (pt: 3/30)
Calcolare la distanza tra il punto $P = (4, 6, -2)$ e la retta R di equazioni $4x - 2y + 4z = 2$ e $z = -\frac{1}{2}$.

1.d. (pt: 1+2/30)
Calcolare per quale valore di α il piano Σ_α di equazione $6x-3y+\alpha z = -\alpha$ risulta parallelo al piano Σ_1 di equazione $4x - 2y + 4z = 2$. Determinare quindi la distanza tra questi due piani paralleli.

1.e. (pt: 3/30)
Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = 1+t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2t$ e $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

2. (pt: 7/30)
Determinare tutti i punti di massimo e di minimo della funzione

$$F(x, y) = 2x^2 - 4x + 2y^2 + 2,$$

nella regione $2x^2 + 3y^2 \leq 16$, specificando la natura di tali estremi (assoluti o relativi).

3. (pt: 16/30)
In un riferimento Cartesiano x, y, z, sia M_R l'intersezione della palla di raggio R centrata nell'origine con il cono con vertice nell'origine, asse di simmetria coincidente con l'asse delle z, e la cui intersezione con il piano $y = 0$ è data da $\{(x, 0, z) \mid z \geq |x|\}$.

3.a (pt: 1/30)
Disegnare M_R (o una sua sezione significativa);

3.b (pt: 1/30)
esprimere M_R in coordinate Cartesiane;

3.c (pt: 6/30)
calcolare il volume di M_R mediante integrazione;

3.d (pt: 8/30)
calcolare la superficie di M_R.

Prova scritta di Matematica II - 16 marzo 2006 - FILA A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (2,4,4) \qquad Q = v = (4,2,0) \qquad T = w = (6,0,8)\,.$$

1.a. (pt: 2/30)
Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

1.b. (pt: 2/30)
Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

1.c. (pt: 2/30)
Determinare l'equazione del piano Π_1 passante per P, Q e T.

1.d. (pt: 2/30)
Determinare l'equazione del piano Π_2 passante per $P = (2,4,4)$ e che è tangente in P alla sfera S di raggio 6 centrata nell'origine.

1.e. (pt: 2/30)
Determinare le equazioni parametriche della retta R_1 passante per P ed ortogonale a Π_1 e le equazioni parametriche della retta R_2 passante per P ed ortogonale a Π_2.

1.f. (pt: 3/30)
Sia P_1 il punto diverso da P in cui R_1 interseca la sfera S. Sia P_2 il punto diverso da P in cui R_2 interseca la sfera S. Fornire le distanze $d(P_1, P)$ e $d(P_2, P)$.

2. (pt: 7/30)
Determinare tutti i punti di massimo e di minimo della funzione

$$F(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5,$$

nella regione $x^2 + y^2 \leq 16$, specificando la natura di tali estremi (assoluti o relativi).

3. (pt: 8/30)
In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati: E = parte del semipiano $y = 0$, $x > 0$ descritta dalle disequazioni $x^2 + z^2 \leq 4$ e $z \leq x$, e M = solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z. Calcolare l'integrale triplo

$$I = \int_M z \; dx\, dy\, dz\,.$$

4.a. (pt: 3/30)
Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola $y = ax^2$ compreso tra i punti $(0,0)$ e $(1,a)$.

4.b. (pt: 5/30)
Calcolare l'area della superfice ottenuta facendo ruotare attorno all'asse delle y l'arco di parabola di cui al punto precedente.

Prova scritta di Matematica II - 14/12/2005
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. (pt: 2/30)
In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i vettori

$$u = (2, 2, 1) \qquad v = (0, 1, 2) \qquad w = (4, 0, 3)\,.$$

Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

2. (pt: 8/30)
Determinare l'equazione del piano Π passante per $P = (2, 2, 1)$ e che è tangente in P alla sfera centrata nell'origine (e passante per P).

3. (pt: 10/30)
Determinare tutti i punti stazionari della funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = y(x + 1)^2\,,$$

specificandone la natura.

4. (pt: 14/30)
In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati:

$$E = \{(x, 0, z) \mid x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq \sqrt{3}x\ \}$$

M = solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

4.a (pt: 2/30)
Disegnare l'insieme E nel piano Cartesiano x, z;

4.b (pt: 5/30)
calcolare l'area $A(E)$ dell'insieme E;

4.c (pt: 2/30)
descrivere e disegnare l'insieme M nel riferimento Cartesiano x, y, z;

4.d (pt: 5/30)
calcolare l'integrale triplo

$$I = \int_M z\ dx\,dy\,dz\,.$$

Prova scritta di Matematica II - 15/9/2005

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. (pt: 3+3+3/30)

Determinare le equazioni dei seguenti piani:

(a) piano Π_1 passante per $(1,1,0),(2,1,0),(0,2,2)$;

(b) piano Π_2 passante per $(0,2,2)$ e ortogonale a $(0,2,-1)$;

(c) piano Π_3 contente la retta di equazioni parametriche $P(t)=(1+t,1,0)$ e che interseca l'asse delle x nel punto $(0,2,2)$.

2. (pt: 3+4+5/30)

È data la funzione

$$F(x,y)=x(x-1)y\,.$$

2.a (pt: 3/30)
Disegnare l'insieme $\Sigma_0=\{(x,y)\mid F(x,y)=0\ \}$ e studiare il segno di F;

2.b (pt: 4/30)
determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

2.c (pt: 5/30)
determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(2,1,2)$.

3. (pt: 1+1+10/30)

In un riferimento Cartesiano x,y,z, sia M_R l'intersezione della palla di raggio R centrata nell'origine con il semispazio $\{z\geq R/2\}$.

3.a (pt: 1/30)
Disegnare M_R (o una sua sezione significativa);

3.b (pt: 1/30)
esprimere M_R in coordinate Cartesiane;

3.c (pt: 10/30)
calcolare il volume di M_R mediante integrazione.

Prova scritta di Matematica II - 24/6/2005

1. Dati il piano Π_0 di equazione $x + 2y - z = 0$ e il punto $P_0 = (2, 1, 2)$,

   a) determinare equazioni parametriche della retta R_1 passante per P_0 ed ortogonale a Π_0;

   R_1 ......
   4/30

   b) determinare la minima distanza $d(P_0, \Pi_0)$ del punto P_0 dal piano Π_0.

   $d(P_0, \Pi_0) =$
   4/30

   c) determinare le equazioni Cartesiane della sfera di centro P_0 che è tangene il piano Π_0.

   ......
   4/30

2. È data la funzione reale di due variabili reali $F(x, y) = y(2 - y)x$.

   (a) Determinare l'insieme di livello $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$;

   (b) studiare il segno di F;

   (c) determinare i punti stazionari di F studiandone la natura.

Disegnare l'insieme Σ_0 e tratteggiare l'insieme su cui F è positiva

(2+4)/30

Elencare i punti stazionari specificandone la natura

6/30

3. Sia $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$.

   (a) Descrivere e/o disegnare M (o una sua sezione significativa);

   (b) calcolare mediante integrazione il volume $V(M)$ di M.

a)

4/30

b) $V(M) =$

6/30

Prova scritta di Matematica II - 6/4/2005

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. In un sistema di riferimento Cartesiano sono dati i punti $P_1 = (3, 2, 0)$ e $P_2 = (0, 1, 2)$.
   (a) Calcolare d =distanza Euclidea dei punti P_1 e P_2;
   (b) calcolare $P_1 \cdot P_2$;
   (c) calcolare $P_1 \wedge P_2$;
   (d) determinare il punto P_0 di intersezione della retta R passante per P_1 e per P_2 con il piano Π_1 di equazione $x + y + z = 1$;
   (e) determinare l'equazione del piano Π_0 passante per P_0 ed ortogonale a R.

$d =$ 2/30

$P_1 \cdot P_2 =$ 2/30

$P_1 \wedge P_2 =$ 2/30

$P_0 =$ 3/30

Π_0... 3/30

2. È data la funzione reale di due variabili reali

$$F(x, y) = y^2 - 4x^2 y\,.$$

a) Determinare $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

b) determinare i punti stazionari di F studiandone la natura.

a) Disegnare l'insieme Σ_0, tratteggiare l'insieme su cui F è positiva

4/30

b) 4/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati gli insiemi

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 4\ \} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\ \}$$

ed $M = A \cap B$.

a) Disegnare e/o descrivere gli insiemi A, B, M (o loro sezioni significative).

1+1+1/30

b) Calcolare $I = \int_M z \; dx\, dy\, dz$.

$I =$

8/30

SOLO PER MATEMATICA 1

È data la funzione reale di variabile reale f definita da

$$f(x) = \frac{(1-x^3)^2}{1+x^3}.$$

Disegnare il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale, monotonia, l'immagine di f.

Determinare inoltre le coordinate del punto P_0 di intersezione della retta tangente il grafico di f nel punto $(2^{1/3}, \frac{1}{3})$ con l'asse delle y.

$\mathrm{Im} f =$

$P_0 =$

Prova scritta di Matematica II - 16/3/2005

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i punti $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (1, 0, -1)$, $P_3 = (0, 1, 1)$ e $Q = (1, 2, 3)$.

   1.a. (3pt) Dimostrare che i punti P_1, P_2, P_3 non sono allineati e determinare l'equazione del piano Π_1 contenente in punti P_1, P_2, P_3;

   1.b. (3pt) determinare l'equazione del piano Π_0 passante per Q e parallelo a Π_1;

   1.c. (4pt) calcolare la distanza di Q dal piano Π_1.

2. È data la funzione reale di due variabili reali

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - xy\,.$$

   2.a. (2pt) Studiare il segno delle funzioni $x \to F(x, 0)$ e $x \to F(x, x)$ (cioè il segno delle restrizioni di F alle rette $y = 0$ e $y = x$;

   2.b. (4pt) determinare i punti stazionari di F e

   2.c. (4pt) studiarne la natura (qui è utile lo studio effettuato in (a)).

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati gli insiemi

$$\begin{aligned} C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\ \} \\ \Sigma_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 - 2\ \} \\ \Sigma_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -\sqrt{x^2 + y^2} + 1\ \}\,. \end{aligned}$$

   3.a. (2pt) descrivere e/o disegnare gli insiemi C, Σ_1, Σ_2 (o loro sezioni significative);

   3.b. (2pt) descrivere e/o disegnare il solido M che è interno a C, ed è compreso fra Σ_1 e Σ_2;

   3.c. (6pt) calcolare il volume di M.

Prova scritta di Matematica II - 15/12/2004
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. Fra tutti i piani contenenti la retta di equazioni parametriche
$$x = t, \qquad y = 2t, \qquad z = t$$
determinare quello che passa per il punto $(1, 0, 2)$.

4/30

2. È data la funzione reale di due variabili reali
$$F(x, y) = (x^2 - y)(y - 1)\,.$$
   (a) Determinare l'insieme di livello $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\ \}$;
   (b) studiare il segno di F;
   (c) determinare i punti stazionari di F studiandone la natura.

Disegnare l'insieme Σ_0 e tratteggiare l'insieme su cui F è positiva

(2+4)/30

Elencare i punti stazionari specificandone la natura

6/30

3. Sia
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2z^2 \le 6\ \}\,.$$
   (a) descrivere e/o disegnare M (o una sua sezione significativa);
   (b) calcolare mediante integrazione il volume $V(M)$ di M.

$a)$

4/30

$V(M) =$

6/30

Prova scritta di Matematica II - 22/9/2004 - FILA A

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati il piano Π_0 di equazione $x - y + 2z = 0$ e il punto $P_0 = (3, 2, 1)$.

   i) Fornire equazioni parametriche della retta R_1 passante per P_0 ed ortogonale a Π_0;

   i)
   $R_1 \ldots\ldots$
   4/30

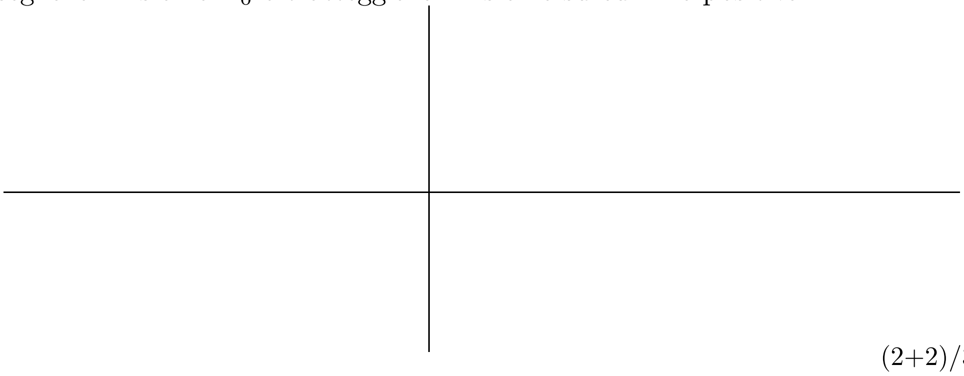
   ii) determinare la minima distanza $d(P_0, \Pi_0)$ del punto P_0 dal piano Π_0.

   ii)
   $d(P_0, \Pi_0) =$
   6/30

2. Si consideri la funzione reale di due variabili reali $F(x, y) = \arctan(x^2 - y^2)$.

   i) Individua l'insieme di livello $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ e studia il segno di F;

   Disegnare l'insieme Σ_0 e tratteggiare l'insieme su cui F è positiva

   (2+2)/30

   ii) Determinare e studiare la natura di tutti i punti stazionari di F.

   Elencare i punti stazionari specificandone la natura
   4/30

3. Sia $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$.

   i) descrivere e/o disegnare M (o una sua sezione significativa);

   i)
   2/30

   ii) esprimere M in coordinate sferiche ρ, θ =longitudine, ϕ =latitudine;

   $M_{sferiche} = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \qquad\qquad \}$ 4/30

   iii) calcolare mediante integrazione il volume $V(M)$ di M.

   $Vol(M) =$
   6/30

Prova scritta di Matematica II - 8/9/2004 - FILA A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati il piano Π_0 di equazione $x + 2y - 2z = 1$ e la retta R_0 di equazioni

$$\begin{cases} x + y & = & 0\,, \\ z & = & 0\,. \end{cases}$$

   i) Determinare il punto P_0 di intersezione fra il piano Π_0 e la retta R_0;

$P_0 =$
2/30

   ii) determinare equazioni parametriche della retta R_1 passante per P_0 ed ortogonale a Π_0;

$R_1 \ldots\ldots$
4/30

   iii) determinare il piano Π_1 contenente la retta R_1 e passante per l'origine.

$\Pi_1 \ldots\ldots$
4/30

2. È data la funzione reale di due variabili reali

$$F(x, y) = (xy^2 - y - 1)^2 + (y^2 - 1)^2\,.$$

   i) Determinare l'insieme di livello $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\ \}$;

$\Sigma_0 =$
2/30

   ii) determinare e studiare la natura di tutti i punti stazionari di F;

Elencare i punti stazionari specificandone la natura
6/30

3. calcolare mediante integrazione il volume del solido

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\ \}\,.$$

$Vol(M) =$
10/30

Prova scritta di Matematica II - 14/7/2004 - FILA A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1 − i) In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i vettori

$$u = (1, 2, 2) \qquad v = (2, 1, 0) \qquad w = (3, 0, 4)\,.$$

Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$u \cdot v \wedge w =$
2/30

1 − ii) Determinare l'equazione del piano Π passante per $P = (1, 2, 2)$ e che è tangente in P alla sfera di raggio 3 centrata nell'origine.

$\Pi \ldots$
8/30

2 Determinare tutti i punti stazionari della funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = x(y + 2)^2,$$

specificandone la natura.

10/30

3 In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati: E = parte del semipiano $y = 0$, $x > 0$ descritta dalle disequazioni $x^2 + z^2 \le 4$ e $z \le x$, e M = solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z. Calcolare l'integrale triplo

$$I = \int_M z \; dx\, dy\, dz\,.$$

$I =$
10/30

Prova scritta di Matematica II - 30/6/2004

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i vettori $P_0 = (1, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 2)$.

   i) Calcolare $P_0 \cdot v$ e $P_0 \wedge v$;

   ii) determinare l'equazione del piano Π passante per P_0 ed ortogonale a v;

   iii) determinare le equazioni della retta R passante per P_0 ed ortogonale a Π;

   iv) determinare l'equazione del piano Π_1 contenente la retta R e passante per l'origine;

i) $P_0 \cdot v =$ $P_0 \wedge v =$ 2/30
ii) $\Pi \ldots$ 2/30
iii) $R \ldots$ 3/30
iv) $\Pi_1 \ldots$ 3/30

2. Determinare tutti i punti stazionari della funzione

$$F(x, y) = x^2y^2 + x^4 + y^2$$

   specificandone la natura.

10/30

3. Sia E il sottoinsieme del piano $y = 0$ contenuto nel quadrante $x > 0, z > 0$ e delimitato dalle curve di equazioni

$$xz = 2, \ y = 0 \qquad \text{e} \qquad x + z = 3, \ y = 0\,.$$

   i) Calcolare

$$I = \int_E x \ dxdz\,.$$

   Calcolare il volume del solido M che si ottiene facendo ruotare E di 60^o in senso antiorario attorno all'asse delle z.

$I =$ 5/30
$V(M) =$ 5/30

Prova scritta di Matematica II - 2/4/2004 - FILA A

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia R la retta di equazioni $x = 0, y = z$ e sia P_0 il punto di coordinate $(2, 1, 0)$. Determinare:

   i) il piano Π contenente R e P_0;

   $\Pi \ldots$

   3/30

   ii) la retta $R^{\perp}$ passante per P_0 ed ortogonale a R;

   $R^{\perp} \ldots$

   3/30

   iii) la distanza $d(P_0, R)$ del punto P_0 dalla retta R.

   $d(P_0, R) =$

   4/30

2. Si consideri la funzione reale di due variabili reali $F(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 9)$.

   i) Disegnare l'insieme di livello $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ e studiare il segno di F;

   Disegnare l'insieme Σ_0 e individuare l'insieme su cui F è positiva

   (2+2)/30

   ii) determinare tutti i punti stazionari di F;

   iii) studiare la natura di tutti i punti stazionari di F.

   Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

   ii)=2/30, *iii*)=4/30

3. Calcolare il volume $V(M)$ del solido $M = \{(x, y, z) \mid 4x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1\}$.

   $V(M) =$

   10/30

Prova scritta di Matematica II - 17/3/2004 - FILA A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che i vettori

$$P = (\alpha, 1, 2) \qquad Q = (3, -\alpha, 1)$$

risultino ortogonali.

$\alpha =$ 3/30

2. Determinare $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ in modo tale che i vettori

$$A = (\sqrt{3}, 1, \beta) \qquad B = (3, \beta, \lambda)$$

risultino paralleli.

$\beta =$ $\qquad\qquad$ $\lambda =$ 4/30

3. Determinare l'equazione del piano Π passante per in punti

$$C = (-1, 1, 2) \quad D = (3, 1, 1) \quad E = (2, 2, 2)\,.$$

4/30

4. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = 16 - 4x^2 - 4y^2\ \},$$

e sia M il solido compreso fra Σ e il piano di equazione $z = 0$.

a) Calcolare il volume $V(M)$ di M;

b) calcolare l'area $A(\Sigma)$ di Σ.

$V(M) =$ 8/30
$A(\Sigma) =$ 8/30

Parte II
Esercizi Liberi

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i punti $P_0 = (2, 1, 0)$, $P_1 = (-2, 0, 1)$, $P_2 = (1, 0, 0)$.
   (a) Verificare che i tre punti dati non sono allineati;
   (b) determinare l'equazione del piano Π passsante per P_0, P_1, P_2;
   (c) determinare le equazioni parametriche di TUTTE le rette contenute nel piano Π e passanti per P_0;
   (d) fra tutte queste rette, determinare l'unica retta R_0 che passa anche per P_1 e l'unica retta R_1 che interseca ortogonalmente R_0 nel punto P_0.

2. È data la funzione rale di due variabili reali
$$F(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,.$$
   (a) Studiare il segno di F ed evidenziare le sue simmetrie;
   (b) determinare TUTTI i punti stazionari specificandone la natura;
   (c) determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F in $\hat{P} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2e^{-2})$;
   (d) Dimostrare che i punti di minimo/massimo locale trovati sono rispettivamente punti di minimo/massimo assoluti. Suggerimento: usare la disuguaglianza $2|xy| \le x^2 + y^2$ e lo studio del grafico della funzione $f(s) = se^{-s}$ per provare che $-e^{-1} \le F(x, y) \le e^{-1}$.

3. Disegnare in un riferimento Cartesiano x, y l'insieme E che in coordinate polari è dato da
$$E_{\text{pol}} = \left\{(r, \theta)\ :\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4},\ \ \frac{1}{\sin\theta} \le r \le \frac{2}{\sin\theta}\ \right\}.$$

4. Sia A la parte del disco di raggio 2 centrato nell'origine, che è contenuta nel semipiano $y \ge 0$ ed è compresa fra le rette di equazioni $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ e $y = \sqrt{3}x$. Calcolare
$$I = \int_A x^2\ dxdy\,.$$

5. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia M il solido che in coordinate cilindriche è dato da
$$M_{\text{cil}} = \{(r, \theta, z) \mid r \le |z|,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi\ \}\,.$$
   Descrivere e/o disegnare M o una sua sezione significativa, e calcolarne il volume mediante integrazione.

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i punti $P_1 = (7, 3, 2)$, $P_2 = (3, 1, 2)$ e $P_3 = (5, 3, 0)$.
   (a) Verificare che i tre punti dati non sono allineati;
   (b) determinare l'equazione del piano Π passante per P_1, P_2, P_3;
   (c) calcolare la (minima) distanza del piano Π dall'origine;
   (d) determinare i punti di intersezione del piano Π con i tre assi Cartesiani.

2. È data la funzione rale di due variabili reali
$$F(x, y) = y(x + 2)^2\,.$$
   (a) Disegnare in un riferimento Cartesiano x, y alcuni significativi insiemi di livello $\Sigma_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = c\}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. In particolare, disegnare l'insieme Σ_0;
   (b) studiare il segno di F e individuare in un riferimento Cartesiano x, y l'insieme su cui F è positiva;

(c) calcolare per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ il gradiente e l'Hessiano di F in (x,y);

(d) determinare tutti i punti stazionari di F e studiarne la natura (determinare cioè se si tratta di punti di minimo o massimo locale o altro);

(e) provare che il punto $\hat{P} = (2, \frac{1}{4}, 1)$ appartiene al grafico di F e determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F in $\hat{P}$.

3. Sia A la sfera di raggio 4 centrata nell'origine di un riferimento Cartesiano (x,y,z), privata della sfera di raggio 2 centrata nell'origine. Sia inoltre $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \geq x^2+y^2\}$, e $M = A \cap C$.

   (a) Descrivere e/o disegnare M (o una sua sezione significativa);

   (b) esprimere M in coordinate sferiche ρ, θ =longitudine, ϕ =latitudine;

   (c) esprimere M in coordinate cilindriche r, θ, z.

4. Determinare l'equazione del piano Π passante per $P_0 = (2,3,0)$ ed ortogonale al vettore $v = (0,1,1)$. Calcolare poi la distanza del punto $P_1 = (4,0,2)$ dal piano Π.

   Suggerimento: determinare l'equazione parametrica della retta R passante per P_1 ed ortogonale a Π; tale retta R interseca il piano Π in un punto $\bar{P}$ che è il punto di minima distanza di P_1 da Π.

5. Determinare una parametrizzazione γ della curva Γ che si ottiene intersecando il piano Π dell'es. 1 con il cilindro che ha come asse di rotazione l'asse delle z e raggio di base 1. Calcolare inoltre $\int_\gamma y \, ds$.

6. Si consideri la superficie S descritta dall'equazione

$$x^2y - z = 0\,.$$

   Calcolare l'equazione del piano tangente S nel punto $(2,1,4)$.

   Si noti che S può essere vista sia come grafico di una funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che come insieme di livello di una funzione $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Si propone e consiglia di svolgere l'esercizio nei due modi.

7. **TIPOLOGIA PER MATEMATICA 1**

   È data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{3x+1}$$

   Disegnare il grafico di f, studiando in particolare:

   (a) il dominio di f e i limiti agli estremi del dominio;

   (b) monotonia, massimi e minimi locali, convessità;

   (c) l'insieme immagine.

   Determinare inoltre l'equazione della retta tangente il grafico di f nel punto $(0,1)$.

   È data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log \frac{x+1}{x^2+1}$$

   Disegnare il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, il suo segno, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale e/o assoluti, monotonia.

   Determinare inoltre l'equazione della retta tangente il grafico di f nel punto $(1,0)$.

Parte III
Correzioni

Prova scritta di Matematica II - 20/9/2007 - FILA B

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 parallelo al piano $x+y=10$ e distante 1 da $(0,0,0)$;

1.a.b. piano Π_2 passante per $(3,5,0)$ e contenente almeno 2 assi coordinati;

1.a.c. piano Π_3 costituito dai punti equidistanti da $(5,-5,5)$ e $(-5,5,5)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

La normale al piano Π_1 passante per $(0,0,0)$ è data da $N(t)=(t,t,0)$ e quindi il punto del piano Π_1 a minima distanza da $(0,0,0)$ ha la forma $(t,t,0)$. Il valore di t resta determinato dalla condizione $d((0,0,0),(t,t,0))=1$; ad esempio:

$$1=1^2=d^2((0,0,0),(t,t,0))=t^2+t^2=2\,t^2$$

da cui segue $t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Abbiamo quindi due soluzioni possibili: una di esse è rappresenta dal piano di equazione $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ mentre l'altra è rappresenta dal piano di equazione $x+y=-\sqrt{2}$.

Contenendo 2 assi coordinati, il piano Π_2 sarà giocoforza normale al terzo asse (quale esso sia), ossia normale ad uno dei versori $(1,0,0)$ oppure $(0,1,0)$ oppure $(0,0,1)$. Allo stesso tempo, dovendo contenere l'origine (comune a tutti e 3 gli assi coordinati), il piano Π_1 conterrà il vettore $(3,5,0)$ che però è normale solamente a $(0,0,1)$. L'equazione ricercata è pertanto $z=0$ dato che la coordinata z del punto $(3,5,0)$ vale 0.

Il vettore $(5,-5,5)-(-5,5,5)=(10,-10,0)$ risulta ortogonale al piano Π_3 che inoltre passa per il punto $\frac{(5,-5,5)+(-5,5,5)}{2}=(0,0,5)$ ed avrà pertanto equazione $x-y=0$.

I piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono mutualmente ortogonali, come evidenziato dall'annullamento dei tre prodotti scalari $(1,1,0)\cdot(0,0,1)$, $(0,0,1)\cdot(1,-1,0)$, e $(1,-1,0)\cdot(1,1,0)$.

Π_1: $x+y=\sqrt{2}$

Π_2: $z=0$

Π_3: $x-y=0$

Π_1 (H) Π_2 (H) Π_3 (H) Π_1

1+1+1+2/30

1.b. Determinare i valori di α e β per cui il seguente sistema

$$\begin{cases} x & +y & +\alpha\,z & = & 3 \\ x & +y & +z & = & \beta \\ & y & +2\,z & = & 3 \end{cases}$$

1. ammette una ed una sola soluzione;
2. non ammette alcuna soluzione;
3. ammette infinite soluzioni.

La prima domanda chiede quando i 3 piani $x+y+\alpha\,z=3$, $x+y+z=\beta$ e $y+2z=3$ si incontrano in uno ed un sol punto. Due rette si incontrano in un sol punto se e solo se non sono parallele. Analogamente, due piani si incontrano in una retta (cerniera) a meno che essi non siano paralleli. Questa retta incontrerá poi in un sol punto il terzo piano, a meno che non risulti parallela ad esso. Pertanto, i tre piani si incontrano in uno ed un sol punto se e solo se i rispettivi vettori normali non sono coplanari (si noti che la direzione della retta cerniera è ortogonale alle normali ai primi due piani). Un modo pratico per vedere se i 3 vettori sono coplanari consiste nel verificare l'eventuale annullamento del prodotto triplo:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right\| = 2+\alpha-2-1=\alpha-1\,.$$

Il sistema ha pertanto una ed una sola soluzione purchè $\alpha - 1 \neq 0$, ossia $\alpha \neq 1$. Si noti quindi che la risposta alla prima domanda (esistenza ed unicità della soluzione) non dipende in alcun modo dai termini noti delle tre equazioni ma solo dal determinante della matrice dei coefficienti. Quando $\alpha = 1$ si possono presentare due casi a seconda del valore di β. Qualora $\beta \neq 3$ allora la prima e seconda equazione si contraddicono, e quindi il sistema non ammette alcuna soluzione. (In questo caso i piani descritti da prima e seconda equazione sono paralleli). Se invece $\beta = 3$ allora le due equazioni non si contraddicono, anzi, esprimono precisamente la stessa condizione (i due piani sono coincidenti). A questo punto il numero delle soluzioni é infinito poichè questo piano ribadito con ridondanza nelle prime due equazioni non è comunque mai parallelo al piano descritto dalla terza equazione.

1.) una ed una sola soluzione per: $\alpha \neq 1$

2.) nessuna soluzione per: $\alpha = 1,\ \beta \neq 3$

3.) infinite soluzioni per: $\alpha = 1,\ \beta = 3$

2+1+2/30

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $O = (0,0,0)$ e la retta di equazioni parametriche $R(t) = (\sqrt{8},\ 2\pi t + 3,\ 1 - 2\pi t)$.

Conviene innanzitutto ricorrere ad una parametrizzazione più semplice, quale $R(t) = (\sqrt{8},\ t{+}3,\ 1{-}t)$ e realizzare che la retta ha direzione $(0,1,-1)$. Poichè le altezze cadono ortogonali, risulta utile individuare il piano passante per O ed ortogonale alla retta: $(0,1,-1)\cdot(x,y,z) = (0,1,-1)\cdot(0,0,0)$, ossia $y - z = 0$. Tale piano interseca la retta nel punto determinato da $t + 3 = y = z = 1 - t$, ossia nel punto $R(-1) = (\sqrt{8},\ 2,\ 2)$. La distanza di $R(t)$ da O coincide con la distanza di $(\sqrt{8},\ 2,\ 2)$ da O e vale $\sqrt{8+4+4} = 4$.

$d(R, O) = 4\,.$

2/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R_1 di equazioni $x = 1$ e $z = y + 1$ e la retta R_2 di equazioni parametriche $R_2(t) = (-\sqrt{7},\ \pi t,\ 1 - \pi t)$ e determinare se esse siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Conviene innanzitutto ricorrere ad una parametrizzazione più semplice, quale $R_2(t) = (-\sqrt{7},\ t,\ 1{-}t)$. Si noti ora che, mentre la retta R_1 è contenuta nel piano $x = 1$, la retta R_2 è contenuta nel piano $x = -\sqrt{7}$; quindi $d(R_1, R_2) \geq 1 + \sqrt{7}$. Nel contempo, i punti $(1,0,1) \in R_1$ e $R_2(0) = (-\sqrt{7},\ 0,\ 1) \in R_2$ distano precisamente $1 + \sqrt{7}$; quindi $d(R_1, R_2) = 1 + \sqrt{7}$.
Nel reperire i due piani ed i due punti mi sono avvalso di un disegno, ossia della comprensione geometrica della situazione. Comunque, avrei potuto ottenere la normale a questi due piani paralleli facendo il prodotto vettoriale tra le direzioni $(0,1,1)$ e $(0,\ 1,\ -1)$ delle due rette. A questo punto l'ottenimento dei due piani era immediato, anche se non strettamente necessario al computo della distanza (potevo avvalermi del solo vettore normale ed ottenere ad esempio la distanza come norma del prodotto scalare tra il versore normale $(1,0,0)$ ed un qualsiasi vettore spostamento tra un punto di R_1 ed uno di R_2). Sempre osservando le direzioni $(0,1,1)$ e $(0,\ 1,\ -1)$ scopro che le rette non sono parallele, e quindi, visto che esse non sono incidenti (distanza maggiore di 0), ne deduco che nessun piano le possa contenere entrambe, ossia sono sghembe.

$d(R_1, R_2) = 1 + \sqrt{7}\,.$

le rette R_1 e R_2 sono sghembe 2+1/30

2. È data la funzione $F(x,y) = (x^2+y^2)(xy-1) + (x-y)^2 + xy\,.$

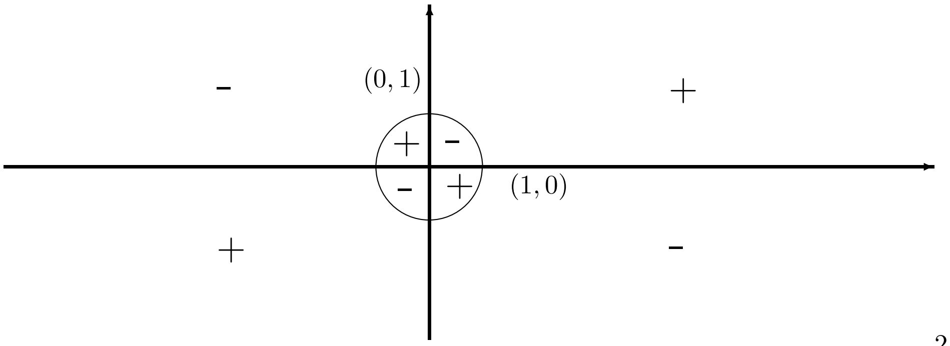
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della F operando nelle tre solite fasi (sviluppare, semplificare, raccogliere):

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (x^2+y^2)(xy-1) + (x-y)^2 + xy && \text{come data} \\ &= x^3 y - x^2 + y^3 x - y^2 + x^2 + y^2 - 2\,xy + xy && \text{esplosa, sciolti i termini, sviluppata} \\ &= x^3 y + y^3 x - xy && \text{raccolti i termini, semplificata} \\ &= xy(x^2+y^2-1)\,. && \text{raccolta, fattorizzata, semplificata} \end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o y o $(x^2 + y^2 - 1)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0 \vee x^2 + y^2 = 1\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 8 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Quattro di queste regioni sono limitate (quelle interne al cerchio).

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Si è soliti denotare con $\mathbf{C}^0$ la classe delle funzioni continue e, per ogni numero naturale $n \geq 1$, $\mathbf{C}^n$ denota la classe di tutte le funzioni in $\mathbf{C}^{n-1}$ la cui derivata n-esima è anche essa continua. Lungo questa via, la classe $\mathbf{C}^\infty$ raccoglie quelle funzioni che appertengono a $\mathbf{C}^n$ per ogni n. Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = xy(x^2+y^2-1)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = y(x^2+y^2-1) + xy(2\,x) = y(3\,x^2+y^2-1)$ ed analogamente (visto che $F(x,y) = F(y,x)$) si avrà $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x(3\,y^2+x^2-1)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} y(3\,x^2+y^2-1) &= 0 \\ x(3\,y^2+x^2-1) &= 0\,. \end{cases}$$

Si nota subito che $(x,y) = (0,0)$ è un punto stazionario. A dire il vero ciò risultava evidente anche dallo studio del segno che indicava per altro anche la presenza di altri quattro punti stazionari: $(0,\pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$. Di fatto, dallo studio del segno posso anche dedurre che questi 5 punti sono tutti selle. Ma vediamo come sia possibile estrarre, con metodo, tutti i punti che soddisfino le equazioni scritte sopra. (Caso mai ce ne siano altri, e comunque, anche solo per il gusto di meglio capire come vadano queste cose). Chiediamoci innanzittutto come stanare i 5 punti che già ci sono stati rivelati: assumendo $x = 0$, la seconda equazione risulta appagata e la prima equazione diventa $y(y^2-1) = 0$ portando ad individuare i punti $(0,0)$ e $(0,\pm 1)$. Parimenti, vista l'interscambiabilità della x e della y, assumendo $y = 0$, si individueranno i punti $(0,0)$ e $(\pm 1, 0)$. Pertanto, resta solo da indagare l'eventualitá che $x \neq 0$ e $y \neq 0$ valgano entrambe. Assumendo $x \neq 0$, la seconda equazione diviene $3\,y^2+x^2-1 = 0$, mentre, assumendo $y \neq 0$, la prima equazione diviene $3\,x^2+y^2-1 = 0$. Pertanto $3\,x^2 + y^2 = 3\,y^2 + x^2$ e quindi $2\,x^2 = 2\,y^2$ che porta a concludere $x = \pm y$. Dopo questa importante scoperta, dalla prima equazione segue $4\,x^2 = 1$ ossia $x = \pm\frac{1}{2}$ e restano così individuati i 4 ulteriori punti $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$. In effetti, a ripensarci, anche l'esistenza di questi 4 ulteriori punti (uno per ciascuna delle 4 regioni limitate) era deducibile dallo studio del segno poichè, per dirla alla Vasco, ogni regione limitata vive almeno un punto di massimo ed uno di minimo. (Inoltre, che la condizione $x = \pm y$ fosse rispettata da questi quattro punti era deducibile a priori dalle simmetrie della F: interscambiabilitá delle variabili ossia $F(x,y) = F(y,x)$, ma anche $F(-x,y) = -F(x,y) = F(x,-y)$). Ciascuno di questi 4 punti è il punto estremale ricercato nella regione chiusa di sua pertinenza (ossia nel suo quarto di cerchio), ed è pertanto punto estremale anche per la F (almeno in senso locale). Su tutto il piano, questi quattro punti sono dei massimi/minimi relativi, dacchè la F non è limitata. Ora, $F\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$ mentre $F\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

2.b) Elencare le selle, i massimi, i minimi:

5 PUNTI DI SELLA: $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm 1,0)$.

2 PUNTI DI MAX. RELATIVO: $\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)$ con $F\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$.

2 PUNTI DI MIN. RELATIVO: $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$ con $F\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$.

3+3+2/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i=0,1,2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i,0,F(i,0))$;

Chiaramente, il punto $(i,0,F(i,0))$ appartiene al grafico della F per definizione stessa del concetto di grafico di funzione. Poichè $(0,0)$ e $(1,0)$ sono punti stazionari, ci attendiamo che il piano ivi tangente sia orrizzontale. Inoltre, $(0,0)$ e $(1,0)$ appartengono a Σ_0, quindi Π_0 e Π_1 hanno equazione $z=0$. Inoltre, poichè Σ_0 contiene l'asse delle x, anche nel punto $(2,0)$ la F vale 0 ed inoltre la prima coordinata del gradiente è nulla. Quindi il piano tangente può essere inclinato solamente nella direzione delle y. L'equazione del piano tangente (testo, pag. 192) si riduce pertanto a

$$z=F_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)\,,$$

Nel caso di Π_3, ricordando che $F_y=x(3\,y^2+x^2-1)$, otteniamo l'equazione $z=F_y(2,0)\,(y-0)=6\,y$. Quanto ora trovato trova corrispondenza con le informazioni provenienti dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z=0$ Π_1: $z=0$ Π_2: $z=6\,y$

1+1+1/30

2.d. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x,y):=[xy(x^2+y^2-1)]^2$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$D[h]=\mathbb{R}^2$

1/30

2.e. Determinare tutti i punti estremali di $h(x,y)=[xy(x^2+y^2-1)]^2$ nella regione $D[h]$.

Poichè $h(x,y)=[F(x,y)]^2$, e considerato che nell'elevare al quadrato si perde il segno ma la funzione $(\cdot)^2$ è monotona crescente sui reali non-negativi, possiamo allora avvalerci dell'analogo studio per la funzione F. Si giunge alle seguenti conclusioni.

2.f)

NON LIMITATA SUPERIORMENTE MA CON DEI MAX RELATIVI.

4 MAX RELATIVI: $\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$ dove $h=\frac{1}{64}$

INFINITI MIN ASSOLUTI: tutti e soli i punti di Σ_0

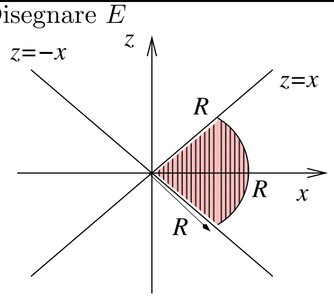
2/30

3. In un riferimento Cartesiano x,y,z sia E la parte del piano $y=0$ descritta dalle disequazioni $|z|\leq x$ e $x^2+z^2\leq R^2$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z. Sia F l'intersezione tra M ed il piano $z=-\frac{R}{2}$.

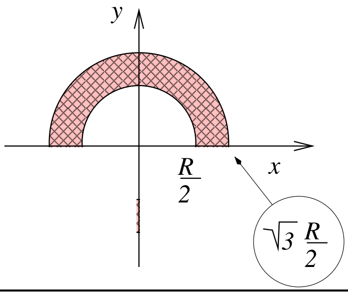
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che F (sulla destra);
3.b. Esprimere F ed M in coordinate cilindriche;
3.c. Esprimere F ed M in coordinate cartesiane;
3.d. Esprimere M in coordinate sferiche;
3.e. Calcolare il volume di M mediante integrazione;
3.f. Calcolare l'integrale triplo $I=\int_M y\;dx\,dy\,dz$;
3.g. Fornire le coordinate del baricentro $B=(x_b,y_b,z_b)$ di M;

La figura piana E è un quarto di circonferenza (la bocca di PacMan). La figura piana F è una circonferenza di raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ cui è stata tolta una circonferenza di raggio $\frac{R}{2}$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare F



1+2/30

b) F ed M in coordinate cilindriche

$F = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = -\frac{R}{2},\ 0 \le \theta \le \pi,\ \frac{R}{2} \le \rho \le \frac{\sqrt{3}}{2} R \right\}$

$M = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |z| \le \rho,\ z^2 + \rho^2 \le R^2,\ 0 \le \theta \le \pi \right\}$

1+1/30

c) F ed M in coordinate cartesiane

$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = -\frac{R}{2},\ y \ge 0,\ \frac{R^2}{4} \le x^2 + y^2 \le \frac{3}{4} R^2 \right\}$

$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \le x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ y \ge 0 \right\}$

1+1/30

d) M in coordinate sferiche

$M = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{3}{4}\pi\ \rho \le R,\ 0 \le \theta \le \pi \right\}$

1/30

Per il computo del volume V di M conviene lavorare in coordinate sferiche.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\!\!\int\!\!\int_M \rho^2 \sin\phi \ d\phi\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^2 \sin\phi \ d\phi\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} d\theta \ \int_0^R \rho^2 \ d\rho \ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin\phi \ d\phi \\
&= \pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R [-\cos\phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi R^3 .
\end{aligned}
$$

e)

$V = \int_0^{\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^2 \sin\phi \ d\phi\, d\rho\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi R^3$

3/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\!\!\int\!\!\int_M y\rho^2 \sin\phi \ d\phi\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^3 \sin\phi \sin\theta \sin\phi \ d\phi\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sin\theta \ d\theta \ \int_0^R \rho^3 \ d\rho \ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin^2\phi \ d\phi \\
&= [-\cos\theta]_0^{\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \left[\frac{\phi - \sin\phi\cos\phi}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= 2 \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi + 2}{4} \\
&= \frac{\pi + 2}{8} R^4 .
\end{aligned}
$$

f) $I = \int_0^{\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} y\rho^2 \sin\phi \; d\phi \, d\rho \, d\theta = \frac{\pi+2}{8} R^4$

5/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $z_b = 0$, e

$$y_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{\pi+2}{8} R^4}{\frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi\, R^3} = \frac{3\sqrt{2}}{16}\,\frac{\pi+2}{\pi}\,R\,.$$

g) $x_b = 0$ $\qquad y_b = \frac{I}{V} = \frac{3\sqrt{2}}{16}\,\frac{\pi+2}{\pi}\,R$ $\qquad z_b = 0$

2/30

Prova scritta di Matematica II - 6/9/2007 - FILA C

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 ortogonale al piano $4\,x - 3\,y = 0$ e contenente uno dei tre assi coordinati;

1.a.b. piano Π_2 costituito dai punti equidistanti da $(8, -6, 6)$ e $(0, 0, 0)$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alle sfere $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ e $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 + z^2 \leq 25$ nel loro unico punto di contatto;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Il vettore normale al piano Π_1 deve risultare ortogonale a $(4, -3, 0)$ ed è quindi della forma $(3, 4, c)$. Il piano Π_1, dovendo contenere l'origine (comune a tutti e 3 gli assi coordinati), ha quindi equazione $3\,x+4\,y+c\,z = 0$. Pertanto $c = 0$ e l'asse contenuto è necessariamente quello delle z (caratterizzato dalle equazioni $x = 0$ e $y = 0$). In conclusione, Π_1 risulta caratterizzato dall'equazione $3\,x+4\,y = 0$. $3\,x + 4\,y = 0$.

Il vettore $(8, -6, 6) - (0, 0, 0) = (8, -6, 6)$ risulta ortogonale al piano Π_2 che ha quindi equazione $4\,x - 3\,y + 3\,z = d$. Il valore di d risulta determinato dalla condizione di passaggio per il punto medio $\left(\frac{8+0}{2}, \frac{-6+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (4, -3, 3)$, ossia $d = (4, -3, 3) \cdot (4, -3, 3) = 34$.

Le sfere hanno centro in $C_1 = (0, 0, 0)$ e $C_2 = (8, 6, 0)$ rispettivamente. Entrambe le sfere hanno raggio $\sqrt{25} = 5$ e quindi, se hanno un unico punto di contatto, questo dovrà coincidere con il punto medio del segmento $\overline{C_1C_2}$, ossia $\left(\frac{0+8}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4, 3, 0)$. In effetti, dal teorema di Pitagora, e come da terna Pitagorica $3 - 4 - 5$, il punto $(4, 3, 0)$ dista 5 da entrambi i centri e resta così confermata la tangenza delle due sfere. Il piano Π_3 sarà ortogonale al raggio dall'origine verso il punto $(4, 3, 0)$ ed avrà equazione $(x, y, z) \cdot (4, 3, 0) = (4, 3, 0) \cdot (4, 3, 0)$ ossia $4\,x + 3\,y = 25$.

I piani Π_1 e Π_2 sono ortogonali, come evidenziato dall'annullamento del prodotto scalare $(3, 4, 0) \cdot (4, -3, 3) = 12 - 12 + 0 = 0$. Invece Π_3 è in relazione generica (nè ortogonale nè parallelo) sia con Π_1 che con Π_2. Vista l'ortogonalità tra Π_1 e Π_2, questa affermazione risulta verificata una volta verificato che Π_3 non è ortogonale nè a Π_1 nè a Π_2. In effetti, $(4, 3, 0) \cdot (3, 4, 0) = 24 \neq 0$ e $(4, 3, 0) \cdot (4, -3, 3) = 7 \neq 0$.

Π_1: $3\,x + 4\,y = 0$

Π_2: $4\,x - 3\,y + 3\,z = 34$

Π_3: $4\,x + 3\,y = 25$

Π_1 (H) Π_2 (G) Π_3 (G) Π_1

1+1+1+2/30

1.b. Sono dati i tre versori

$$u = \frac{(0, 3 + \alpha, 4 + \alpha)}{\sqrt{2\,\alpha^2 + 14\,\alpha + 25}} \qquad v = \frac{(3 + \alpha, 4 + \alpha, 0)}{\sqrt{2\,\alpha^2 + 14\,\alpha + 25}} \qquad w = \frac{(|4 + \alpha|, 0, |3 + \alpha|)}{\sqrt{2\,\alpha^2 + 14\,\alpha + 25}}.$$

Determinare i valori di α per cui:

1. u risulta definito; w risulta definito;
2. u e v sono ortogonali; v e w sono ortogonali;
3. u e v sono paralleli; v e w sono paralleli;
4. $u \cdot v \wedge w$ è massimo; $u \cdot v \wedge w$ è minimo.

1.) u risulta definito: $\forall\alpha \in \mathbb{R}$	w risulta definito: $\forall\alpha \in \mathbb{R}$
2.) u e v sono ortogonali: $\alpha \in \{-3, -4\}$	v e w sono ortogonali: $\alpha \in \{-3, -4\}$
3.) u e v sono paralleli: nessun α	v e w sono paralleli: nessun α
4.) $u \cdot v \wedge w$ è massimo: $\alpha = -4$	$u \cdot v \wedge w$ è minimo: $\alpha = -3$

1+1+1+1/30

Infatti:

1. la divisione di un vettore per uno scalare risulta definita se e solo se lo scalare è diverso da zero e $2\,\alpha^2 + 14\,\alpha + 25 > 0$ per ogni α (rappresenta infatti la lunghezza di un vettore che non è mai identicamente nullo);

2. due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare vale zero;
3. due vettori sono paralleli se e solo se il loro prodotto vettoriale è il vettore nullo;
4. l'area del parallelepipedo di spigoli di lunghezza unitaria vale massimo 1; quando i 3 versori sono mutualmente ortogonali (cubo) ed il prodotto triplo vale +1 (come nel caso di $\alpha = -4$, quando il prodotto vettoriale di due versori presi nell'ordine ci riconsegna il terzo) oppure -1 (come nel caso di $\alpha = -3$, quando il prodotto vettoriale di due versori presi nell'ordine ci riconsegna l'opposto del terzo).

1.c. Calcolare la distanza tra le due rette distinte R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $R_1(t) = (\sqrt{2},\, 2\pi t + 3,\, 1 - 2\pi t)$ e $R_2(s) = (\sqrt{2}\,s,\, 3s - \pi,\, \pi + s)$ e determinare se esse siano sghembe, incidenti, o coplanari.

Poichè $R_1(-1/2) = (\sqrt{2},\, 3 - \pi,\, \pi + 1) = R_2(1)$, allora le due rette distinte sono incidenti e quindi la loro distanza è nulla.

$d(R_1, R_2) = 0\,.$
le rette R_1 e R_2 sono incidenti 2+1/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R di equazione $R(t) = (3 + t, 5 - t, 0)$ ed il piano Π di equazione $\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = 3\sqrt{3}$ e determinare la relazione geometrica che sussiste tra R e Π.

Si noti che il vettore $(1, -1, 0)$, che di fatto esprime la direzione della retta R, è ortogonale al vettore normale al piano $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, poichè $(1, -1, 0) \cdot (1, 1, 1) = 1 - 1 + 0 = 0$. Quindi la retta è parallela al piano e per misurarne la distanza basterà misurare la distanza da Π di un qualsiasi punto di R. Scegliamo il punto $R(-3) = (0, 8, 0)$ ed utilizziamo la formula per la distanza punto/piano

$$d((x_0, y_0, z_0), \{(x, y, z) \;:\; a\,x + b\,y + c\,z = d)\}) = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,,$$

che nel nostro caso, dove il vettore normale al piano $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ è di fatto un versore (ossia è già normalizzato), si riduce al computo del grado di violazione dell'equazione del piano

$$d((1, -1, 0), \Pi) = |a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 - d| = \left|\frac{8}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{3}\right| = \left|\frac{8 - 9}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

$d(R, \Pi) = d((0, 8, 0), \Pi) = |\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \cdot (0, 8, 0) - 3\sqrt{3}| = \frac{\sqrt{3}}{3}$
la retta R ed il piano Π sono paralleli 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = 11\,xy + x^2(y + 6) - (x + 3\,y + 2)\,(y + 3)\,x\,.$

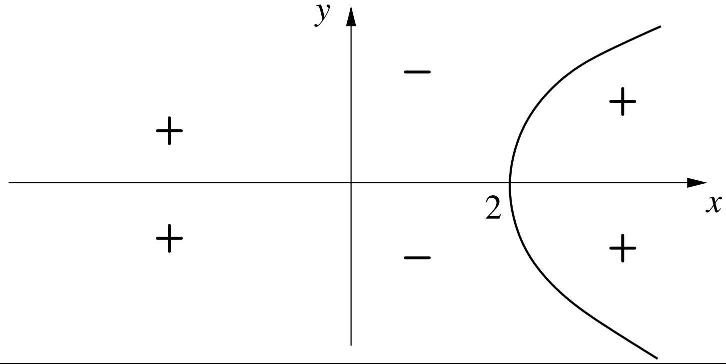
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della F tramite i soliti procedimenti algebrici appresi nella scuola dell'obbligo:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x\,(11\,y + xy + 6\,x - 3\,y^2 - 9\,y - xy - 3\,x - 2\,y - 6) = x\,(3\,x - 3\,y^2 - 6) \\ &= 3\,x\,(x - y^2 - 2)\,. \end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = 3\,x\,(x - y^2 - 2)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o $(x - y^2 - 2)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee x = y^2 + 2\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 2 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Nessuna di queste regioni è limitata.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = 3\,x\,(x-y^2-2)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial y} = 3\,(x-y^2-2)+3\,x = 3\,(2\,x-y^2-2)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial x} = -6\,xy$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,x - y^2 - 2 &= 0 \\ xy &= 0\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione segue che almeno uno tra x ed y deve esere nullo. Nel caso $y=0$, dalla prima equazione segue $x=1$. Nel caso $x=0$, la seconda equazione si rivela invece impossibile. Quindi il solo punto stazionario è il punto $(1,0)$, dove $F(1,0) = -3$. Poichè $F(1,1) = -6$ e $F(3,0) = 9$, allora, essendo la F in $\mathbf{C}^\infty$ e con un solo punto stazionario, il punto $(1,0)$ non può essere un estremo nemmeno in senso locale, ed è quindi punto di sella. Ciò poteva essere suffragato con l'analisi delle derivate seconde (vedi a pag.224 del testo). Siamo quindi chiamati ad osservare il segno del determinante della matrice Hessiana

$$\begin{bmatrix} F_{xx}(x,y) & F_{xh}(x,y) \\ F_{yx}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6\,y \\ -6\,y & -6\,x \end{bmatrix}$$

valutata nel punto critico $(1,0)$. Il segno di

$$Det\left(\begin{bmatrix} 6 & -6\,y \\ -6\,y & -6\,x \end{bmatrix}_{(1,0)}\right) = Det\left(\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\right) = -36$$

è negativo. Risulta confermato che $(1,0)$ è un punto di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

1 PUNTO STAZIONARIO: $(1,0)$.

Il punto stazionario $(1,0)$ è punto di sella.

3/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0,1,2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i, 0, F(i,0))$;

Chiaramente, il punto $(i,0,F(i,0))$ appartiene al grafico della F per definizione stessa del concetto di grafico di funzione. Prima di procedere tramite fredde formule conviene, come sempre, farsi un quadro di cosa ci si debba attendere. Poichè $(1,0)$ è punto stazionario, ci attendiamo che il piano tangente Π_1 sia ivi orrizzontale e quindi descritto dall'equazione $z = F(1,0) = -3$. Dallo studio del segno della F, la conformazione stessa di Σ_0 ci suggerisce che anche nei punti $(0,0)$ e $(2,0)$ il piano tangente non possa essere inclinato lungo l'asse delle y, ossia $F_y(i,0) := \frac{\partial F}{\partial y}(i,0) = -6\,xy\|_{(i,0)} = 0$. Un'ulteriore conferma di ció viene dall'osservare la simmetria $F(x,-y) = F(x,y)$. L'equazione del piano tangente (testo, pag. 192) si riduce pertanto a

$$z = z_0 + F_x(x_0,y_0)\,(x-x_0)\,,$$

ossia a $z = F(i,0) + F_x(i,0)\,(x-i)$. Ricordando ora che $F = 3\,x\,(x-y^2-2)$ e $F_x = 3\,(2\,x-y^2-2)$, per Π_0 otteniamo l'equazione $z = -6\,x$ e per Π_2 otteniamo l'equazione $z = -12 + 6\,x$.

Quanto ora trovato trova corrispondenza con le informazioni provenienti dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = -6\,x$ $\qquad$ Π_1: $z = -3$ $\qquad$ Π_2: $z = -12 + 6\,x$

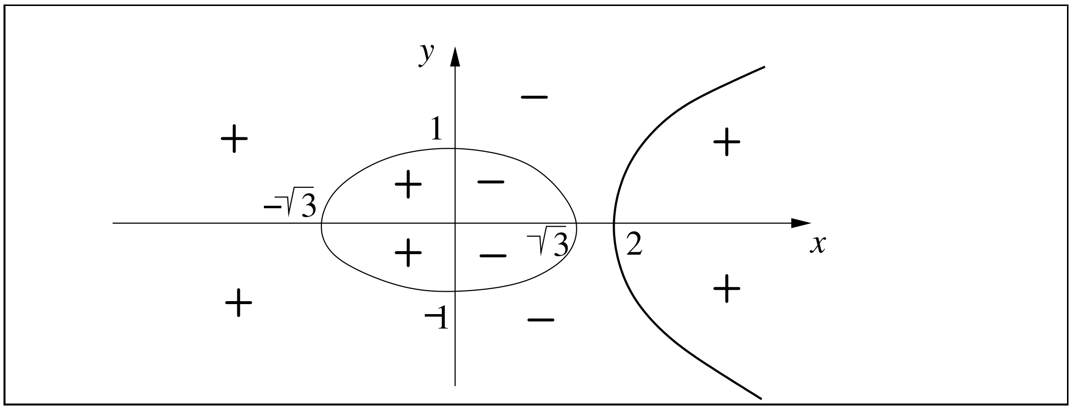
1+1+1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3\,y^2 \le 3\}$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è limitata e chiusa. Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto estremale, tutti i punti estremali della F sulla regione R saranno necessariamente situati sulla frontiera di R. Entra quindi in campo la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange. Impostiamo quindi il seguente sistema, dove $g(x, y) = x^2 + 3\,y^2$ e $g_x = 2\,x$ e $g_y = 6\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 3\,(2\,x - y^2 - 2) & = F_x = \lambda g_x & = & 2\,\lambda\,x \\ -6\,xy & = F_y = \lambda g_y & = & 6\,\lambda\,y \\ x^2 + 3\,y^2 & = g(x, y) & = & 3\,. \end{cases}$$

Nel districarsi tra queste equazione potrà sicuramente risultare d'aiuto, o quantomeno di conforto, l'essere consapevoli della simmetria per ribaltamento dell'asse delle y goduta sia da R che dalla F. Tale simmetria determinerà la geometria delle soluzioni da estrarsi. Inoltre, sempre per ambientare lo studio, converrà tracciare qualche schizzo, come ad esempio riportare la regione R sullo studio del segno.



La prima equazione conduce ad indagare separatamente i casi $y = 0$ (che significa sbarazzarsi di una variabile) e $y \neq 0$ (che conduce appunto ad una semplificazione nella seconda equazione).

Procedendo sotto l'assunzione $y \neq 0$, la seconda equazione si semplifica in $x = -\lambda$ che, sostituita nella prima equazione considerando anche $y^2 = 1 - \frac{1}{3}x^2$ (dalla terza equazione), conduce ad un'equazione di secondo grado nella sola x:

$$x^2 + 2\,x - 3 = 0\,,$$

con radici $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$. Per ciascuna di esse, $y^2 = 1 - \frac{1}{3}x^2$ segue dalla terza equazione e quindi, come da simmetria rispetto al ribaltamento dell'asse delle y, alla radice x_1 corrispondono i punti $(-3, \pm\sqrt{-2})$ mentre alla radice x_2 corrispondono i punti $\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. I punti $(-3, \pm\sqrt{-2})$ presentano coordinate immaginarie, e quindi possiamo ignorarli. Risultano invece di pertinenza i punti $\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ con $F\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -5$.

Il caso $y = 0$ risulta quindi di sicura importanza (quantomeno per stanare i massimi); e, a dire il vero, la rilevanza di questo caso risultava già evidente considerata la simmetria per ribaltamento dell'asse delle y menzionata sopra. Assumendo $y = 0$, dalla terza equazione otteniamo due soli punti: $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Quì, $F(\sqrt{3}, 0) = -3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$ e $F(-\sqrt{3}, 0) = 3\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$ e quindi $(-\sqrt{3}, 0)$ risulta essere il punto di massimo assoluto ricercato. Anche i punti $\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ possono ora essere confermati come punti di minimo assoluto su R visto che $F\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -5 < F(\sqrt{3}, 0)$. Per indagare la natura di $(\sqrt{3}, 0)$ occorre ricordare che il gradiente della F è disteso orrizzontalmente lungo tutti i punti dell'asse delle x e diviene quindi pertinente esaminare il segno di $F_x(\sqrt{3},0) = 3\,(2\sqrt{3}-2) > 0$. Risulta ora evidente che $(\sqrt{3},0)$ rappresenta un punto di massimo relativo.

2.d)

1 Max Assoluto: $(-\sqrt{3},0)$; $F(-\sqrt{3},0) = 3\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$

2 Min Assoluti: $\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $F\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -5$

1 Max Relativo: $(\sqrt{3},0)$; $F(\sqrt{3},0) = -3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$

6/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x,y) := \sqrt{3\,x\,(x-y^2-2)}$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$$D[h] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x\,(x-y^2-2) \geq 0\,\right\}$$

1/30

2.f. Determinare tutti i punti estremali di $h(x,y) = \sqrt{3\,x\,(x-y^2-2)}$ nella regione $R \cap D[h]$.

Poichè $h(x,y) = \sqrt{F(x,y)}$, e considerato che la funzione $\sqrt{\cdot}$ è monotona crescente, possiamo allora avvalerci dell'analogo studio per la funzione F. Si giunge alle seguenti conclusioni.

2.f)

1 Max Assoluto: $(-\sqrt{3},0)$; $h(-\sqrt{3},0) = \sqrt{3\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}$

Infiniti Min Assoluti: $(0,x)$, $-1 \leq x \leq 1$; $F(0,x) = 0$

1/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $|z| \leq |x| \leq R$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z. Sia S la sfera di centro l'origine e raggio R e sia S_{sup} la semisfera ottenuta intersecando S con il semispazio $z \geq 0$. Sia $Q_{sup} = M \cap S_{sup}$ e sia Q_{inf} l'intersezione tra M ed il semispazio $z \leq 0$. Infine, sia $Q = Q_{sup} \cup Q_{inf}$.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra);

3.b. Esprimere M e Q_{inf} in coordinate cilindriche;

3.c. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e Q_{sup} in coordinate sferiche;

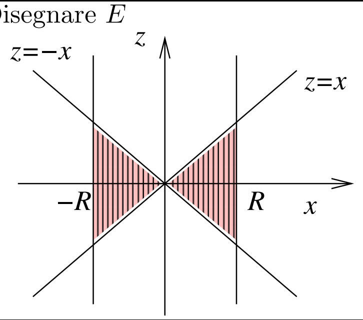
3.d. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.e. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z\; dx\,dy\,dz$;

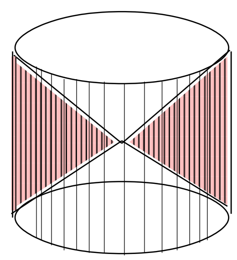
3.f. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E è l'intersezione tra la striscia verticale $|x| \leq R$ e la farfalla $|z| \leq |x|$. Rimandiamo alla correzione del tema del 28 settembre 2006 per maggiori dettagli su E ed M.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare M



1/30

b) M **e** Q_{inf} **in coordinate cilindriche**

$$M = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; |z| \leq \rho \leq R\,\right\}$$

$$Q_{inf} = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq -z \leq \rho \leq R\,\right\}$$

1+1/30

c) Q in coordinate Cartesiane e Q_{sup} in coordinate sferiche

$$Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z^2 \le x^2+y^2 \le R^2, \; z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\right\}$$

$$Q_{sup} = \left\{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 \; : \; 0 \le \rho \le R, \; \tfrac{\pi}{4} \le \phi \le \tfrac{\pi}{2}\,\right\}$$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q, conviene scomporre Q in Q_{sup} e Q_{inf} con l'intento di lavorare in coordinate sferiche sul primo e cilindriche sul secondo al fine di sfruttare al meglio le simmetrie in gioco.

$$\begin{aligned}
V &= \int\!\!\int\!\!\int_{Q_{sup}} \rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int\!\!\int\!\!\int_{Q_{inf}} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{-\rho}^0 \rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \; d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \; d\phi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho \int_{-\rho}^0 dz\, d\rho \\
&= 2\,\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R [-\cos\phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \int_0^R \rho^2 \; d\rho \\
&= \frac{2}{3}\,\pi\, R^3\, \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\,\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R = \frac{(2+\sqrt{2})}{3}\,\pi\, R^3\,.
\end{aligned}$$

d)

$$V = \int_{Q_{sup}} \rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_{Q_{inf}} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \tfrac{(2+\sqrt{2})}{3}\,\pi\, R^3$$

4/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$\begin{aligned}
I &= \int\!\!\int\!\!\int_{Q_{sup}} \rho\cos\phi\rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int\!\!\int\!\!\int_{Q_{inf}} z\cdot\rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \frac{\sin 2\,\phi}{2} \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{-\rho}^0 z\cdot\rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 \; d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\,\phi}{2} \; d\phi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho \int_{-\rho}^0 z \; dz\, d\rho \\
&= 2\,\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R \left[-\frac{\cos 2\,\phi}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\,\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^R \rho^3 \; d\rho \\
&= \frac{1}{2}\,\pi\, R^4\, \frac{1}{4} - \pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = -\frac{1}{4}\,\pi\, R^4\,.
\end{aligned}$$

e)

$$I = \int_{Q_{sup}} \rho\cos\phi\rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_{Q_{inf}} z\cdot\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = -\tfrac{1}{4}\,\pi\, R^4$$

4/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{-\frac{1}{4}\,\pi\, R^4}{\frac{(2+\sqrt{2})}{3}\,\pi\, R^3} = -\frac{3}{4\,(2+\sqrt{2})}\, R \;\cdot\; \frac{(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})} = -\frac{3\,(2-\sqrt{2})}{8}\, R\,.$$

f)

$x_b = 0$ $\qquad$ $y_b = 0$ $\qquad$ $z_b = \frac{I}{V} = -\frac{3\,(2-\sqrt{2})}{8}\, R$

2/30

Prova scritta di Matematica II - 27/6/2007 - FILA D
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 tangente nel punto $(3,4,0)$ alla sfera di raggio 5 e centro nell'origine;

1.a.b. piano Π_2 passante per $(3,4,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$;

1.a.c. piano Π_3 passante per $(3,4,0)$ e contente la retta $P(t) = (3\,t+3, 4\,t+4, 1)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Il piano Π_1 sarà ortogonale al raggio dall'origine verso il punto $(3,4,0)$ ed avrà equazione $(x,y,z)\cdot(3,4,0) = (3,4,0)\cdot(3,4,0)$ ossia $3\,x+4\,y = 25$.

Passando per l'origine, il piano Π_2 sarà descrivibile tramite un'equazione della forma $a\,x+b\,y+c\,z = 0$, dove possiamo assumere $c = 1$ in considerazione della dislocazione reciproca dei 3 punti di passaggio. A questo punto, la condizione del passaggio per $(0,1,1)$ impone $b = -1$, e quindi la condizione del passaggio per $(3,4,0)$ impone $a = 4/3$. Moltiplicando tutto per 3 otteniamo $4\,x-3\,y+3\,z = 0$. Consiglio sul piano metodologico: si ricontrolli il soddisfacimento sui tre punti per accertarsi della validità di questa equazione. Inoltre, valevole come verifica per l'equazione di Π_1, la nostra curiosità ci spinge ad immaginare che Π_2, dovendo contenere il raggio, sia ortogonale a Π_1, il che trova verifica nell'annullamento del prodotto scalare: $(3,4,0)\cdot(4,-3,0) = 12-12+0 = 0$.

Il piano Π_3 passante per $(3,4,0)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t+3, 4\,t+4, 1)$ contiene in particolare il punto $P(-1) = (0,0,1)$ ed è ortogonale al vettore $(3,4,0)\wedge[(0,0,1)-(3,4,0)] = (3,4,0)\wedge(0,0,1) = (4,-3,0)$. Infatti risultano coplanari ad esso sia il vettore $(3,4,0)$ che esprime la direzione della retta $P(t)$ contenuta in esso sia il vettore $(0,0,1)-(3,4,0)$ che esprime la posizione relativa tra due punti sempre in esso contenuti. Poichè $(4,-3,0)\cdot(0,0,1) = 0$, possiamo descrivere il piano Π_3 con l'equazione $4\,x-3\,y = 0$. (Si verifichi il passaggio per $(3,4,0)$ e per il generico punto $P(t)$).

I piani Π_3 e Π_1 sono ortogonali come denunciato dall'annullamento del prodotto scalare $(4,-3,0)\cdot(3,4,0) = 0$. Invece i piani Π_2 e Π_3 sono in posizione generica poichè i vettori $(4,-3,3)$ e $(4,-3,0)$ non sono nè ortogonali nè paralleli.

Π_1: $3\,x+4\,y = 25$	Π_1 (H) Π_2 (G) Π_3 (H) Π_1
Π_2: $4\,x-3\,y+3\,z = 0$	
Π_3: $4\,x-3\,y = 0$	1+1+1+2/30

1.b. Sono dati i tre versori

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha}(0,\alpha,\alpha) \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) \qquad w = \frac{1}{\sqrt{3\,\alpha^2-2\,\alpha+1}}(1-\alpha,\alpha,\alpha)\,.$$

1.b.a. Determinare i valori di α per cui:

1. u risulta definito; w risulta definito;
2. u e v sono ortogonali; v e w sono ortogonali;
3. u e v sono paralleli; v e w sono paralleli;
4. $u\cdot v$ è massimo; $v\cdot w$ è massimo.

1.) u risulta definito: $\forall\alpha \neq 0$	w risulta definito: $\forall\alpha\in\mathbb{R}$
2.) u e v sono ortogonali: nessun α	v e w sono ortogonali: $\alpha = 0$
3.) u e v sono paralleli: $\forall\alpha\neq 0$	v e w sono paralleli: $\alpha = 1$
4.) $u\cdot v$ è massimo: $\alpha > 0$	$v\cdot w$ è massimo: $\alpha = 1$ 1+1+1+1/30

Infatti:

1. la divisione di un vettore per uno scalare risulta definita se e solo se lo scalare è diverso da zero;
2. due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare vale zero;

3. due vettori sono paralleli se e solo se il loro prodotto vettoriale è il vettore nullo;
4. quando due versori sono paralleli il loro prodotto scalare è massimo (vale 1) purchè i versori abbiano lo stesso verso oltre che la stessa direzione.

1.b.b. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$$u \cdot v \wedge w = \frac{1}{2\sqrt{3\,\alpha^3 - 2\,\alpha^2 + \alpha}} \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 1-\alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = 0 \qquad (\forall \alpha \neq 0)$$

1/30

In effetti si era visto al punto precedente che i vettori u e v sono sempre paralleli, quindi torna.

1.c. Calcolare la distanza tra le due rette distinte R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = \sqrt{2}$, $y = \pi\, t + 3$, $z = 1 - \pi\, t$ e $x = 0$, $y = 3 + \sqrt{2} - s$, $z = 1 + s$ e determinare se esse siano sghembe, incidenti, o coplanari.

È evidente che le due rette sono parallele in quanto hanno direzione $(0, \pi, -\pi)$ e $(0, -1, 1)$ rispettivamente. (Di fatto risulta altresì evidente che R_1 trova una riscrittura parametrica più semplice come $x = \sqrt{2}$, $y = 3 - t$, $z = 1 + t$, ed a questo punto il parallellismo è, se possibile, ancora più evidente). Dal parallellismo disegue la coplanarità.

La direzione comune alle due rette è quella espressa dal versore $(0, -1, 1)/\sqrt{2}$. Un modo pratico di misurare la distanza tra R_1 ed R_2 è pertanto quello di prendere la norma del prodotto vettoriale tra il versore $(0, -1, 1)/\sqrt{2}$ ed un qualsiasi vettore spostamento da un punto di R_1 ad un punto di R_2. Come vettore spostamento risulta conveniente prendere $R_2(0) - R_1(0) = (0, 3 + \sqrt{2}, 1) - (\sqrt{2}, 3, 1) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ ottenendo

$$d(R_1, R_2) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \wedge (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \right| = |(0, -1, 1) \wedge (-1, 1, 0)| = |(-1, -1, -1)| = \sqrt{3}\,.$$

Resta così confermato che le due rette siano distinte.

$d(R_1, R_2) = \left|(0, -1, 1)/\sqrt{2} \wedge (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)\right| = |(-1, -1, -1)| = \sqrt{3}\,.$
le rette R_1 e R_2 sono coplanari 3+1/30

Un procedimento alternativo per il computo della distanza tra le due rette R_1 ed R_2 poteva essere quello di scegliere un qualsiasi punto di R_1, come $R_1(0) = (\sqrt{2}, 3, 1)$ e ricercare il punto di R_2 a minima distanza da esso minimizzando il funzionale $d(R_2(s), R_1(0))$ visto come funzione della sola variabile s. Di fatto, vista la monotonia della funzione radice, basta ricercare quel valore di s che minimizza il funzionale $(0 - \sqrt{2})^2 + ((3 + \sqrt{2} - s - 3)^2 + ((1 + s) - 1)^2$, ossia quello che minimizzi il funzionale $(\sqrt{2} - s)^2 + (s)^2 = 2 - 2\sqrt{2}\, s + 2\, s^2$. Il valore di s ricercato é $-\sqrt{2}/2$ e

$$d(R_1, R_2) = d(R_1(0), R_2(-\sqrt{2}/2)) = d((\sqrt{2}, 3, 1), (0, 3 + \sqrt{2}/2, 1 - \sqrt{2}/2)) = \sqrt{2 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{3}\,.$$

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R di equazione vettoriale $R(t) = (3 + t, 5 + t, t)$ ed il piano Π passante per l'origine ed ortogonale al versore $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$.

Si noti che $d(R(0), \Pi) = d\,(\Pi, (3, 5, 0)) = |(0, 1, 1) \cdot (3, 5, 0)| = 5$ mentre $d(R(1), \Pi) = d\,(\Pi, (4, 6, 1)) = |(0, 1, 1) \cdot (4, 6, 1)| = 7 \neq 5$. Pertanto R è incidente a Π e $d(R, \Pi) = 0$.

In effetti il vettore $(1, 1, 1)$ che di fatto esprime la direzione della retta R non è ortogonale al versore $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$.

$d(R, \Pi) = 0 \quad$ (R è incidente a Π)

2/30

2. È data la funzione $\quad F(x, y) = (x - y)^2 + x^2 y - (x^2 + y^2)\,.$

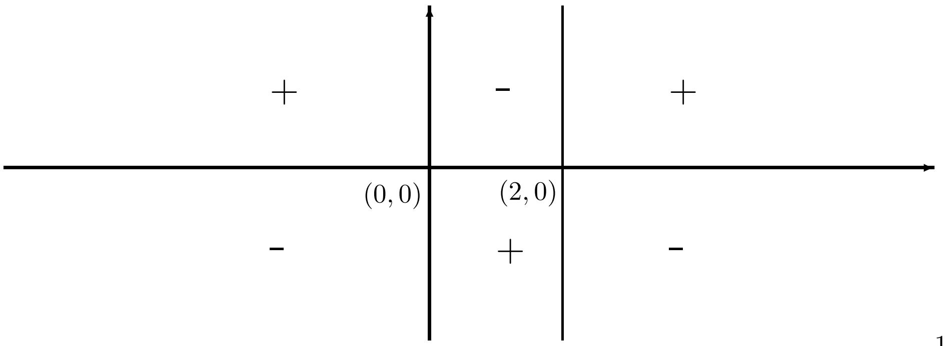
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della F tramite i soliti procedimenti algebrici appresi nella scuola dell'obbligo:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (x-y)^2 + x^2y - (x^2+y^2) = x^2 - 2\,xy + y^2 + x^2y - x^2 - y^2 = x^2y - 2\,xy \\ &= x(x-2)y\,. \end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = x(x-2)y$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o $(x-2)$ o y. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee x = \pm 2 \vee y = \pm 0\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 6 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Nessuna di queste regioni è limitata.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = x(x-2)y$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,(x-1)y$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x(x-2)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,(x-1)y = 0 \\ x(x-2) = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0,0)$ e $(2,0)$. Si noti che entrambi i punti stazionari appartengono a Σ_0 e risulta evidente dallo studio del segno di cui al punto precedente che entrambi sono punti di sella in quanto, per ciascuno di essi, la F assume sia valori positivi che valori negativi su un intorno comunque piccolo. A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde, solo impiegando più tempo, e rischiando possibili errori ma anche situazioni di non conclusività del test stesso.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

2 PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$ e $(2,0)$.

Entrambi i punti stazionari sono punti di sella.

3/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0,1,2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i,0,0)$;

In effetti, per $i = 0,1,2$, il punto $(i,0,0)$ appartiene al grafico della F poichè $F(i,0) = 0$. Possiamo quindi procedere. Poichè $(0,0)$ e $(2,0)$ sono punti stazionari, i piani Π_0 e Π_2 sono perfettamente orrizzontali, ed essendo entrambi disposti a quota 0 essi coincidono e sono descritti dall'equazione $z = 0$. A tale equazione si sarebbe pertanto pervenuti avvalendosi dell'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

che ora utilizziamo per ottenere l'equazione che descrive Π_1. In questo caso, la formula si instanzia come $z - F(1,0) = F_x(1,0)\,(x-1) + F_y(1,0)\,(y-0)$ ed otteniamo l'equazione $z = 0\,(x-1) - 1\,y$, che si semplifica in $z = -y$. Spostandoci lungo il segmento di Σ_0 che collega i due punti stazionari stiamo quindi camminando su un costone, ed in effetti, muovendoci da $(0,0)$ a $(2,0)$, il nostro sguardo domina una valle a sinistra ed ammira un promontorio a destra, come risultava dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = 0$ Π_1: $z = -y$ Π_2: $z = 0$ 1+1+1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 12\}$.
La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto estremale, tutti i punti estremali della F sulla regione R saranno necessariamente situati sulla frontiera di R, e pertanto il piano è di andarli a stanare con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ e $g_x = 2\,x - 2$ e $g_y = 2\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 2\,(x-1)y & = F_x = \lambda g_x & = & 2\,\lambda\,(x-1) \\ x(x-2) & = F_y = \lambda g_y & = & 2\,\lambda\, y \\ x^2 + y^2 - 2\,x & = g(x,y) & = & 12\,. \end{cases}$$

Poichè vogliamo ora guardare al di là dei punti stazionari (già investigati), possiamo di fatto assumere $\lambda \neq 0$. Nel massaggiare e combinare opportunamente le equazioni, meglio vederci, e vale pertanto la pena spendere l'osservazione preliminare che R altro non è che un cerchio con centro nel punto $(1, 0)$.
A questo punto non dovrebbe sorprendere che la prima equazione è soddisfatta in corrispondenza di $x = 1$, cui, dalla terza equazione, corrisponde $y = \pm\sqrt{13}$; a questo punto il soddisfacimento della seconda equazione è garantito dal fatto che possiamo ancora giocarci il valore di λ. Ed in effetti, considerata graficamente la cosa, risulta evidente che i poli sud e nord del cerchio siano punti estremali, con $F(1, \pm\sqrt{13}) = \mp\sqrt{13}$.
L'esclusione di queste due ovvie soluzioni conduce ad una semplificazione delle equazioni ottenuta assumendo $x \neq 1$. In effetti, se $x \neq 1$, allora la prima equazione si semplifica drammaticamente in $\lambda = y$, che, infornato nella seconda equazione porta a conludere che $2\,y^2 = x(x-2)$. Questa equazione combinata con la terza (per praticità, si moltiplichi la terza equazione per 2 ed in essa si sostituisca quindi $2\,y^2 = x(x-2)$) conduce ad un'equazione di secondo grado le cui radici sono $x = -2$ ed $x = 4$. A ciascuna di esse corrispondono 2 valori per y ($y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$) per un totale di 4 punti estremali dalle evidenti simmetrie. In effetti la F presenta le simmetrie $F(x, -y) = -F(x, y)$ (e si noti che R è simmetrica per ribaltamento rispetto all'asse delle x) e $F(1 + x, y) = F(1 - x, y)$ (e si noti che R è simmetrica per ribaltamento rispetto all'asse $x = 1$). Ora, $F(4, 2) = 16 > \sqrt{13}$ e pertanto questi quattro punti sono tutti estremi assoluti.

2.d)

2 Max Assoluti: $(-2, 2)$ e $(4, 2)$; $F(-2, 2) = F(4, 2) = 16$

2 Min Assoluti: $(-2, -2)$ e $(4, -2)$; $F(-2, -2) = F(4, -2) = -16$

1 Max Relativo: $(1, -\sqrt{13})$; $F(1, -\sqrt{13}) = \sqrt{13}$

1 Min Relativo: $(1, \sqrt{13})$; $F(1, \sqrt{13}) = -\sqrt{13}$ 6/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x, y) := \log_2 x(x-2)y$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$$D[h] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x(x-2)y > 0\ \right\}$$

1/30

2.f. Determinare tutti i punti massimali di $h(x, y) := \log_2 x(x-2)y$ nella regione $R \cap D[h]$.

Poichè $h(x, y) = \log_2 F(x, y)$, e considerato che la funzione $\log_b \cdot$ è monotona crescente per ogni base $b > 1$, possiamo allora avvalerci dell'analogo studio per la funzione F. Si giunge alle seguenti conclusioni.

2.f)

2 Max Assoluti: $(-2, 2)$ e $(4, 2)$; $h(-2, 2) = h(4, 2) = \log_2 16 = 4$

1 Max Relativo: $(0, -\sqrt{13})$; $h(0, -\sqrt{13}) = \log_2 \sqrt{13} = \frac{1}{2}\log_2 13$

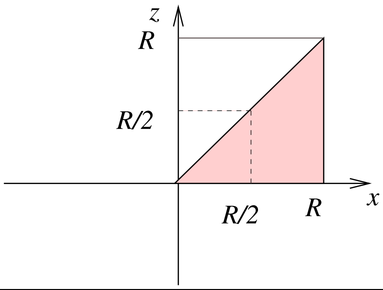
2/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $0 \leq z \leq x \leq R$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z. Sia Q l'intersezione tra M ed il piano $z = \frac{R}{2}$.

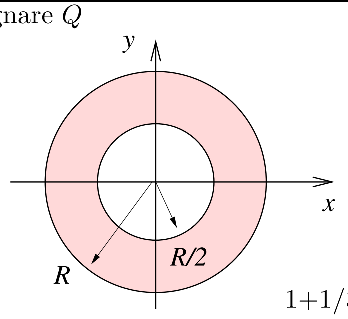
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);
3.b. Esprimere M e Q in coordinate cilindriche;
3.c. Esprimere Q in coordinate Cartesiane;
3.d. Calcolare il volume di M mediante integrazione;
3.e. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_M z\ dx\,dy\,dz$;
3.f. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di M;
3.g. Calcolare la superfice S di M.

La figura piana E è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,R)$ ed (R,R), ed è riportata qui sotto in figura. Quando ruotiamo la superfice E attorno all'asse delle z otteniamo un cilindro da cui è stato scavato fuori un cono con la punta rivolta verso il basso e toccante la base del cilindro. Cono e cilindro hanno lo stesso asse (l'asse delle zeta) e la base del cono coincide con la base superiore del cilindro. (Si veda in figura). Intersecando M con il piano orrizzontale $z = \frac{R}{2}$ si ottiene un disco bucato Q, come quando il pistolero centra perfettamente la moneta da un dollaro. Il dollaro aveva raggio R mentre la pallottola doveva probabilmente avere raggio $\frac{R}{2}$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1+1/30

b) coordinate cilindriche

$$M = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \leq z \leq \rho \leq R\ \right\}$$

$$Q = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = \tfrac{R}{2},\ \tfrac{R}{2} \leq \rho \leq R\ \right\}$$

1+1/30

c) coordinate Cartesiane

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = \tfrac{R}{2},\ \tfrac{R^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq R^2\ \right\}$$

1/30

Vista la simmetria cilindrica di M, per il computo del volume V di M conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\rho 1\cdot\rho\ dz\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2\ d\rho \\ &= 2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R \\ &= \frac{2}{3}\,\pi\,R^3\,. \end{aligned}$$

d)

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\rho \rho\ dz\,d\rho\,d\theta = 2\pi\int_0^R \rho^2\ d\rho = \tfrac{2}{3}\,\pi\,R^3$$

3/30

Il computo di I può essere impostato allo stesso modo.

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\rho z\cdot\rho\ dz\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho^3}{2}\ d\rho$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \left[\frac{\rho^4}{8}\right]_0^R \\
&= \frac{1}{4}\,\pi\,R^4\,.
\end{aligned}
$$

e)
$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{\rho} z\cdot\rho\ dz\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{4}\,\pi\,R^4$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{1}{4}\,\pi\,R^4}{\frac{2}{3}\,\pi\,R^3} = \frac{3}{8}\,R\,.$$

f)
$x_b = 0$ $\quad y_b = 0$ $\quad z_b = \frac{I}{V} = \frac{3}{8}\,R$

2/30

La superfice di M andava scomposta nella superfice della base inferiore del cilindro ($\pi\,R^2$) più la superfice della parete laterale del cilindro ($2\,\pi\,R^2$) più la superfice del cono ($\sqrt{2}\,\pi R^2$). La superfice sul cono poteva essere facilmente calcolata sulla base dell'osservazione che essa non cambia se lo taglio lungo un qualsiasi segmento che vada dal vertice del cono ad un punto della circonferenza su cui il cono poggia, e se poi lo spiano ottenendo un settore di circonferenza. La lunghezza del segmento su cui ho tagliato è chiamata altezza obliqua del cono, e nel nostro caso vale $\sqrt{R^2+R^2} = \sqrt{2}R$ ma è comunque sempre ottenibile tramite il teorema di Pitagora. L'area di un settore di circonferenza di raggio ρ e lungo ℓ vale $\frac{\rho\ell}{2}$. In conclusione, la superfice del nostro cono vale effettivamente $\frac{(\sqrt{2}R)(2\pi R)}{2} = \sqrt{2}\,\pi R^2$. La superfice di M vale $\pi\,R^2 + 2\,\pi\,R^2 + \sqrt{2}\,\pi R^2 = (3+\sqrt{2})\pi\,R^2$.

g)
$S = \pi\,R^2 + 2\,\pi\,R^2 + \sqrt{2}\,\pi R^2 = (3+\sqrt{2})\pi\,R^2$

2/30

Prova scritta di Matematica II - 18/4/2007 - FILA D

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per $(1, -1, 1)$ e ortogonale a $(3, 2, 0)$;

1.a.b. piano Π_2 passante per $(0, -3, 3)$, $(12, 0, 0)$, $(3, -6, 0)$;

1.a.c. piano Π_3 passante per $(3, 1, 1)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t + 1, 2\,t - 2, 0)$.

1.a.d. quale relazione geometrica osserviamo tra i piani Π_1, Π_2 e Π_3? Sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Il piano Π_1 passante per $(1, -1, 1)$ e ortogonale a $(3, 2, 0)$ avrà equazione $(x, y, z) \cdot (3, 2, 0) = (1, -1, 1) \cdot (3, 2, 0)$ ossia $3\,x + 2\,y = 1$.
Assumiamo che il piano Π_2 sia descrivibile tramite un'equazione della forma $a\,x + b\,y + c\,z = 1$. La condizione del passaggio per $(12, 0, 0)$ impone $a = 1/12$, a questo punto la condizione del passaggio per $(3, -6, 0)$ impone $b = -1/8$, ed infine la condizione del passaggio per $(0, -3, 3)$ impone $c = 5/24$. Moltiplicando tutto per 8 otteniamo $2\,x - 3\,y + 5\,z = 24$. Tale equazione va poi verificata ricontrollandone il soddisfacimento sui tre punti.
Il piano Π_3 passante per $(3, 1, 1)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t + 1, 2\,t - 2, 0)$ contiene in particolare il punto $P(1) = (4, 0, 0)$ ed è ortogonale al vettore $(3, 2, 0) \wedge [(3, 1, 1) - (4, 0, 0)] = (3, 2, 0) \wedge (-1, 1, 1) = (2, -3, 5)$ in quanto il vettore $(3, 2, 0)$ esprime la direzione della retta $P(t)$. Poichè $(2, -3, 5) \cdot (4, 0, 0) = 8$, possiamo descrivere il piano Π_3 con l'equazione $2\,x - 3\,y + 5\,z = 8$.
I piani Π_2 e Π_3 sono paralleli in quanto entrambi ortogonali al vettore $(2, -3, 5)$. Il piano Π_1 è ortogonale a questi in quanto il suo vettore di coefficienti direttori risulta ortogonale a questa direzione: $(3, 2, 0) \cdot (2, -3, 5) = 6 - 6 = 0$.

Π_1: $3\,\mathrm{x} + 2\,\mathrm{y} = 1$	Π_1 (H) Π_2 (P) Π_3 (H) Π_1
Π_2: $2\,\mathrm{x} - 3\,\mathrm{y} + 5\,\mathrm{z} = 24$	
Π_3: $2\,\mathrm{x} - 3\,\mathrm{y} + 5\,\mathrm{z} = 8$	1+1+1+2/30

1.b. Siano dati i tre vettori

$$u = (1, 2, 0) \qquad v = (\alpha - 1, 2\,\alpha - 2, 2 - 2\,\alpha) \qquad w = (2, 0, 1)\,.$$

1.b.a. Determinare i valori di α per cui:

1. u e v sono ortogonali; oppure v e w sono ortogonali;
2. u e v sono paralleli; oppure v e w sono paralleli.

1.) u e v sono ortogonali: $\alpha = 1$	v e w sono ortogonali: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
2.) u e v sono paralleli: $\alpha = 1$	v e w sono paralleli: $\alpha = 1$
	1+1/30

1.b.b. Calcolare $u \cdot v \wedge w$ e dire per quali valori di α $u \cdot v \wedge w$ risulta negativo.

$$u \cdot v \wedge w = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \alpha - 1 & 2\,\alpha - 2 & 2 - 2\,\alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{1\,(2\,\alpha - 2)\,1}_{2\,(\alpha - 1)} + \underbrace{2\,(2 - 2\,\alpha)\,2}_{+\,8(1-\alpha)} - \underbrace{2\,(\alpha - 1)\,1}_{2\,(\alpha-1)} = 8\,(1 - \alpha)$$

$u \cdot v \wedge w < 0$ per $\alpha > 1$ 1+1/30

In effetti $8\,(1 - \alpha)$ si annulla per $\alpha = 1$, dove due dei tre vettori sono paralleli. Questa verifica ci rassicura. Infatti, poichè $u \cdot v \wedge w$ varia con continuità al variare di α, allora $\alpha = 1$ è l'unico possibile valore di soglia in corrispondenza del quale $u \cdot v \wedge w$ può registrare una variazione di segno.

1.c. Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = 5$, $y = 1$, $z = 2\sqrt{3}\,t + 11\sqrt{\pi - 3}$ e $x = -7 - 561\sqrt{\pi + 2}\,s$, $y = 561\sqrt{\pi + 2}\,s$, $z = 1$.

Il più corto segmento che congiunge R_1 ed R_2 sarà ortogonale ad entrambe ossia parallelo al vettore $(0,0,1) \wedge (1,-1,0) = (1,1,0)$, che è un vettore di lunghezza $\sqrt{2}$. Pertanto, dove $(5,1,0)$ è un qualsiasi punto della retta R_1 e $(-7,0,1)$ è un qualsiasi punto della retta R_2, allora la distanza tra R_1 ed R_2 è data da $\frac{1}{\sqrt{2}}|(1,1,0)\cdot(5,1,0)-(1,1,0)\cdot(-7,0,1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}|(1,1,0)\cdot(12,1,-1)| = 13\frac{\sqrt{2}}{2}$.

In effetti la retta R_1 è contenuta nel piano $\Pi_1 :\ x+y = 6$ mentre la retta R_2 è contenuta nel piano $\Pi_2 :\ x+y = -7$, dove la distanza tra Π_1 e Π_2 è appunto $13\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il fatto che le due rette siano sghembe implica a questo punto che la loro distanza sia pari alla distanza tra Π_1 e Π_2.

$d(R_1, R_2) = d(\Pi_1, \Pi_2) = 13\frac{\sqrt{2}}{2}$
dove i piani $\Pi_1 :\ x+y = 6$ e $\Pi_2 :\ x+y = -7$ contengono R_1 e R_2 risp. 4/30

1.d. Calcolare la distanza tra il punto $P = (2,3,4)$ ed il piano Π passante per l'origine ed ortogonale al vettore $(0,1,1)$.

Chiaramente, $||(0,1,1)|| = \sqrt{2}$. Pertanto la distanza ricercata vale $\frac{1}{\sqrt{2}}|(2,3,4)\cdot(0,1,1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}7$.

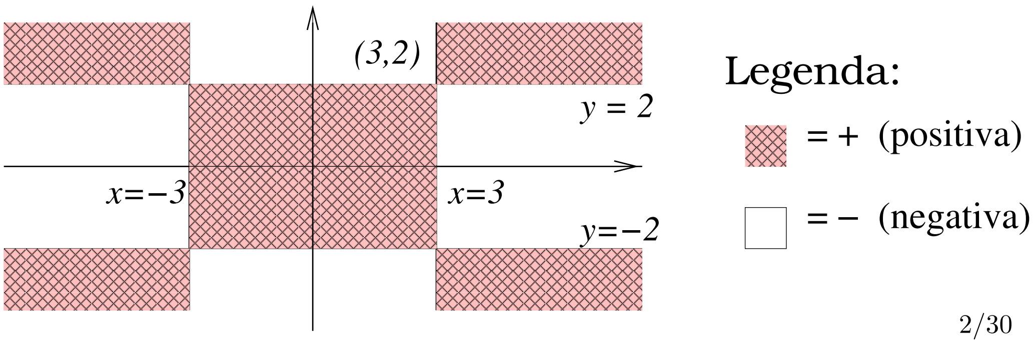
$d(P,\Pi) = \frac{|(2,3,4)\cdot(0,1,1)|}{||(0,1,1)||} = 7\frac{\sqrt{2}}{2}$
2/30

2. È data la funzione $\quad F(x,y) = (x-4)(xy^2 - 4\,x + 3\,y^2 - 12) - 12 + y^2(x+3) - 4\,x\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno si riduce alla comprensione di Σ_0. Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = (x-4)(xy^2 - 4\,x + 3\,y^2 - 12) - 12 + y^2(x+3) - 4\,x = (x^2-9)(y^2-4)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o (x^2-9) o (y^2-4). Spingendo un gradino oltre, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 3 \vee y = \pm 3\ \}$ ed il piano resta suddiviso nelle 9 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Di queste regioni, una sola è limitata (quella centrale).

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = (x^2-9)(y^2-4)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,x(y^2-4)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,y(x^2-9)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,x(y^2-4) &= 0 \\ 2\,y(x^2-9) &= 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0,0)$ e ciascuno dei quattro punti $(\pm 3, \pm 2)$. Si noti che $F(\pm 3, \pm 2) = 0$, e che i punti $(\pm 3, \pm 2)$ sono tutti e quattro punti di sella per quanto visto allo studio del segno. Il punto $(0,0)$ deve invece essere un punto di massimo in quanto esso cade nella regione limitata a compatta centrale la quale deve necessariamente avere punti di massimo (e di minimo, ma i minimi sono tutti e soli i punti della frontiera di detta regione). A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde, ma avreste perso più tempo e rischiato possibili errori.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$ più i 4 punti $(\pm 3, \pm 2)$.

I punti $(\pm 3, \pm 2)$ sono tutti e quattro punti di sella.

Il punto $(0,0)$ è punto di massimo. 4/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1,1,24)$;

In effetti il punto $(1,1,24)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1,1) = 24$. Possiamo quindi procedere. Poichè le derivate parziali $F_x = 2\,x(y^2-4)$ e $F_y = 2\,y(x^2-9)$ esistono e sono continue in un intorno di $(1,1)$, la F è differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto può essere considerato come l'approssimazione lineare della F nell'intorno del punto $(1,1)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1,1) = F_x(1,1)\,(x-1) + F_y(1,1)\,(y-1)$ ed otteniamo l'equazione $z - 24 = -6\,(x-1) - 16\,(y-1)$, che si semplifica in $6\,x + 16\,y + z = 46$. A titolo di verifica, si noti come in effetti il punto $(1,1,24)$ appartenga a tale piano.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1,1,24)$:

$$6\,x + 16\,y + z = 46$$

2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto di minimo, i minimi della F saranno necessariamente situati sulla frontiera, e pertanto investighiamo eventuali estremi sulla frontiera impiegando la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x,y) = x^2 + y^2$ e $g_x = 2\,x$ e $g_y = 2\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 2\,x(y^2-4) & = F_x = \lambda g_x = & 2\,\lambda\,x \\ 2\,y(x^2-9) & = F_y = \lambda g_y = & 2\,\lambda\,y \\ \quad x^2+y^2 & = g(x,y) = & 25\,. \end{cases}$$

Poichè vogliamo ora guardare al di là dei punti stazionari (già investigati), possiamo allora assumere $\lambda \neq 0$. Per incominciare, si assuma $x, y \neq 0$. In questo caso si hanno delle ovvie semplificazioni e $(x^2-9) = (y^2-4)$ segue combinando le prime due equazioni semplificate. Combinando ora con la terza equazione otteniamo $(x^2-9) = (y^2-4) = 25 - x^2 - 4$ da cui $2\,x^2 = 30$. Quindi $x = \pm\sqrt{15}$ e $y = \pm\sqrt{25-15} = \pm\sqrt{10}$. Tutte e quattro le possibilità sono di interesse e ciò suggerisce (nel volerle catalogare) di guardare alla simmetrie della F, che in effetti è pari sia rispetto alla x (ossia $F(-x,y) = F(x,y)$) che rispetto alla y (ossia $F(x,-y) = F(x,y)$). Ora, $F(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10}) = 36$, e quindi questi quattro punti, così come anche l'origine stessa, sono punti di massimo assoluto sulla regione R in quanto, per magica coincidenza, $F(0,0) = 36 = F(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10})$. Ma non abbiamo ancora scovato i minimi. Evidentemente dobbiamo andare a cercare fuori dall'assunzione $x, y \neq 0$ sopra presa per comodità. Ora, se $x = 0$, allora $y = \pm 5$ segue dalla terza equazione. Analogamente, se $y = 0$ allora $x = \pm 5$. Questa volta $F(\pm 5, 0) = -4 \cdot 16 = -64$ e $F(0, \pm 5) = -9 \cdot 21 = -189 < 64$, quindi $(0, \pm 5)$ è minimo assoluto mentre $(\pm 5, 0)$ è minimo relativo su R.

2.d)

2 MIN ASSOLUTI: $(0, \pm 5)$, ; $F(0, \pm 5) = -189$

2 MIN RELATIVI: $(\pm 5, 0)$, ; $F(\pm 5, 0) = -64$

5 MAX ASSOLUTI: $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10})$; $F(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10}) = F(0,0) = 36$

6/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x,y) := \sqrt{49\,(x^2-9)(y^2-4)}$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$$D[h] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x^2-9)(y^2-4) \geq 0 \right\}$$

1/30

2.f. Determinare tutti i punti estremali di $h(x,y) = \sqrt{49\,(x^2-9)(y^2-4)}$ nella regione $R \cap D[h]$.

Osservato che $h(x,y) = \sqrt{49\,F(x,y)}$, e considerato che la funzione $\sqrt{\cdot}$ è monotona, possiamo allora avvalerci dell'analogo studio per la funzione F. Si giunge alle seguenti conclusioni.

2.f)

Infiniti Minimi Assoluti dove $h(x,y) = 0$: ogni punto in $\Sigma_0 \cap R$

5 Max Ass: $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10})$; $F(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10}) = F(0,0) = \sqrt{49 \cdot 36} = 42$

2/30

3. Sia $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ x^2+y^2+z^2-8\,y+15 \leq 0\}$. Sia M_E il solido che si ottiene facendo ruotare E attorno all'asse delle z. Sia R l'intersezione tra M_E ed il piano $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che R (sulla destra);

3.b. Esprimere M_E ed R in coordinate cilindriche;

3.c. Esprimere R in coordinate Cartesiane;

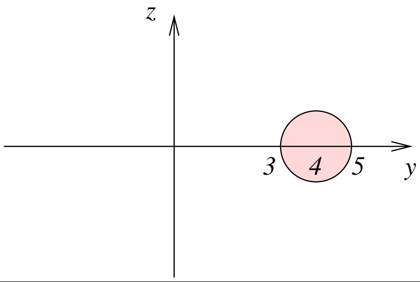
3.d. Calcolare il volume di M_E mediante integrazione;

3.e. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_{M_E} z + x + xy\ dx\,dy\,dz$;

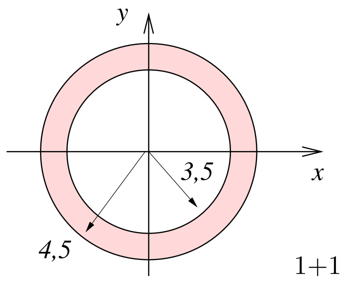
3.f. Calcolare la superfice S di R.

Quando intersechiamo la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8\,y + 15 \leq 0$ con il piano $x = 0$ otteniamo un disco $y^2 + z^2 - 8\,y + 15 \leq 0$. Esso trova una più trasparente scrittura come $(y-4)^2 + z^2 \leq 1$. Questa riscrittura indica chiaramente il raggio e le coordinate del centro, ed è stata ottenuta con la tecnica del completamento al quadrato. Questo disco ormai completamente compreso è E, ed è illustrato in figura. Se noi ruotiamo la superfice E attorno all'asse delle z otteniamo una ciambella come solido di rotazione. Nel gergo matematico questa ciambella è chiamata *toro*. I punti più alti della ciambella hanno quota $z = 1$ e sono disposti lungo una circonferenza di raggio 2. Quando si interseca la ciambella con il piano $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si ottiene un disco bucato (R, il buco con la menta intorno). Una fotografia (scattata da Hubble) di questo anello di Saturno R è riportata nella figura, sulla destra. Il bordo esterno dell'anello ha raggio $4,5$ mentre il bordo del buco interno ad esso ha raggio $3,5$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare R



1+1/30

b) coordinate cilindriche

$$M_E = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z^2 \leq 1-(\rho-4)^2\ \right\}$$

$$R = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ \tfrac{7}{2} \leq \rho \leq \tfrac{9}{2}, z = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ \right\}$$

1+1/30

c) coordinate Cartesiane

$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = 1,\ \tfrac{49}{4} \leq x^2+y^2 \leq \tfrac{81}{4}\ \right\}$$

1/30

Vista la simmetria cilindrica di M_E, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate polari ed osservare che precisamente metà del volume di M_E galleggia al di sopra del piano $z = 0$. Così il computo del volume V di M può essere condotto come segue.

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_3^5 \sqrt{1-(\rho-4)^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,(t+4)\ dt$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\,\pi\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,t\;dt+4\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\;\;dt\right)\\
&= 4\,\pi\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\;dt^2+4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cos\alpha\;\;d\alpha\right)\\
&= 4\,\pi\left(\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}+4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\alpha}\cos\alpha\;\;d\alpha\right)\\
&= 4\,\pi\left(\frac{1}{3}\left[(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{-1}+4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha\;\;d\alpha\right)\\
&= 4\,\pi\left(0+4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}+\cos 2\,\alpha\;\;d\alpha\right)\\
&= 16\,\pi\left[\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\,\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=8\,\pi\,\left[\alpha+\sin 2\,\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=8\,\pi\,(\pi+0)=8\,\pi^2\,.
\end{aligned}
$$

d)

$V=2\int_0^{2\pi}\int_3^5\sqrt{1-(\rho-4)^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta=8\,\pi^2$

4/30

Per il computo di I conviene scomporre $I=\int_{M_E} z+x+xy\ dV$ come $\int_{M_E} z\ dV+\int_{M_E} x+xy\ dV$ ed osservare che il solido M_E gode delle seguenti simmetrie:

1. $(x,y,z)\in M_E$ se e solo se $(x,y,-z)\in M_E$, da cui segue $\int_{M_E} z\ dV=0$.
2. $(x,y,z)\in M_E$ se e solo se $(-x,y,z)\in M_E$, da cui segue $\int_{M_E} x+xy\ dV=0$.

e)

$I=\int_{M_E} z\ dV+\int_{M_E} x+xy\ dV=0+0=0$

3/30

Per il computo della superfice S di R conviene ottenerla come differenza tra le superfici dei cerchi di raggio $\frac{9}{2}$ e $\frac{7}{2}$, ossia $S=\pi\left(\frac{9^2-7^2}{2^2}\right)=8\,\pi$.

f)

$S=\pi\left(\frac{9^2-7^2}{2^2}\right)=8\,\pi$

2/30

Prova scritta di Matematica II - 29/03/2007 - FILA B
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per $(1,1,1)$ e ortogonale a $(2,-3,5)$;

1.a.b. piano Π_2 passante per $(0,-1,1)$, $(4,0,0)$, $(1,-2,0)$;

1.a.c. piano Π_3 passante per $(5,1,1)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t + 3, 2\,t - 2, 0)$.

1.a.d. quale relazione geometrica osserviamo tra i piani Π_1, Π_2 e Π_3?

Il piano Π_1 passante per $(1,1,1)$ e ortogonale a $(2,-3,5)$ avrà equazione $(x,y,z)\cdot(2,-3,5) = (1,1,1)\cdot(2,-3,5)$ ossia $2\,x - 3\,y + 5\,z = 4$.
Assumiamo che il piano Π_2 sia descrivibile tramite un'equazione della forma $a\,x + b\,y + c\,z = 1$. La condizione del passaggio per $(4,0,0)$ impone $a = 1/4$, a questo punto la condizione del passaggio per $(1,-2,0)$ impone $b = -3/8$, ed infine la condizione del passaggio per $(0,-1,1)$ impone $c = 5/8$. Moltiplicando tutto per 8 otteniamo $2\,x - 3\,y + 5\,z = 8$.
Il piano Π_3 passante per $(5,1,1)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t+3, 2\,t-2, 0)$ contiene in particolare i punti $P(1) = (6,0,0)$ e $P(-1) = (0,-4,0)$ ed è ortogonale al vettore $(3,2,0)\wedge[(5,1,1)-(0,-4,0)] = (3,2,0)\wedge(5,5,1) = (2,-3,5)$ in quanto il vettore $(3,2,0)$ esprime la direzione della retta $P(t)$, contenuta nel piano. Poichè $(2,-3,5)\cdot(6,0,0) = 12$, possiamo descrivere il piano Π_3 con l'equazione $2\,x - 3\,y + 5\,z = 12$.

Π_1:2 x -3 y +5 z = 4	i tre piani Π_1, Π_2 e Π_3
Π_2:2 x -3 y +5 z = 8	sono PARALLELI
Π_3:2 x -3 y +5 z = 12	1+1+1+1/30

Un metodo alternativo per la determinazione di Π_3 poteva essere quello di ottenere 2 piani la cui intersezione individuasse la retta $P(t)$, e da essi, tramite l'introduzione di un parametro α, ottenere la famiglia dei piani contenenti la retta $P(t)$; infine, determinare il valore di α con la condizione di passaggio per il punto $(5,1,1)$. Questa strada é piú lunga ma vi consiglio comunque, in fase di preparazione al tema, al provare strade ed approcci diversi ad uno stesso esercizio. Sarebbe riduttivo dover fare affidamento su un metodo, quando invece i metodi sono nostre creature e molto abbiamo da imparare dal confrontarli ed analizzarli mettendone in evidenza vantaggi, svantaggi ed aspetti comuni, arrivando infine a denudarne gli aspetti essenziali come distillati dalle necessitá della parete da arrampicare, natura stessa del problema da risolvere. I soli veri matematici siamo noi e l'esame va inteso come un'utile occasione per dedicare del tempo a questi giochi formativi.

1.b. In un riferimento Cartesiano x,y,z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (1,2,0) \qquad Q = v = (0,1,2) \qquad T = w = (2,0,1)\,.$$

1.b.a. Calcolare $u\cdot v\wedge w$.

$$u\cdot v\wedge w = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{1\cdot 1\cdot 1}_{1} + \underbrace{2\cdot 2\cdot 2}_{+8} + \underbrace{0\cdot 0\cdot 0}_{0} - 0 - 0 - 0 = 9$$

1/30

1.b.b. Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.
L'area del triangolo è metà dell'area del parallelogramma di lati $\vec{PQ} = (0,1,2)-(1,2,0) = (-1,-1,2)$ e $\vec{PT} = (2,0,1)-(1,2,0) = (1,-2,1)$, ossia metà della lunghezza del vettore $\vec{PQ}\wedge\vec{PT} = (-1,-1,2)\wedge(1,-2,1) = (3,3,3)$. In effetti $(3,3,3)$ è ortogonale (= prodotto scalare nullo) sia a $(-1,-1,2)$ che a $(1,-2,1)$ il che mi vale come prova del nove per il prodotto vettoriale computato. Pertanto, $Area(PQT) = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2+3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

$$\text{Area}(PQT) = \tfrac{1}{2}||\vec{PQ}\wedge\vec{PT}|| = \tfrac{1}{2}||(3,3,3)|| = \tfrac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2+3^2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{3}$$

1/30

1.b.c. Determinare la distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q e la distanza di P dalla retta r_{QT} passante per Q e T.

La distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q corrisponde all'altezza del triangolo PQT rispetto alla base $\overline{PQ}$. Conviene avvalersi di quanto calcolato al punto precedente.

$$d(T, r_{PQ}) = \frac{2 \cdot \text{Area}(PQT)}{||\vec{PQ}||} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \qquad d(P, r_{QT}) = \frac{3\sqrt{3}}{||(2,-1,-1)||} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

1+1/30

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $P = (0,0,1)$ e la retta R di equazioni $z = 2 - y$ e $z = 2 - x$. Esprimere R in forma parametrica.

Conviene innanzittutto esprimere R in forma parametrica. Prendendo $z = t$ si perviene alla seguente scrittura in forma parametrica.

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

Ora che il generico punto $R(t)$ di R è espresso in dipendenza di un singolo parametro t, possiamo minimizzare $d(P, R(t)) = \sqrt{((2-t)-0)^2 + ((2-t)-0)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{3t^2 - 10t + 9}$. che equivale a minimizzare il funzionale $g(t) = 3t^2 - 10t + 9$ dacchè la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è monotona crescente. Il minimo si ha per $t = \frac{5}{3}$ come si può evidenziare imponendo $0 = g'(t) = 6t - 10$. Il punto di R che minimizza $g(t)$ è pertanto $Q = (1/3, 1/3, 5/3)$. Mentre $g(5/3) = \frac{2}{3}$ A questo punto, $d(P, R) = d(P, Q) = \sqrt{g(5/3)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Una strada alternativa avrebbe potuto essere la seguente. Si scelgono 2 punti qualsiasi della retta R, come ad esempio i punti $A = (0,0,2)$ e $B = (1,1,1)$, e si ottengono i vettori $\vec{PA} = (0,0,1)$ e $\vec{PB} = (1,1,0)$. A questo punto si calcola l'area del triangolo ABP come $\text{Area}(ABP) = \frac{1}{2}||\vec{PA} \wedge \vec{PB}|| = \frac{1}{2}||(-1,1,0)|| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Infine, osservando che $d(P, R)$ misura l'altezza del triangolo ABP rispetto alla base AB, ed osservando che la lunghezza di tale base è pari a $\sqrt{3}$, otteniamo $d(P, R) = \frac{2\,\text{Area}(ABP)}{|AB|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$R : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \qquad d(P, R) = \sqrt{3\,(5/3)^2 - 10\,(5/3) + 9} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3/30

1.d. Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = 1$, $y = 1$, $z = 2t$ e $x = -1$, $y = 165\sqrt{2}\,s + \sqrt{3}$, $z = 1$.

Il più corto segmento che congiunge R_1 ed R_2 sarà ortogonale ad entrambe ossia parallelo al vettore $(0,0,1) \wedge (0,1,0) = (-1,0,0)$, che è un versore (ossia ha lunghezza unitaria). Pertanto, dove $(1,1,0)$ è un qualsiasi punto della retta R_1 e $(-1,0,1)$ è un qualsiasi punto della retta R_2, allora la distanza tra R_1 ed R_2 è data da $|(-1,0,0) \cdot (1,1,0) - (-1,0,0) \cdot (-1,0,1)| = |(-1,0,0) \cdot (2,1,-1)| = 2$.

In effetti la retta R_1 è contenuta nel piano $\Pi_1 :\ x = 1$ mentre la retta R_2 è contenuta nel piano $\Pi_2 :\ x = -1$. Il fatto che le due rette siano sghembe implica a questo punto che la loro distanza sia pari alla distanza tra Π_1 e Π_2.

$$d(R_1, R_2) = |(-1,0,0) \cdot (2,1,-1)| = 2$$

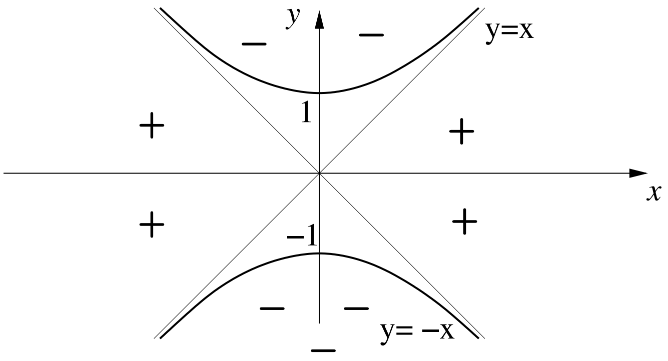
4/30

2. È data la funzione $\quad F(x,y) = 5\,(y-x)^2 + 10\,y(x-y) + 5\,$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno si riduce alla comprensione di Σ_0. La funzione $F(x,y) = 5\,(y-x)^2 + 10\,y(x-y) + 5 = 5(x^2 - y^2 + 1)$ si annulla in corrispondenza dei punti dell'iperbole equilatera $y^2 - x^2 = 1$. Quindi $\Sigma_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\ \}$ è convenientemente catturato dalla scrittura $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\ \}$ e suddivide il piano nelle 3 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 10\,x$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = -10\,y$ e l'origine è pertanto il solo punto stazionario in quanto il solo punto (x, y) che soddisfa al sistema

$$\begin{cases} 10\,x &= 0 \\ -10\,y &= 0 \end{cases}$$

ottenuto imponendo la condizione di annullamento del gradiente. Si noti che $F(0, 0) = 5$, mentre $F(\varepsilon, 0) = 5 + 5\varepsilon^2$ e $F(0, \varepsilon) = 5 - 5\varepsilon^2$ per ogni valore ε; se ne deduce che $(0, 0)$ è punto di sella. A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde: si calcolano $F_{x,x} := \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 10$, $F_{y,y} = -10$, e $F_{x,y} = 0 = F_{y,x}$, e si compone quindi la matrice Hessiana

$$H_F = \begin{vmatrix} F_{x,x} & F_{x,y} \\ F_{y,x} & F_{y,y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}.$$

Si noti che il determinante della matrice Hessiana vale -100 in tutti i punti del piano (il che ci ricorda che la nostra F era una quadrica), ed in particolare nel punto stazionario $(0, 0)$, che pertanto è di sella (poichè $-100 < 0$).

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0, 0)$.

Il punto $(0, 0)$ è punto di sella.

3/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1, 1, 5)$.

In effetti il punto $(1, 1, 5)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1, 1) = 5$. Possiamo quindi procedere. Poichè le derivate parziali $F_x = 10\,x$ e $F_y = -10\,y$ esistono e sono continue in un intorno di $(1, 1)$, la F è differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto può essere considerato come l'approssimazione lineare della F nell'intorno del punto $(1, 1)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1, 1) = F_x(1, 1)\,(x - 1) + F_y(1, 1)\,(y - 1)$ ed otteniamo l'equazione $z - 5 = 10\,(x - 1) - 10\,(y - 1)$, che si semplifica in $10\,x - 10\,y - z = -5$. A titolo di verifica, si noti come in effetti il punto $(1, 1, 5)$ appartenga a tale piano.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1, 2, 2)$:

$$10\,x - 10\,y - z = -5$$

2/30

2.d. Determinare tutti gli estremi di F nella regione $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 9\,x^2 + 4\,y^2 - 36 \leq 0 \right\}$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x,y) = 9\,x^2 + 4\,y^2$ e g_x e g_y ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 10\,x &= F_x = \lambda g_x = & 18\,\lambda\,x \\ -10\,y &= F_y = \lambda g_y = & 8\,\lambda\,y \\ 9\,x^2 + 4\,y^2 &= g(x,y) = & 36\,. \end{cases}$$

La terza equazione impone che $x \neq 0$ o $y \neq 0$, ossia che $\lambda = 10/18 = 5/9$ o $\lambda = -10/8 = -5/4$, dove non entrambe le cose possono valere. Abbiamo pertanto 2 possibilità:

$\lambda = 5/9$ in questo caso, $y = 0$ dalla seconda equazione, e $x = \pm 2$ dalla terza equazione. Qui $F(\pm 2, 0) = 25$.

$\lambda = -5/4$ in questo caso, $x = 0$ dalla prima equazione, e $y = \pm 3$ dalla terza equazione. Qui $F(0, \pm 3) = -40$.

Resta chiara quale sia l'attribuzione dei ruoli di massimo e minimo (tutti di necessità assoluti) tra questi punti.

2.d)

2 Minimi Assoluti: $(0, \pm 3)$, ; $F(0, \pm 3) = -40$

2 Massimi Assoluti: $(\pm 2, 0)$; $F(\pm 2, 0) = 25$

5/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x,y) := \sqrt{5\,x^2 - 5\,y^2 + 5}$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$D[h] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - y^2 + 1 \geq 0 \right\}$

h è ben definita nelle falde dell'iperbole 1/30

2.f. Determinare tutti i punti estremali di $h(x,y) = \sqrt{5\,x^2 - 5\,y^2 + 5}$ nella regione $R \cap D[h]$.

Osservato che $h(x,y) = \sqrt{F(x,y)}$, e considerato che la funzione $\sqrt{\cdot}$ è monotona, possiamo allora avvalerci dell'analogo studio per la funzione F. Si giunge alle seguenti conclusioni.

2.f)

Infiniti Minimi Assoluti dove $h(x,y) = 0$: ogni punto in $\Sigma_0 \cap R$

2 Massimi Assoluti: $(\pm 2, 0)$; $h(\pm 2, 0) = \sqrt{25}$

2/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $x = 0$ delimitata dai paraboloidi $z = 5 - (y-2)^2 - (x-2)^2$ e $z = -5 + (y-2)^2 + (x-2)^2$. Sia M_E il solido che si ottiene facendo ruotare E attorno all'asse delle z. Sia R l'intersezione tra M_E ed il piano $z = 1$.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che R (sulla destra);

3.b. Esprimere M_E in coordinate cilindriche ed R in coordinate Cartesiane;

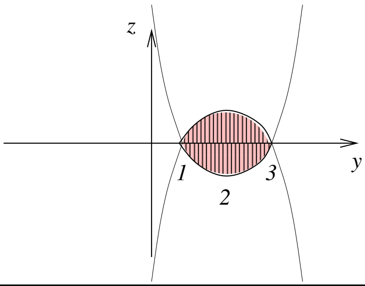
3.c. Calcolare il volume di M_E mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_{M_E} z + xy \; dx\,dy\,dz$;

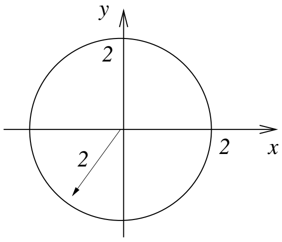
3.e. Calcolare la lunghezza L di R ed impostare un integrale per il computo della superfice S di M_E.

Quando intersechiamo i paraboloidi $z = 5 - (y-2)^2 - (x-2)^2$ e $z = -5 + (y-2)^2 + (x-2)^2$ con il piano $x = 0$ otteniamo le parabole $z = 1 - (y-2)^2$ e $z = -1 + (y-2)^2$. La regione del piano $x = 0$ delimitata tra queste 2 parabole è E, come illustrato in figura. Se noi ruotiamo la superfice E attorno all'asse delle z otteniamo una ciambella come solido di rotazione. I punti più alti della ciambella hanno quota $z = 1$ e sono disposti lungo una circonferenza di raggio 2. Questa circonferenza è ciò che si ottiene quando si interseca la ciambella con il piano tangente $z = 1$. La ciambella era zuccherata (oppure, se vi piace il fritto, unta), e quindi quando le abbiamo appoggiato sopra un foglio rigido di carta ($z = 1$) abbiamo lasciato una traccia sul foglio, che ora resta appesa come disegno di R nella figura, sulla destra.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare R



1+1/30

b)

$$M_E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |z| \leq 1-(\rho-2)^2 \right\}$$

$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z=1,\ x^2+y^2=4 \right\}$$

1+1/30

Vista la simmetria cilindrica di M_E, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate polari ed osservare che precisamente metà del volume di M_E galleggia al di sopra del piano $z=0$. Così il computo del volume V di M può essere condotto come segue.

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{2\pi}\int_1^3 \left(1-(\rho-2)^2\right)\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 4\,\rho^2-\rho^3-3\,\rho\;d\rho \\
&= 4\pi\left[\frac{4}{3}\rho^3-\frac{1}{4}\rho^4-\frac{3}{2}\rho^2\right]_1^3 = \left[\frac{16}{3}\rho^3-\rho^4-6\rho^2\right]_1^3 \pi \\
&= \left(144-81-54-\frac{16}{3}+1+6\right)\pi = \frac{32}{3}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

c)

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_1^3\left(1-(\rho-2)^2\right)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \tfrac{32}{3}\,\pi$$

4/30

Per il computo di I conviene scomporre $I=\int_{M_E} z+xy\ dV$ come $\int_{M_E} z\ dV+\int_{M_E} xy\ dV$ ed osservare che il solido M_E gode delle seguenti simmetrie:

1. $(x,y,z)\in M_E$ se e solo se $(x,y,-z)\in M_E$, da cui segue $\int_{M_E} z\ dV = 0$.
2. $(x,y,z)\in M_E$ se e solo se $(x,-y,z)\in M_E$, da cui segue $\int_{M_E} xy\ dV = 0$.

d)

$$I = \int_{M_E} z\ dV + \int_{M_E} xy\ dV = 0+0=0$$

4/30

Chiaramente $L=4\,\pi$ visto che R è una circonferenza di raggio 2. Per il computo della superfice S della ciambella M conviene raddoppiare la superfice della ciambella posta al di sopra del piano $z=0$. Tale superfice superiore è descritta dall'equazione $z=Z(x,y):=5-(y-2)^2-(x-2)^2$. Pertanto, dove $Z_x := \frac{\partial Z}{\partial x} = -2\,(x-2)$ e $Z_y := \frac{\partial Z}{\partial y} = -2\,(y-2)$, possiamo impostare il seguente integrale.

e)

$$L = 4\,\pi \qquad S = 2\int_{1\leq x^2+y^2\leq 9}\sqrt{1+(Z_x)^2+(Z_y)^2}\,dx\,dy$$

1+2/30

All'integrale impostato nel riquadro si perviene utilizzando la Formula 7 a pag. 293 del testo.

Una strada alternativa per impostare l'integrale per il computo ancora una volta della metà superiore di S sarebbe quella di considerare tale superfice come prodotta dalla rotazione attorno all'asse z dell'arco di parabola $z=1-(y-2)^2$ compreso tra i punti $(1,0)$ e $(3,0)$ nel piano $y-z$. Si noti che stiamo ruotando attorno all'asse delle z (variabile dipendente) e non attorno all'asse delle y

(variabile indipendente). Non vale pertanto la Formula 7 a pag. 293 del testo, ma possiamo però rimpiazzare tale formula generale con la seguente:

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\,.$$

Applicando tale formula “rivista” si perviene alla scrittura

$$S = 2 \int_1^3 (2\pi\, y)\sqrt{1 + \frac{dz}{dy}}\, dy\,,$$

dove $\frac{dz}{dy} = -2\,(y-2)$.

Prova scritta di Matematica II - 6/12/2006 - FILA A
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Calcolare la distanza tra i punti $P = (2, 3, 5)$ e $Q = (1, -6, 2)$.

$$d(P,Q) = \sqrt{\underbrace{(2-1)^2}_{1} + \underbrace{(3-(-6))^2}_{81} + \underbrace{(5-2)^2}_{9}} = \sqrt{91}\,.$$

1/30

1.b. Calcolare la distanza tra il punto $P = (2, 3, 5)$ ed il piano $\Sigma_1 : 4x - 2y + 4z = 4$.

$$d(P, \Sigma_1) = \frac{|4\,(2)-2\,(3)+4\,(5)-4|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{18}{\sqrt{36}} = \frac{18}{6} = 3$$

2/30

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $P = (2, 3, 5)$ e la retta R di equazioni $4x - 2y + 4z = 2$ e $z = x$. Esprimere R in forma parametrica.

Conviene innanzittutto esprimere R in forma parametrica. Poichè $z = x$, converrà prendere come paramero t proprio il comune valore delle variabili x ed y, pervenendo quindi alla seguente scrittura in forma parametrica.

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 4\,t \quad -1 \\ z &= t \end{cases}$$

Ora che il generico punto $R(t)$ di R è espresso in dipendenza di un singolo parametro t, possiamo minimizzare $d(P, R(t)) = \sqrt{(t-2)^2 + ((4\,t-1)-(3))^2 + (t-5)^2} = \sqrt{18\,t^2 - 46\,t + 45}$ che equivale a minimizzare il funzionale $g(t) = 18\,t^2 - 46\,t + 45$ dacchè la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è monotona crescente. Il minimo si ha per $t = \frac{23}{18}$ come si può evidenziare imponendo $0 = g'(t) = 36\,t - 46$. Il punto di R che minimizza $g(t)$ è pertanto $Q = (23/18, 4\,(23/18) - 1, 23/18) = (23/18, 37/9, 23/18)$. Conviene verificare ora che Q appartiene ai piani $4x - 2y + 4z = 2$ e $z = x$. Per $z = x$ la verifica risulta immediata. Inoltre, $4(23/18) - 2(37/9) + 4(23/18) = 92/9 - 74/9 = 18/9 = 2$. A questo punto, $d(P, R) = d(P, Q) = \sqrt{(2 - 23/18)^2 + (3 - 37/9)^2 + (5 - 23/18)^2} = \sqrt{(13/18)^2 + (-10/9)^2 + (67/18)^2} = \frac{\sqrt{169+400+4489}}{18} = \frac{\sqrt{5058}}{18} = \frac{3\sqrt{562}}{18} = \frac{\sqrt{562}}{6}$.

$$R : \begin{cases} x &= t \\ y &= 4\,t \quad -1 \\ z &= t \end{cases} \qquad d(P, R) = \sqrt{\left(2 - \tfrac{23}{18}\right)^2 + \left(3 - \tfrac{37}{9}\right)^2 + \left(5 - \tfrac{23}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{562}}{6}$$

3/30

1.d. Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = 1 + t$, $y = 1 - 6t$, $z = 2t$ e $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

Il più corto segmento che congiunge R_1 ed R_2 sarà ortogonale ad entrambe ossia parallelo al vettore $(1, -6, 2) \wedge (2, 15, 6) = (-66, -2, 27)$. Si prenda un qualsiasi punto della retta R_1, come ad esempio il punto $(1, 1, 0)$ e si osservi che la retta R_1 sarà contenuta nel piano Π_1 di equazione $-66(x-1) - 2(y-1) + 27(z-0) = 0$, ossia $66\,x + 2\,y - 27\,z = 68$. Si noti che anche R_2 è parallela al piano $66\,x + 2\,y - 27\,z = 68$. Si prenda pertanto un qualsiasi punto della retta R_2, come ad esempio il punto $(1, 5, -2)$ e ci si avvalga ancora una volta della formula per il computo della distanza punto/piano per riempire il seguente riquadro.

$$d(R_1, R_2) = \frac{|66\,(1)+2\,(5)-27\,(-2)-68|}{\sqrt{66^2+(2)^2+27^2}} = \frac{62}{\sqrt{5089}}$$

4/30

1.e. Calcolare per quale valore di α il piano Σ_α di equazione $\alpha x - 3y + \alpha z = -4\,\alpha$ risulta parallelo al piano Σ_1 di equazione $4x - 2y + 4z = 2$. Determinare quindi la distanza tra questi due piani paralleli.

Chiaramente, $\alpha = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ e $\Sigma_\alpha : 6x - 3y + 6z = -24$.

$$\Sigma_\alpha : 6x - 3y + 6z = -24 \qquad \left(\alpha = 4 \cdot \tfrac{3}{2} = 6\right)$$

1/30

La strategia per determinare la distanza tra il piano Σ_1 : $4x - 2y + 4z = 2$ ed il piano Σ_6 : $6x - 3y + 6z = -24$ consiste nello scegliere un punto a caso di Σ_6 e nell'utilizzare quindi la formula per il computo della distanza punto/piano. Un punto conveniente è forse $T = (-4, 0, 0)$. A questo punto possiamo riempire il riquadro.

$$d(\Sigma_1, \Sigma_\alpha) = \frac{|4\,(-4) - 2\,(0) + 4\,(0) - 2|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{|-18|}{\sqrt{36}} = \frac{18}{6} = 3$$

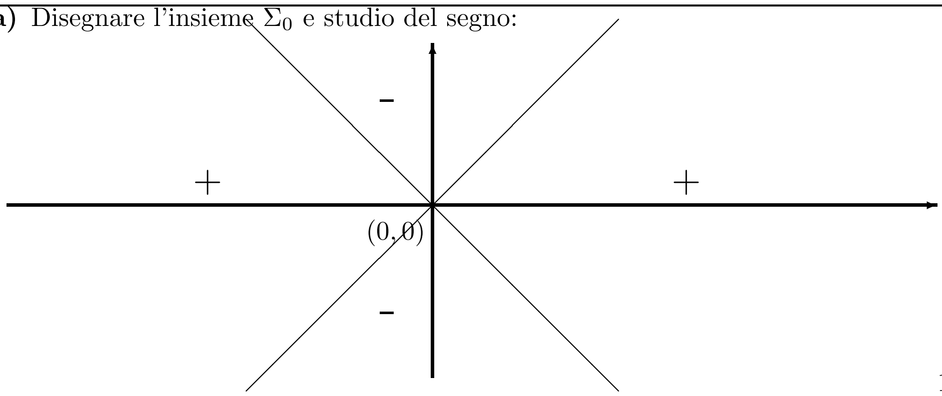
2/30

2. È data la funzione $F(x, y) = 3\,x^2 - 3\,y^2$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ e studiare il segno di F;

Per la legge di annullamento del prodotto, la funzione $F(x, y) = 3\,x^2 - 3\,y^2 = 3(x^2 - y^2) = 3(x - y)(x + y)$ si annulla precisamente per quelle coppie (x, y) tali che $x = \pm y$. Pertanto, l'insieme di livello $\Sigma_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ é catturato nella scrittura $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm y\}$. Può risultare utile, per una prima conoscenza della F, tracciarsi le rette in Σ_0 nel piano $x - y$ preso a dominio della F. Tali rette suddividono il piano in 4 regioni, ciascuna labellabile col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si disporranno a scacchiera.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 6\,x$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = -6\,y$ e, chiaramente, l'origine è l'unico punto (x, y) che soddisfa al sistema

$$\begin{cases} 6\,x &= 0 \\ -6\,y &= 0 \end{cases}$$

ossia rispetta la condizione di annullamento del gradiente. Abbiamo pertanto un solo punto stazionario: il punto $(0, 0)$. Si noti che $F(0, 0) = 0$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0, 0)$ è punto di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0, 0)$.

L'origine $(0, 0)$ è punto di sella.

3/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(0, 0, 0)$.

Poichè $(0, 0)$ è punto stazionario, ne consegue che il piano ivi tangente è orizzontale.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(0, 0, 0)$:

$z = 0$

2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $9\,x^2 + 4\,y^2 \leq 36$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, ossia lungo il bordo dell'elisse $9\,x^2 + 4\,y^2 \leq 36$, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 6\,x & = F_x = \lambda g_x = & 18\,\lambda\,x \\ -6\,y & = F_y = \lambda g_y = & 8\,\lambda\,y \\ 9\,x^2 + 4\,y^2 & = g(x,y) = & 36\,. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(3\,\lambda - 1) & = & 0 \\ y(4\,\lambda + 3) & = & 0 \\ 9\,x^2 + 4\,y^2 & = & 36 \end{cases}$$

Anche se non è difficile gestire questo sistema per estrarne le soluzioni procedendo anche in modo automatico ed alla ceca, conviene comunque sempre procedere con nozione di causa. Intendiamo quindi prefigurarci innanzittutto dove possano risiedere i punti estremali e quanti possano/debbano essere. Può sicuramente snellirci il lavoro avere delle intuizioni preliminari sul tipo di radici che possiamo aspettarci. Un primo studio sulla parità della funzione ci rivela che $F(x,-y) = F(x,y) = F(-x,y)$. Pertanto i punti estremali saranno accoppiati: se (x,y) e punto di massimo (o di minimo) relativo (od assoluto) allora anche $(x,-y)$, $(-x,y)$ e $(-x,-y)$ sarà punto di mmassimo (o, rispettivamente, di minimo) relativo (o, rispettivamente, assoluto). Dalla prima equazione segue che se $x \neq 0$ allora $\lambda = \frac{1}{3}$, mentre dalla seconda equazione segue che se $y \neq 0$ allora $\lambda = -\frac{3}{4}$. Poichè l'origine $(0,0)$ non rispetta il terzo vincolo (non è sulla frontiera), allora ogni soluzione ha precisamente una coordinata nulla. Le soluzioni sono pertanto $(0,\pm 3)$ e $(\pm 2,0)$. Ora, $F(0,\pm 3) = -27 < 0$ mentre $F(\pm 2,0) = 12 > 0$. È facile dedurre che questi 4 punti non possono essere punti di sella. Di fatto essi sono massimi e minimi assoluti.

2.d)

2 Minimi Assoluti: $(0,\pm 3)$; $F(0,\pm 3) = -27$

2 Massimi Assoluti: $(\pm 2,0)$; $F(\pm 2,0) = 12$

5/30

3. In un riferimento Cartesiano x,y,z sia E la parte del piano $x = 0$ contenuta tra due cerchi concentrici C_1 e C_2 con centro l'origine e raggio $R_1 = 3$ ed $R_2 = 5$ rispettivamente. Sia M_E il solido che si ottiene facendo ruotare E attorno all'asse delle z. Sia M_R il solido ottenuto come intersezione tra M_E ed il semispazio $\{z \geq R_1\}$. Sia R la superfice ottenuta come intersezione tra M_R ed il piano $x = 0$.

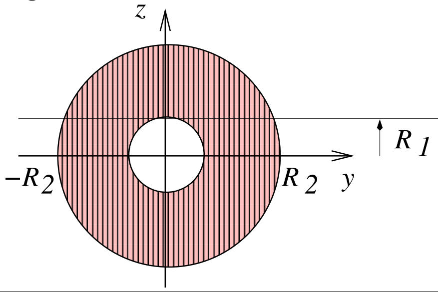
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che R (sulla destra);

3.b. Esprimere M_R ed R in coordinate Cartesiane;

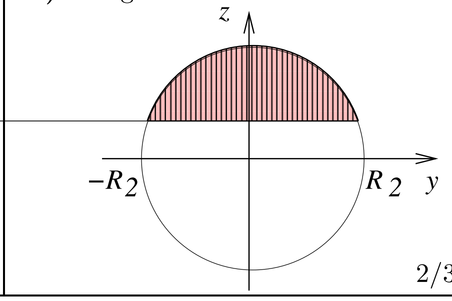
3.c. Calcolare il volume di M_R mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_{M_R} xy \; dx\,dy\,dz$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare R



2/30

b)

$$M_R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; R_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R_2^2, z \geq R_1, \right\}$$

$$R = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y^2 + z^2 \leq R_2^2, z \geq R_1, \right\}$$

3/30

Vista la simmetria cilindrica di M, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate cilindriche per il computo del volume V di M.

$$\begin{aligned} V &= \int_M 1\; dx\,dy\,dz = \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\sqrt{R_2^2 - z^2}} \rho\; d\rho\; dz = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R_2^2 - z^2}} dz \\ &= \pi \int_{R_1}^{R_2} R_2^2 - z^2\; dz = \pi \left[R_2^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{R_1}^{R_2} = \pi \left[R_2^2 (R_2 - R_1) - \frac{R_2^3 - R_1^3}{3}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[R_2^2(R_2 - R_1) + \frac{R_1^3 - R_2^3}{3}\right]\pi \qquad \text{(questa è la formula generale)}\\
&= \left[25(2) + \frac{27 - 125}{3}\right]\pi = \frac{52}{3}\,\pi\,.
\end{aligned}
$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R_2^2 - R_1^2}} \int_{R_1}^{\sqrt{R_2^2-\rho^2}} \rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{52}{3}\,\pi$

5/30

A titolo di verifica, propongo anche una seconda derivazione, (anche se tecnicamente più complicata).

$$
\begin{aligned}
V &= \int_M 1\; dx\, dy\, dz = \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) \int_0^{\sqrt{R_2^2-R_1^2}} \rho \left(\int_{R_1}^{\sqrt{R_2^2-\rho^2}} 1\; dz\right)\, d\rho\\
&= 2\pi \int_0^4 \rho \left(\int_3^{\sqrt{25-\rho^2}} 1\; dz\right)\, d\rho\\
&= 2\pi \int_0^4 \rho(\sqrt{25-\rho^2} - 3)\; d\rho = 2\pi \left(\left[-\frac{3}{2}\rho^2\right]_0^4 - \frac{1}{2}\int_{25}^{9} \sqrt{25-\rho^2}\; d(25-\rho^2)\right)\\
&= 2\pi\left(-24 + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_9^{25}\right) = 2\pi\left(-24 + \frac{1}{3}\,(125-27)\right) = \frac{52}{3}\,\pi\,.
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda I, si osservi che la funzione integranda $f(x,y,z) = xy$ gode della anti-simmetria $f(x,-y,z) = -f(x,y,z)$ e la regione di integrazione (tutto il solido M) è simmetrica rispetto al ribaltamento dell'asse delle y. Pertanto i contributi per $y > 0$ si elidono con corrispondenti contributi per $y < 0$, ed $I = 0$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_M xy\; dx\, dy\, dz = \int_{M, y\geq 0} xy\; dx\, dy\, dz + \int_{M, y \leq 0} xy\; dx\, dy\, dz\\
&= \int_{M, y\geq 0} xy\; dx\, dy\, dz + \int_{M, y\geq 0} x(-y)\; dx\, dy\, dz\\
&= \int_{M, y\geq 0} xy\; dx\, dy\, dz - \int_{M, y\geq 0} xy\; dx\, dy\, dz = 0\,.
\end{aligned}
$$

d)

$I = 0$ poichè M è simmetrico rispetto a inversione dell'asse delle y

3/30

Prova scritta di Matematica II - 28/9/2006 - FILA A
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (3,4,0) \qquad Q = v = (0,3,4) \qquad T = w = (4,0,3)\,.$$

1.a. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$$u \cdot v \wedge w = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{27} + \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{+64} + \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0}_{0} - 0 - 0 - 0 = 91$$

1/30

1.b. Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

L'area del triangolo é metá dell'area del parallelogramma di lati $\vec{PQ} = (0,3,4) - (3,4,0) = (-3,-1,4)$ e $\vec{PT} = (4,0,3) - (3,4,0) = (1,-4,3)$, ossia metá della lunghezza del vettore $\vec{PQ} \wedge \vec{PT} = (-3,-1,4) \wedge (1,-4,3) = (13,13,13)$. In effetti $(13,13,13)$ è ortogonale sia a $(-3,-1,4)$ che a $(1,-1,0)$. Inoltre la direzione di $(13,13,13)$ convince anche per la simmetria dei punti P, Q e T. Pertanto, $Area(PQT) = \frac{1}{2}||(13,13,13)|| = \frac{13}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{13}{2}\sqrt{3}$.

$$\text{Area}(PQT) = \tfrac{1}{2}||\vec{PQ} \wedge \vec{PT}|| = \tfrac{1}{2}||(13,13,13)|| = \tfrac{13}{2}\sqrt{3}$$

2/30

1.c. Determinare la distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q e la distanza di P dalla retta r_{QT} passante per Q e T.

La distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q corrisponde all'altezza del triangolo PQT rispetto alla base $\overline{PQ}$. Conviene avvalersi di quanto calcolato al punto precedente. Per quanto riguarda la lunghezza del segmento $\overline{PQ}$, avremo $|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{26}$. Inoltre, la simmetria dei punti P, Q e T ci suggerisce che la distanza di P dalla retta r_{QT} coincida con la distanza di T dalla retta r_{PQ}, il che può essere utilizzato come verifica.

$$d(T, r_{PQ}) = \frac{2 \cdot \text{Area}(PQT)}{|\overline{PQ}|} = \frac{\sqrt{78}}{2} \qquad d(P, r_{QT}) = d(T, r_{PQ}) = \frac{\sqrt{78}}{2} \text{ per simmetria}$$

3/30

1.d. Determinare le seguenti equazioni:

1.d.a equazioni del piano Π passante per P, Q, e T;

1.d.b equazioni parametriche della retta r passante per P e parallela al segmento $\overline{QT}$;

1.d.c equazioni simmetriche della retta r.

Sappiamo che il vettore $(13,13,13)$ è normale al piano Π. Ne consegue che una possibile equazione per Π ha la forma $13x + 13y + 13z = \alpha$. Il valore di α può essere computato tramite la condizione di passaggio per P, ossia $13(3+4+0) = \alpha$, che restituisce $\alpha = 91$. Si noti che le condizioni di passaggio per Q o T avrebbero condotto allo stesso valore per α, il che vale come verifica.

Il vettore $\vec{QT} = (4,0,3) - (0,3,4) = (4,-3,-1)$ esprime la direzione del segmento $\overline{QT}$.

Π: $13\,x + 13\,y + 13\,z - 91 \quad = 0$	$r : \begin{cases} x = & 4\,t & +3 \\ y = & -3\,t & +4 \\ z = & -t & \end{cases}$	$r : z = \frac{y-4}{3} = \frac{3-x}{4}$ 2+2+2/30

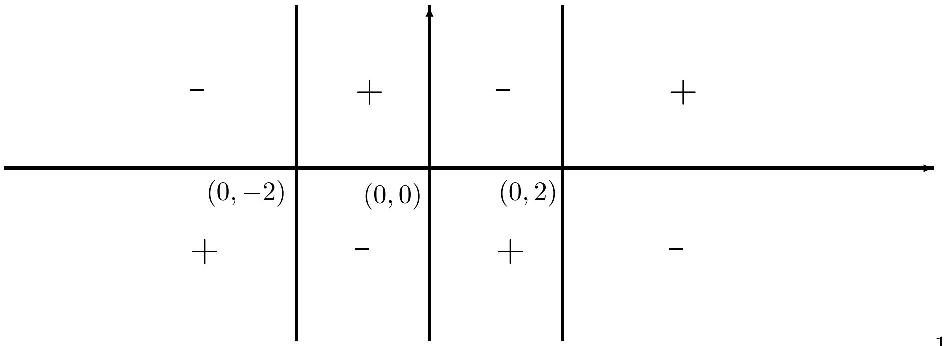
2. È data la funzione $\quad F(x,y) = 2\,x^3\,y - 8\,xy\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

La funzione $F(x,y) = 2\,x^3\,y - 8\,xy = 2\,xy(x-2)(x+2)$ é data come prodotto di 4 monomi: x, $(x-2)$, $(x+2)$ e y. Per la legge di annullamento del prodotto, l'insieme di livello $\Sigma_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\ \}$ é catturato nella scrittura $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x=0) \vee (x=2) \vee (x=-2) \vee (y =$

0) }. Può risultare utile, per una prima conoscenza della F, tracciarsi le rette in Σ_0 nel piano $x-y$ preso a dominio della F. Tali rette suddividono il piano in 8 regioni, ciascuna labellabile col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si disporranno a scacchiera.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 6\,x^2\,y - 8\,y = 2\,y(3x^2-4)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,x^3 - 8\,x = 2\,x(x^2-4)$ ed i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2\,y(3x^2-4) &= 0 \\ 2\,x(x^2-4) &= 0 \end{cases}$$

ottenuto imponendo la condizione di annullamento del gradiente, debbono tutti avere $x \in \{0, -2, 2\}$ per soddisfare alla seconda equazione. Pertanto, l'unico modo per soddisfare anche alla prima equazione é di avere $y = 0$. Abbiamo pertanto 3 soli punti stazionari: il punto $(0, 0)$, il punto $(2, 0)$, ed il punto $(-2, 0)$. Si noti che $F(0, 0) = 0 = F(\pm 2, 0)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che tutti e tre i punti stazionari individuati sono di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0, 0)$, $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

I punti $(0, 0)$ e $(\pm 2, 0)$ sono tutti punti di sella.

4/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1, 2, -12)$.

In effetti il punto $(1, 2, -12)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1, 2) = -12$. Possiamo quindi procedere. Poiché le derivate parziali $F_x = 2\,y(3x^2-4)$ e $F_y = 2\,x(x^2-4)$ esistono e sono continue in un intorno di $(1, 2)$, la F é differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto puó essere considerato come l'approssimazione lineare della F nel punto $(1, 2, -12)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1, 2) = F_x(1, 2)\,(x-1) + F_y(1, 2)\,(y-2)$ ed otteniamo l'equazione $z + 12 = -4\,(x-1) - 6\,(y-2)$, che si semplifica in $4\,x + 6\,y + z = 4$. A titolo di verifica, si noti come in effetti il punto $(1, 2, -12)$ appartenga a tale piano.

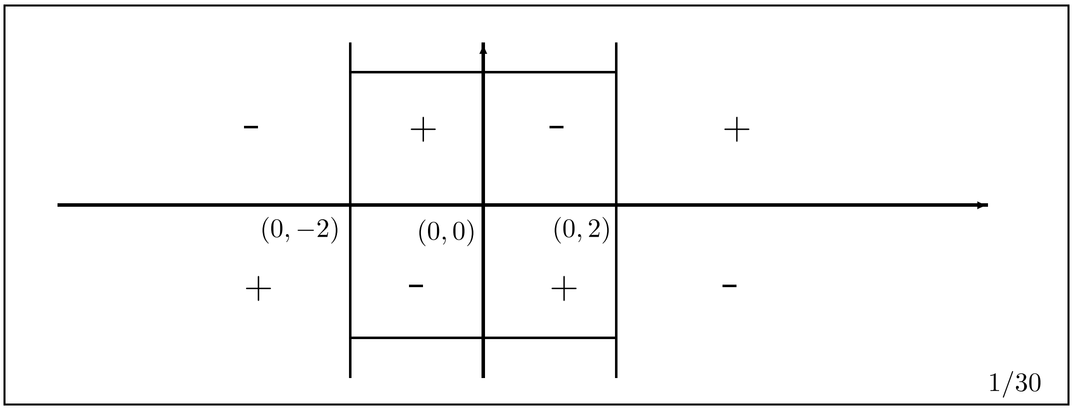
2.c) Equazione del piano tangente F in $(1, 2, -12)$:

$4\,x + 6\,y + z = 4$

3/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nel quadrato Q di spigoli $(-2, -2)$ e $(2, 2)$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, ossia lungo il bordo del quadrato Q. Poichè il bordo del quadrato Q si compone di 4 segmenti, possiamo ridurre il problema a 4 problemi di ricerca di estremi in una sola dimensione. Tuttavia, al solito, conviene procedere con cautela e metodo, prefigurandosi innanzittutto dove possano risiedere questi punti estremali e quanti possano/debbano essere. Può sicuramente snellirci il lavoro avere delle intuizioni preliminari sul tipo di radici che possiamo aspettarci. Un primo studio sulla parità della funzione ci rivela che $F(x,-y) = F(x,y)$, ma anche $F(-x,y) = -F(x,y)$. Queste 2 simmetrie implicano ovviamente anche l'anti-simmetria centrale $F(x,y) = -F(-x,-y)$ Pertanto i punti estremali, eccetto quelli ad ascissa od ordinata nulla, vengono in gruppi di 4 immagini caledoiscopiche. Nel caso di ascissa od ordinata nulla (non posso avere sia $x = 0$ che $y = 0$ visto che sono sul bordo di Q) allora le immagini caleidoscopiche sono precisamente 2 poichè solo il ribaltamento sulla coordinata non nulla mi differenzia effettivamente. In ogni caso, è ormai chiaro che basterà studiare i soli punti del primo quadrante e ricordarsi di tradurre ciascuno di essi nei suoi 4 (o 2) alter-egos caleidoscopici. Detto questo, quante radici dobbiamo aspettarci e dove potrebbero essere grosso modo posizionate? Per rispondere a queste domande, visualizziamo il contorno di Q nel piano dove abbiamo condotto lo studio del segno.



Possiamo ora osservare le seguenti cose:

- (1) $F = 0$ su tutti i punti situati sui 2 bordi verticali del quadrato. Questa osservazione implica che basterà studiare i bordi orizzontali. Di fatto, vista la simmetria $F(x,-y) = F(x,-y)$, basterà studiare gli estremi della F sul bordo superiore di Q. Poichè il bordo superiore di Q è costituito dai punti $(x,2)$ con $-2 \leq x \leq 2$, ci siamo ridotti al problema di trovare gli estremi della funzione $f(x) := F(x,2) = 4\,x^3 - 16\,x = 4\,x(x-2)(x+2)$ per $-2 \leq x \leq 2$.
- (2) il quadrato Q si compone di 4 regioni chiuse incollate tra loro. Queste regioni sono dei quadratini, ciascuno con precisamente 3 dei suoi bordi contenuto entro Σ. Su ciascun quadratino la F assume solo valori non negativi, se il quadratino è contrassegnato con un "-", o non positivi, se il quadratino è contrassegnato con un "+". Su ciascuno di tali quadratini la F dovrà avere sia punti di massimo che di minimo e questi punti dovranno essere situati tutti sul contorno della regione.

Concentriamoci sul quadratino $Q_{1,1}$ posto nel primo quadrante. Esso è contrassegnato con un "-". Si noti che i punti dei bordi inferiore, sinistro, e destro, sono tutti punti di massimo assoluto della F su $Q_{1,1}$ dacchè su $Q_{1,1}$ la F assume solo valori non-positivi. Si noti che i punti dei bordi inferiore e sinistro di $Q_{1,1}$ sono però dei punti di sella della F su tutto Q, dacchè l'attraversamento di tali bordi ci mantiene entro Q invertendo nel contempo il segno della F. Invece tutti i punti del bordo destro di $Q_{1,1}$, eccetto il punto $(2,0)$, sono punti di massimo (anche se solo relativo, ossia solo in senso locale) della F su Q dacchè l'attraversamento di tale bordo ci porterebbe fuori da Q, a meno che non si sia in $(2,0)$ e ci si diriga verso il basso. Ora, dacchè la F su $Q_{1,1}$ assume anche valori non nulli, resta da localizzare almeno un punto di minimo, necessariamente localizzato internamente al bordo superiore di $Q_{1,1}$. Ricercare il minimo della funzione $f(x) := F(x,2) = 4\,x^3 - 16\,x$ introdotta sopra equivale a stanare tale minimo. La $f(x)$ è di terzo grado e pertanto darà luogo a precisamente un minimo relativo e precisamente un massimo relativo. Noi ci interessa il minimo relativo (il massimo relativo corrisponderà all'alter-ego caleidoscopico disposto nel secondo quadrante). Per reperirlo computiamo la derivata $f_x = 12\,x^2 - 16 = 4(3\,x^2 - 4)$. Le radici della f_x sono $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$, ed a noi interessa quella positiva, dove in effetti vale $0 < \frac{2}{3}\sqrt{3} < 2$. Siamo fortunati: su $Q_{1,1}$ abbiamo esattamente un punto di minimo, pertanto esso è sicuramente un punto di minimo assoluto senza bisogno di altri accertamenti. Il minimo valore di F su Q è $F\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2\right) = -\frac{64}{9}\sqrt{3}$.

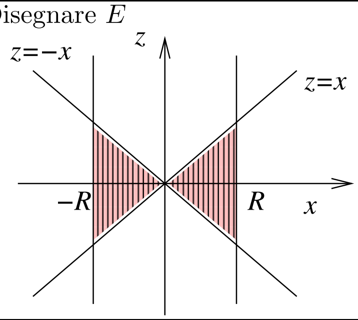
2.d)
2 Minimi Assoluti: $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2\right)$, $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -2\right)$; $F = -\frac{64}{9}\sqrt{3}$
2 Massimi Assoluti: $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -2\right)$, $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2\right)$; $F = \frac{64}{9}\sqrt{3}$
Massimi Relativi: $\{(2,t), (-2,-t), (t,2), (-t,-2) \; : \; t \in (0,2]\}$; $F = 0$
Minimi Relativi: $\{(2,-t), (-2,t), (t,-2), (-t,2) \; : \; t \in (0,2]\}$; $F = 0$ 5/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $|z| \le |x| \le R$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z.

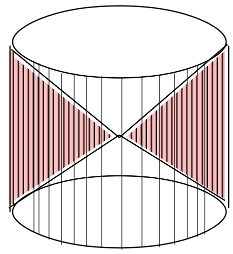
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra);
3.b. Esprimere M in coordinate Cartesiane;
3.c. Calcolare il volume di M mediante integrazione;
3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_M z \; dx \, dy \, dz$;
3.e. Calcolare la superficie di M.

La figura piana E è l'intersezione della striscia verticale centrata sull'asse delle z e di ampiezza $2R$, come determinata dalla condizione $|x| \le R$, con l'insieme di punti che soddisfano alla diseguaglianza $|z| \le |x|$. Per interpretare il luogo del piano $x - z$ descritto da $|z| \le |x|$ basta delimitarne i contorni, ossia comprendere l'eguaglianza $|z| = |x|$. I punti che soddisfano tale eguaglianza sono i punti $z = \pm x$. Rimandiamo alla correzione del tema del 31 agosto 2006 se questo punto solleva vostre perplessità.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare M



1/30

b)
$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 \le R^2, \; |z| \le |x| \; \right\}$
2/30

Vista la simmetria cilindrica di M, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate cilindriche per il computo del volume V di M.

$$\begin{aligned} V &= \int_M 1 \; dx \, dy \, dz = \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta\right) \int_0^R \rho \left(\int_{-\rho}^{\rho} 1 \; dz\right) \; d\rho \\ &= 2\pi \int_0^R (\rho \, [z]_{-\rho}^{\rho}) \; d\rho = 2\pi \int_0^R 2\,\rho^2 \; d\rho \\ &= 4\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\,\pi\, R^3 . \end{aligned}$$

In effetti se ad un cilindro di raggio R ed altezza R (di volume $\pi\, R^3$) tolgo una piramide di raggio R ed altezza R (di volume $\frac{1}{3}\pi\, R^3$), ottengo la metà del solido M che giace sopra il piano $z = 0$ (oppure la metà che giace sotto). Quindi i conti tornano.

c)
$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\rho}^{\rho} \rho \; dz \, d\rho \, d\theta = \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta\right) \left(\int_0^R 2\,\rho^2 \; d\rho\right) = \frac{4}{3}\,\pi\, R^3$
5/30

Per quanto riguarda I, si osservi che la funzione integranda $f(\theta, \rho, z) = z$ gode della anti-simmetria $f(\theta, \rho, -z) = -f(\theta, \rho, z)$ e la regione di integrazione (tutto il solido M) è simmetrica rispetto al ribaltamento dell'asse delle z. Pertanto il contributo (positivo) al di sopra del piano $z = 0$ si elide perfettamente con il contributo (negativo) al di sotto dello stesso piano, ed $I = 0$.

Questa verità sarebbe comunque venuta velocemente alla luce anche per chi avesse impostato toucour l'integrale, presumibilmente come segue.

$$\begin{aligned} I &= \int_M z \, dx\, dy\, dz = \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) \int_0^R \rho \left(\int_{-\rho}^{\rho} z \, dz \right) \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^R \left(\rho \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-\rho}^{\rho} \right) \, d\rho = 0 \,. \end{aligned}$$

d)

$I = 0$ poichè M è simmetrico su ribaltamento dell'asse z

3/30

Come per il volume, la superfice di M andava vista come il doppio della superfice della parte di M posta sopra il piano $z = 0$ (e non a contatto con il piano $z = 0$) e quindi scomposta nella superfice laterale del cilindro di raggio ed altezza R (di estensione $2\,\pi R^2$) e nella superfice laterale del cono di raggio ed altezza R (di estensione $\sqrt{2}\,\pi R^2$). La superfice laterale del cono poteva essere facilmente calcolata tramite formule ripescate da riminescenze della scuola primaria, o dal Bignami, ma anche da una qualsiasi enciclopedia, o infine da internet (questa ultima possibilità vi è però preclusa durante il compito poichè non è consentito l'utilizzo di alcun dispositivo dalle calcolatrici e dai telefonini in su). Come sempre, ricercare la comprensione delle cose oggi evita di dover ricorrere ad un sussidio domani: la superfice di un cono non cambia se lo taglio lungo un qualsiasi segmento che vada dal vertice del cono ad un punto della circonferenza su cui il cono poggia, e se poi lo spiano ottenendo un settore di circonferenza. La lunghezza del segmento su cui ho tagliato è chiamata altezza obliqua del cono, e nel nostro caso vale $\sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R$ ma è comunque sempre ottenibile tramite il teorema di Pitagora. L'area di un settore di circonferenza di raggio ρ e lungo ℓ vale $\frac{\rho\ell}{2}$, formula questa che generalizza la formula per l'area di un cerchio ma che è anche da essa immediatamente deducibile (basta convincersi della dipendenza lineare in ℓ. Pertanto, possiamo considerare la formula che esprime l'area del cerchio come un esempio base di quello che potremmo chiamare "self-refining mathematical statement" o "enunciati matematici automigliorativi"). In conclusione, la superfice del nostro cono varrà $\frac{(\sqrt{2}R)(2\pi R)}{2} = \sqrt{2}\,\pi R^2$. Quindi $S = 2(2\pi R^2 + \sqrt{2}\pi R^2) = 2(2 + \sqrt{2})\pi R^2$.

e)

$S = 2(2\pi R^2 + \sqrt{2}\pi R^2) = 2(2 + \sqrt{2})\pi R^2$

4/30

Prova scritta di Matematica II - 31/8/2006 - FILA A
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a piano Π_1 passante per $(1,1,0),(2,1,0),(0,2,2)$;

1.a.b piano Π_2 passante per $(0,2,2)$ e ortogonale a $(0,2,-1)$;

1.a.c piano Π_3 contenente la retta di equazioni parametriche $P(t)=(1+t,1,0)$ e che interseca il piano $y-z$ nel punto $(0,2,2)$.

Il piano Π_2 passante per $(0,2,2)$ e ortogonale a $(0,2,-1)$ avrà equazione $[(x,y,z)-(0,2,2)]\cdot(0,2,-1)=0$ ossia $2y-z-2=0$. È facile verificare che tale equazione risulta soddisfatta anche dai punti $(1,1,0)$ e $(2,1,0)$ e più in generale da tutti i punti della forma $(1+t,1,0)$. Ne consegue che questo piano è un sol piccione per 3 fave.

Π_1:2y-z-2=0
Π_2:2y-z-2=0
Π_3:2y-z-2=0
2+2+2/30

1.b. In un riferimento Cartesiano x,y,z sono dati i tre punti e vettori

$$P=u=(3,4,0) \qquad Q=v=(0,3,4) \qquad T=w=(4,3,0)\,.$$

1.b.a. Calcolare $u\cdot v\wedge w$.

$$u\cdot v\wedge w=\begin{vmatrix}3&4&0\\0&3&4\\4&3&0\end{vmatrix}=\underbrace{3\cdot3\cdot0}_{0}+\underbrace{4\cdot4\cdot4}_{+64}+\underbrace{0\cdot0\cdot3}_{0}-\underbrace{4\cdot3\cdot3}_{36}-0-0=28$$

1/30

1.b.b. Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

L'area del triangolo é metá dell'area del parallelogramma di lati $\vec{PQ}=(0,3,4)-(3,4,0)=(-3,-1,4)$ e $\vec{PT}=(4,3,0)-(3,4,0)=(1,-1,0)$, ossia metá della lunghezza del vettore $\vec{PQ}\wedge\vec{PT}=(-3,-1,4)\wedge(1,-1,0)=(4,4,4)$. In effetti $(4,4,4)$ è ortogonale (= prodotto scalare nullo) sia a $(-3,-1,4)$ che a $(1,-1,0)$ il che mi vale come rapida verifica parziale (per altro assai affidabile -dovrei fare 3 errori per non rilevare l'errore) del prodotto vettoriale computato. Pertanto, $Area(PQT)=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}$.

$$\text{Area}(PQT)=\tfrac{1}{2}||\vec{PQ}\wedge\vec{PT}||=\tfrac{1}{2}||(4,4,4)||=\tfrac{1}{2}4\sqrt{1^2+1^2+1^2}=2\sqrt{3}$$

2/30

1.b.c. Determinare la distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q e la distanza di P dalla retta r_{QT} passante per Q e T.

La distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q corrisponde all'altezza del triangolo PQT rispetto alla base $\overline{PQ}$. Conviene avvalersi di quanto calcolato al punto precedente.

$$d(T,r_{PQ})=\frac{2\cdot\text{Area}(PQT)}{||\vec{PQ}||}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{26}}=\frac{2\sqrt{6}}{13} \qquad d(P,r_{QT})=\frac{4\sqrt{3}}{||(4,0,-4)||}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

3/30

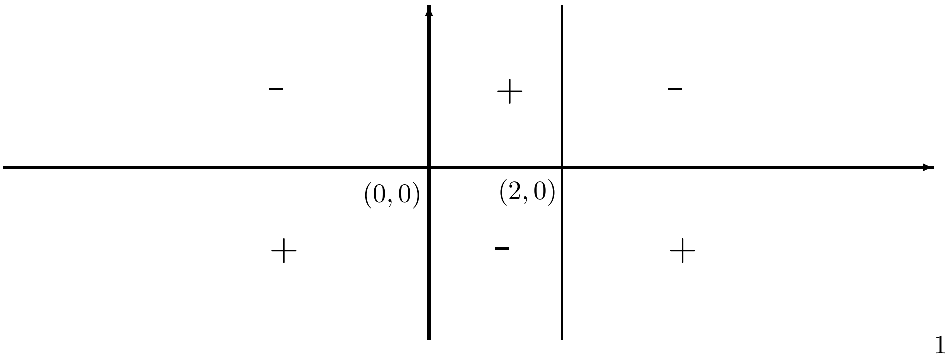
2. È data la funzione $\quad F(x,y)=2\,x\,y-x^2\,y\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0=\{(x,y)\mid F(x,y)=0\}$ e studiare il segno di F;

La funzione $F(x,y)=2\,x\,y-x^2\,y=xy(2-x)$ é data come prodotto di 3 monomi: x, $(2-x)$ e y. Per la legge di annullamento del prodotto, l'insieme di livello $\Sigma_0:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid F(x,y)=0\}$ é catturato nella scrittura $\Sigma_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x=0)\vee(x=2)\vee(y=0)\}$. Può risultare utile, per una prima conoscenza della F, tracciarsi le rette in Σ_0 nel piano $x-y$ preso a dominio della F. Tali rette suddividono il piano in 6 regioni, ciascuna labellabile col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle

4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si disporranno a scacchiera.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;
Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2y - 2xy = 2y(1-x)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2x - x^2 = x(2-x)$ ed i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2y(1-x) &= 0 \\ x(2-x) &= 0 \end{cases}$$

ottenuto imponendo la condizione di annullamento del gradiente, debbono tutti avere $x \in \{0, 2\}$ per soddisfare alla seconda equazione. Pertanto, l'unico modo per soddisfare anche alla prima equazione é di avere $y = 0$. Abbiamo pertanto 2 soli punti stazionari: il punto $(0, 0)$ ed il punto $(2, 0)$. Si noti che $F(0, 0) = 0 = F(2, 0)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che entrambi i punti sono di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0, 0)$ e $(2, 0)$.

I punti $(0, 0)$ e $(2, 0)$ sono entrambi punti di sella.

4/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1, 2, 2)$.
In effetti il punto $(1, 2, 2)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1, 2) = 2$. Possiamo quindi procedere. Poiché le derivate parziali $F_x = 2y(1-x)$ e $F_y = x(2-x)$ esistono e sono continue in un intorno di $(1, 2)$, la F é differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto puó essere considerato come l'approssimazione lineare della F nel punto $(1, 2, 2)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1, 2) = F_x(1, 2)\,(x - 1) + F_y(1, 2)\,(y - 2)$ ed otteniamo l'equazione $z - 2 = 0 + 1\,(y - 2)$, che si semplifica in $z = y$. A titolo di verifica, si noti come in effetti il punto $(1, 2, 2)$ appartenga a tale piano.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1, 2, 2)$:

$z = y$

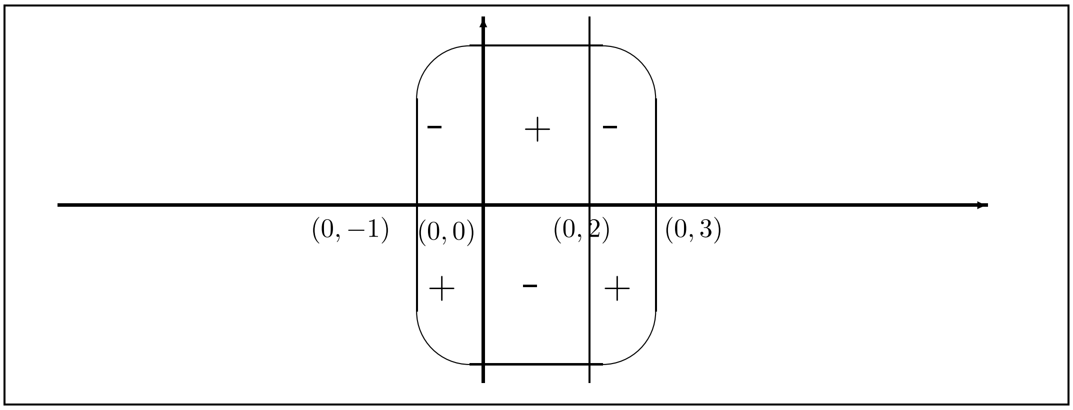
4/30

2.d. Determinare tutti gli estremi di F nella regione $R = \{\,(x, y)\ :\ 3\,x^2 - 6\,x + y^2 \leq 9\,\}$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 2y(1-x) &= F_x = \lambda g_x = & \lambda(6x - 6) = 6\,\lambda(x-1) \\ x(2-x) &= F_y = \lambda g_y = & \lambda(2y) \\ 3x^2 - 6x + y^2 &= g(x, y) = & 9\,. \end{cases}$$

Vedremo più sotto che risulta umanamente possibile gestire questo sistema per estrarne le soluzioni, però è necessario procedere con cautela e metodo. Siccome che ciò sia possibile non può mai essere dato troppo per scontato, risulta sempre conveniente prendere in esame la forma del problema catturato dalle equazioni al fine di avere delle intuizioni preliminari sul tipo di radici che possiamo aspettarci. Un primo studio sulla parità della funzione ci rivela che $F(x,-y) = F(x,y)$. Pertanto, eccetto ove $y = 0$, i punti estremali saranno accoppiati: se (x,y) e punto di massimo (o di minimo) relativo (od assoluto) allora $(x,-y)$ e punto di minimo (o, rispettivamente, di massimo) relativo (o, rispettivamente, assoluto). Poichè la F è il prodotto di un monomio nella sola y per un polinomio di secondo grado nella sola x, un occhio più attento potrebbe rivelare anche una parità sulla x: $F(1+x,y) = F(1-x,y)$ che, anche se non intendiamo sfruttare, può sempre venire comoda nel confermarci che le radici eventualmente prodotte hanno un aspetto ragionevole. Ma quante di queste radici dobbiamo aspettarci e dove potrebbero essere grosso modo posizionate? Per rispondere a queste domande, visualizziamo il contorno della regione $R = \{\,(x,y)\ :\ 3\,x^2 - 6\,x + y^2 \leq 9\,\}$ sul piano dove abbiamo condotto lo studio del segno.



Possiamo ora osservare che R si compone di 6 regioni chiuse incollate tra loro su quelle parti di bordo complessivamente costituenti Σ. Su ciascuna di tali regioni la F assume solo valori non negativi, se la regione è contrassegnata con un "-", o non positivi, se la regione è contrassegnata con un "+". Su ciascuna di tali regioni la F dovrà avere sia punti di massimo che di minimo e questi punti dovranno essere situati sul contorno della regione. Se la regione è contrassegnata con un "+", allora sappiamo già dove sono situati gli infiniti punti di minimo (tutti a valore nullo della F e situati in Σ), ma poiche nella regione la F assume anche valori non nulli, resta da localizzare almeno un punto di massimo, necessariamente localizzato internamente all'arco di elisse che contorna tale regione. Analogo discorso (solo rovesciato) vale se la regione è contrassegnata con un "-". Le equazioni di Lagrange dovranno pertanto restituire almeno 6 soluzioni, e tutte le soluzioni prodotte dovranno godere delle caleidoscopiche simmetrie sopra annunciate.

Torniamo ora al nostro sistema. La prima equazione si semplifica in $2y = -6\,\lambda$ assumendo $(x-1) \neq 0$. In effetti il caso $x = 1$ è presto sviscerato: dalla terza equazione consegue $y = \pm\sqrt{12} = \pm 2\,\sqrt{3}$ ed esiste sicuramente un valore di λ che rende soddisfatta anche la terza equazione. Teniamo quindi presente che $F(1, \pm 2\sqrt{3}) = \mp 2\sqrt{3}$ ma, prima di poter stabilire l'effettiva natura di tali punti, dobbiamo andare a vedere quali altre soluzioni restino individuate dalle equazioni di Lagrange, ossia se vi sono altri candidati ad essere punti di estremo (le condizioni di Lagrange sono necessarie ma non sufficienti). Sostituendo prima $\lambda = -\frac{y}{3}$ (dalla prima equazione), e quindi $y^2 = 9 - 3x^2 + 6x$ (dalla terza equazione), la seconda equazione diviene un'equazione di secondo grado nella sola x che si semplifica poi in $x^2 - 2x - 2 = 0$ ed ha radici $x = 1 \pm \sqrt{3}$. Dall'equazione $y^2 = 9 - 3x^2 + 6x$ possiamo ora ottenere

$$y^2 = 9 - 3(1 \pm \sqrt{3})^2 + 6(1 \pm \sqrt{3}) = 9 - 3(1 + 3 \pm 2\sqrt{3}) + 6(1 \pm \sqrt{3}) = 3$$

da cui $y = \pm\sqrt{3}$. Campionando la F sui punti messi in evidenza otteniamo $F(1 \pm \sqrt{3}, \sqrt{3}) = 2\,\sqrt{3}$ e $F(1 \pm \sqrt{3}, -\sqrt{3}) = -2\,\sqrt{3}$. Queste sono tutte e sole le soluzioni alle equazioni di Lagrange. Siamo fortunati: abbiamo esattamente una soluzione per ciascuno degli archi di elisse, e quindi non ci sono dubbi che ciascuna di tali soluzioni individua un punto di estremo della F su R.

2.d)

3 Minimi Assoluti: $(1, 2\sqrt{3}),\ (1 \pm \sqrt{3}, -\sqrt{3}),\ ;\quad F = -2\,\sqrt{3}$

3 Massimi Assoluti: $(1, -2\sqrt{3}),\ (1 \pm \sqrt{3}, \sqrt{3})\ ;\quad F = 2\,\sqrt{3}$

7/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati: E = parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $x^2 + z^2 \leq R^2$ e $|z| \leq |x|$, e M = solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra);

3.b. Esprimere M in coordinate Cartesiane;

3.c. Calcolare il volume di M mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_M z \; dx\, dy\, dz$;

3.e. Calcolare la superficie di M.

La figura piana E è data dall'intersezione del disco di raggio R con l'insieme di punti che soddisfano alla diseguaglianza $|z| \leq |x|$. Molti di voi hanno avuto difficoltà ad interpretare il luogo del piano descritto da $|z| \leq |x|$. Le diseguaglianze sono più astratte da afferrare ed esprimere che non le eguaglianze, ma, poichè la diseguaglianza in questione coinvolge solo operatori continui, sarà sufficiente comprendere l'eguaglianza $|z| = |x|$ che catturerà il contorno della regione di interesse. I punti che rispondono a tale eguaglianza sono i punti $z = \pm x$. Se questo ultimo passaggio sembra ancora troppo difficile da intuire, allora uno può adottare un metodo carroarmato (ed in primo principio universale) per la gestione dell'operatore di valore assoluto:

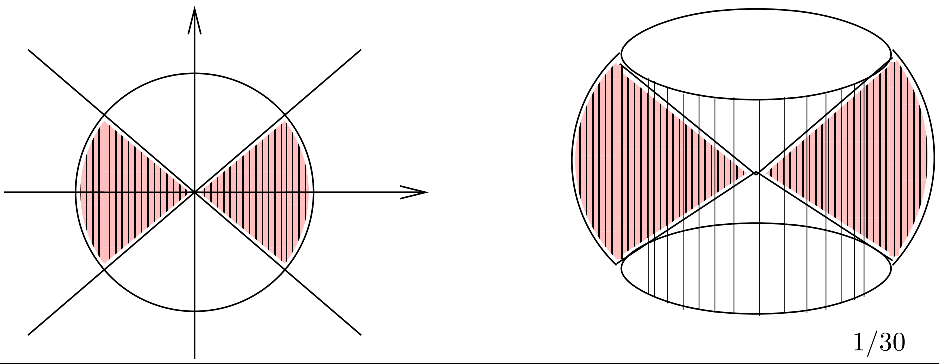
caso 1: $x, z \geq 0$ - siamo nel 1^o quadrante, dove $|z| = |x|$ traccia la semiretta $x = z$.

caso 2: $x \geq 0$, $z \leq 0$, - siamo nel 1^o quadrante, dove $|z| = |x|$ traccia la semiretta $x = -z$.

caso 3: $z \geq 0$, $x \leq 0$, - siamo nel 1^o quadrante, dove $|z| = |x|$ traccia la semiretta $x = -z$.

caso 4: $x, z \leq 0$ - siamo nel 1^o quadrante, dove $|z| = |x|$ traccia la semiretta $x = z$.

a) Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra)



1/30

b)

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\; |z| \leq |x| \right\}$$

1/30

Vista la simmetria sferica di M, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate sferiche per il computo del volume V di M.

$$\begin{aligned}
V &= \int_M 1 \; dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) \left(\int_0^R \rho^2 \; d\rho\right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin\phi \; d\phi\right) \\
&= 2\pi\, \frac{R^3}{3} \left[-\cos\phi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = 2\pi\, \frac{R^3}{3} (2\, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\,\sqrt{2}\,\pi\, \frac{R^3}{3}\,.
\end{aligned}$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta = 2\,\sqrt{2}\,\pi\, \frac{R^3}{3}$

5/30

Inoltre, le coordinate sferiche combinate con la formule trigonometriche di duplicazione degli angoli consentono anche un facile calcolo di I.

$$\begin{aligned}
I &= \int_M z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho\cos\phi\,\rho^2\sin\phi\;d\phi\,d\rho\,d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)\left(\int_0^R \rho^3\;d\rho\right)\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin 2\phi}{2}\;d\phi\right) \\
&= 2\pi\,\frac{R^4}{4}\left[-\frac{1}{4}\cos 2\phi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

In effetti il solido M gode della seguente simmetria $(x, y, z) \in M$ se e solo se $(x, y, -z) \in M$. Inoltre la funzione integranda z è ovviamente dispari rispetto al ribaltamento dell'asse delle z e quindi il contributo ad I raccolto nel semispazio $z \geq 0$ si elide con il contributo ad I raccolto nel semispazio $z \leq 0$. Con un pó di spirito di osservazione non serviva pertanto effettuare alcun calcolo per risolvere questo integrale. Per tutti gli altri un'ottima verifica dei conteggi effettuati.

d)

$I = 0$ poichè $\int_{\substack{x^2+y^2+z^2\leq R^2\\ 0\leq z\leq|x|}} z\;dx\,dy\,dz = -\int_{\substack{x^2+y^2+z^2\leq R^2\\ -|x|\leq z\leq 0}} z\;dx\,dy\,dz$

3/30

La superfice di M andava scomposta nella superfice sulla sfera e nella superfice sul cono, avvalendosi quindi del celebre motto di Totò riguardo le somme. La superfice sul cono poteva essere facilmente calcolata tramite formule ripescate da riminescenze della scuola primaria, o dal Bignami, ma anche da una qualsiasi enciclopedia, o infine da internet (questa ultima possibilità vi è però preclusa durante il compito poichè non è consentito l'utilizzo di alcun dispositivo dalle calcolatrici e dai telefonini in su). Per la superficie sulla sfera conveniva probabilmete avvalersi della Formula 7 a pag. 293 del testo, e considerarla come prodotta dalla rotazione di un arco di circonferenza, ottenendo

$$\begin{aligned}
S_{ext} &= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\sqrt{R^2-z^2}\sqrt{1+\frac{4z^2}{4(R^2-z^2)}}\;dz \\
&= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} R\;dz = 2\sqrt{2}\,\pi\,\mathbb{R}^2\,.
\end{aligned}$$

Per la superfice del cono, i parametri sono R (altezza obliqua) e $2\,\pi\frac{R}{\sqrt{2}}$ (circonferenza). Quindi, con riferimento alla sola metà del doppio cono (ad esempio il cono che si apre verso l'alto), la superfice interessata misurerà $\pi R^2\frac{2\,\pi\frac{R}{\sqrt{2}}}{2\,\pi\,R} = \frac{1}{2}\pi R^2$.

e)

$S = \pi R^2 + 2\sqrt{2}\,\pi\,\mathbb{R}^2$

7/30

Prova scritta di Matematica II - 5 luglio 2006 - CORREZIONE Fila A
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Calcolare per quale valore di α il piano Σ_α di equazione $10\,x + 10\,\alpha\,y - 20\,z = 15\,\alpha$ risulta parallelo al piano Σ di equazione $2\,x + 4\,y - 4\,z = 0$. Determinare quindi la distanza tra questi due piani paralleli.

Due piani Σ_1 e Σ_2, di equazioni $a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1$ e $a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2$ sono parallali precisamente quando sono paralleli i vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2). Infatti, il vettore dei coefficienti direttori è sempre ortogonale al piano (Sezione 2.5 del vostro libro di testo). Inoltre, due vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono paralleli se e solo se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Nel nostro caso, il rapporto $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$ risulta verificato per ogni valore di α e resta quindi da impostare il rapporto $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, che conduce al valore $\alpha = 2$. Sostituendo, $\Sigma_\alpha :\ 10\,x + 20\,y - 20\,z = 30$, ossia $\Sigma_\alpha :\ x + 2\,y - 2\,z = 3$.

$$\boxed{\Sigma_\alpha :\ x + 2\,y - 2\,z = 3 \qquad (\alpha = 2)}$$
1/30

La strategia per determinare la distanza tra il piano $\Sigma :\ 2\,x + 4\,y - 4\,z = 0$ ed il piano $\Sigma_2 :\ x + 2\,y - 2\,z = 3$ consiste nello scegliere un punto a caso di Σ_2 e nell'utilizzare quindi la formula per il computo della distanza punto/piano. Un punto conveniente è forse $T = (3, 0, 0)$. A questo punto possiamo riempire il riquadro.

$$\boxed{d(\Sigma, \Sigma_\alpha) = \frac{|2\,(3) + 4\,(0) - 4\,(0)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = \frac{6}{6} = 1}$$
2/30

1.b. Verificare che le rette R_1 ed R_2 di equazioni simmetriche $x = y = z$ e $x + 1 = y/2 = z/3$ sono sghembe, e calcolarne la distanza.

Le due rette non sono parallele poichè i vettori $(1, 1, 1)$ (parallelo ad R_1) e $(1, 2, 3)$ (parallelo ad R_2) non sono tra di loro paralleli (ossia proporzionali). Inoltre, R_1 ed R_2 non si incontrano poichè per un ipotetico punto in comune dovremmo avere $y = 0$ (che segue da $y = z$ e da $y/2 = z/3$) e quindi $x = 0$ (che segue da $x = y$) ma anche $x = -1$ (che segue da $x + 1 = y/2$). Pertanto le due rette sono sghembe.

Il più corto segmento che congiunge R_1 ed R_2 sarà ortogonale ad entrambe ossia parallelo al vettore $(1, 1, 1) \wedge (1, 2, 3) = (1, -2, 1)$. Si prenda un qualsiasi punto della retta R_1, come ad esempio il punto $(0, 0, 0)$ e si osservi che la retta R_1 sarà contenuta nel piano Π_1 di equazione $(x - 0) - 2(y - 0) + (z - 0) = 0$, ossia $x - 2y + z = 0$. Si prenda un qualsiasi punto della retta R_2, come ad esempio il punto $(-1, 0, 0)$ e ci si avvalga ancora una volta della formula per il computo della distanza punto/piano per riempire il seguente riquadro.

$$\boxed{d(R_1, R_2) = \frac{|1\,(-1) - 2\,(0) + 1\,(0)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}}$$
3/30

1.c. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (1, -2, 3) \qquad Q = v = (0, -1, -2) \qquad T = w = (4, -1, 8)\,.$$

1.c.a. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$$\boxed{u \cdot v \wedge w = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \underbrace{1 \cdot (-1) \cdot 8}_{-8} + \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot 4}_{+16} + 12 - 2 = 18}$$
2/30

Al fine di assicurarmi di aver ottenuto il valore corretto del determinante, ricomputo il determinante avvalendomi solamente di operazioni di riga o colonna. In pratica, almeno in questo caso, conviene ridursi al determinante di una matrice diagonale sommando o sottraendo multipli di riga ad altre righe.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = (1)(-1)(-18) = 18\,,$$

dove ho prima sottratto il quadruplo della prima riga dalla terza, ed ho poi sommato 7 volte la seconda riga alla terza.

1.c.b. Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

L'area del triangolo è metà dell'area del parallelogramma di lati $\vec{PQ} = (0,-1,-2)-(1,-2,3) = (-1,1,-5)$ e $\vec{PT} = (4,-1,8)-(1,-2,3) = (3,1,5)$, ossia metà della lunghezza del vettore $\vec{PQ} \wedge \vec{PT} = (-1,1,-5) \wedge (3,1,5) = (10,-10,-4)$. Pertanto, $Area(PQT) = ||(5,-5,-2)|| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

$$\mathrm{AREA}(PQT) = \tfrac{1}{2}||\vec{PQ} \wedge \vec{PT}|| = ||(5,-5,-2)|| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

2/30

1.c.c. Determinare l'equazione del piano Π_1 passante per P, Q e T.

Il vettore $(10,-10,-4)$ ottenuto al punto precedente è normale a tale piano e quindi possiamo prendere $(5,-5,-2)$ come terna di coefficienti direttori. Poiché il piano passa per $Q = (0,-1,-2)$ l'equazione del piano trova pertanto la forma: $5\,(x-0)-5\,(y-(-1))-2\,(z-(-2)) = 0$, ossia $5\,x-5\,y-2\,z = 9$. È facile verificare che tale equazione risulta soddisfatta anche dai punti Q e T, ottenendo così una verifica esauriente per questo punto (1.c.) ed una verifica parziale per il punto precedente (1.b.).

$\Pi_1 : 5\,x - 5\,y - 2\,z = 9$

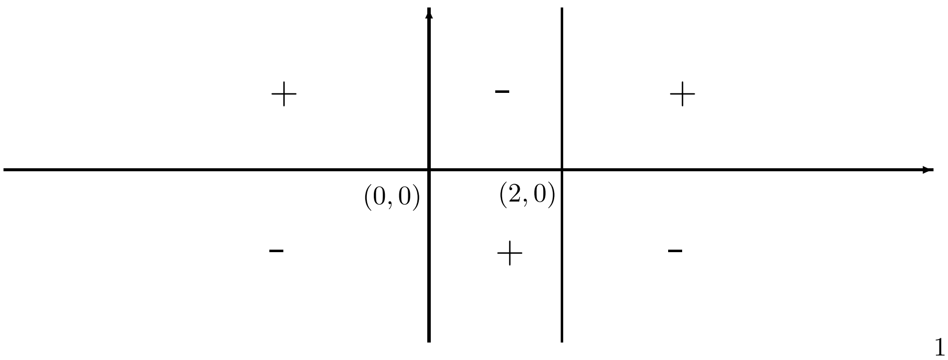
2/30

2. È data la funzione $F(x,y) = 2\,x^2\,y - 4\,x\,y\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

La funzione $F(x,y) = 2\,x^2\,y - 4\,x\,y = 2x(x-2)y$ è data come prodotto di 3 monomi: $2x$, $(x-2)$ e y. Per la legge di annullamento del prodotto, l'insieme di livello $\Sigma_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\ \}$ è catturato nella scrittura $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x=0) \vee (x=2) \vee (y=0)\ \}$. Può risultare utile, per una prima conoscenza della F, tracciarsi le rette in Σ_0 nel piano $x-y$ preso a dominio della F. Tali rette suddividono il piano in 6 regioni, ciascuna labellabile col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "più per più = più". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si disporranno a scacchiera.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 4xy - 4y = 4y(x-1)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2x(x-2)$ ed i punti (x,y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 4y(x-1) &= 0 \\ 2x(x-2) &= 0 \end{cases}$$

ottenuto imponendo la condizione di annullamento del gradiente, debbono tutti avere $x \in \{0,2\}$ per soddisfare alla seconda equazione. Pertanto, l'unico modo per soddisfare anche alla prima equazione è di avere $y = 0$. Abbiamo pertanto 2 soli punti stazionari: il punto $(0,0)$ ed il punto $(2,0)$. Si noti che $F(0,0) = 0 = F(2,0)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) è facile dedurre che entrambi i punti sono di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$ e $(2,0)$.

I punti $(0,0)$ e $(2,0)$ sono entrambi punti di sella.

4/30

2.c. determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1,2,-4)$.

In effetti il punto $(1,2,-4)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1,2) = -4$. Possiamo quindi procedere. Poiché le derivate parziali $F_x = 4y(x-1)$ e $F_y = 2x(x-2)$ esistono e sono continue in un intorno di $(1,2)$, la F è differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto può essere considerato come l'approssimazione lineare della F nel punto $(1,2,-4)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1,2) = F_x(1,2)\,(x-1) + F_y(1,2)\,(y-2)$ ed otteniamo l'equazione $z + 4 = 0 - 2\,(y-2)$, che si semplifica in $2y + z = 0$.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1,2,-4)$:

$z = -2\,y$

4/30

2.d. determinare tutti i punti di massimo e di minimo della funzione nel quadrato Q con vertici in $(0,0)$ e $(2,2)$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera. Infatti, nel quadrato Q la F assume solo valori non positivi, e, ricordando che avevamo compreso l'insieme Σ_0 dei punti su cui la F si annullava, possiamo notare che i tre lati di Q che ricadono in $Q \cap \Sigma_0$ sono tutti punti di massimo assoluto per la F in Q. Restano da individuare i punti di minimo assoluto che necessariamente risiederanno nel segmento da $(0,2)$ a $(2,2)$, ossia sulla retta $y = 2$. Si consideri pertanto la funzione $f(x) = F(x,2) = 4x(x-2) = 4x^2 - 8x$. Questa descrive una parabola con un unico minimo assoluto in corrispondenza di $x = 1$. Pertanto il punto di minimo ricercato è $(1,2)$, dove $F(1,2) = -4$.

2.d)

1 MINIMO ASSOLUTO: $(1,2)$; $F(1,2) = -4$

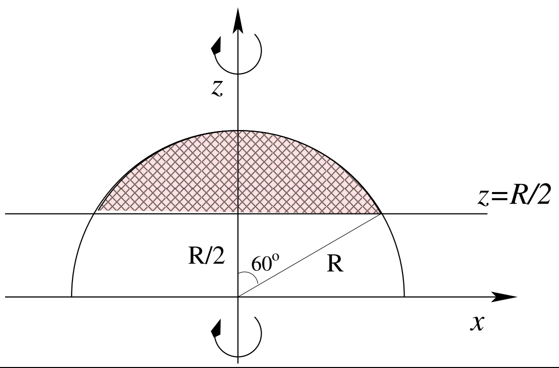
∞ MASSIMI ASSOLUTI: tutti i punti di $Q \cap \Sigma_0$, dove F vale 0

7/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z, sia M_R l'intersezione della palla di raggio R centrata nell'origine con il semispazio $\{z \geq R/2\}$.

3.a. Disegnare M_R (o una sua sezione significativa);
3.b. esprimere M_R in coordinate Cartesiane;
3.c. calcolare il volume di M_R mediante integrazione;
3.d. calcolare la superficie di M_R.

a) Disegnare M_R (o una sua sezione significativa)



1/30

b)

$M_R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{R}{2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right\}$

1/30

Vista la simmetria di M_R rispetto all'asse z, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate cilindriche per il computo del volume V di M_R:

$$\begin{aligned} V &= \int_M 1 \, dx\,dy\,dz = \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta\right)\left(\int_{\frac{R}{2}}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho \, d\rho \, dz\right) \\ &= 2\pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz = \pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} R^2 - z^2 \, dz \\ &= \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{\frac{R}{2}}^{R} = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{24}\right) = \frac{5}{24}\,\pi\,R^3 \,. \end{aligned}$$

c)

$V = \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta\right)\left(\int_{\frac{R}{2}}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho \, d\rho \, dz\right) = \frac{5}{24}\,\pi\,R^3$

5/30

Alternativamente, si poteva osservare che, per ogni valore di z nell'intervallo $[R/2, R]$, il piano orizzontale disposto a quota z interseca il solido M_R in un cerchio di raggio $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ ed area $A(z) = \pi(R^2 - z^2)$. A questo punto,

$$\begin{aligned} V &= \int_{R/2}^{R} A(z) \, dz = \int_{R/2}^{R} \pi(R^2 - z^2) \, dz = \int_{R/2}^{R} \pi R^2 \, dz - \int_{R/2}^{R} \pi z^2 \, dz \\ &= \pi \frac{R^3}{2} - \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_{R/2}^{R} = \pi \left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{24}\right) = \frac{5}{24}\,\pi\,R^3 \,. \end{aligned}$$

In base alla Formula 7 a pag. 293 del testo, Ovviamente, la superficie di M_R che è in contatto con il piano di equazione $z = R/2$ è una circonferenza di raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ ed area $\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 = \frac{3}{4}\pi\,R^2$.

In base alla Formula 7 a pag. 293 del testo, la superficie di M_R che è in contatto col la sfera, dove $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$, è data da

$$\begin{aligned} 2\,\pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} r(z)\sqrt{1 + (r'(z))^2} \, dz &= 2\,\pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} \sqrt{R^2 - z^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - z^2}} \, dz = 2\,\pi\,R \int_{\frac{R}{2}}^{R} \, dz \\ &= 2\,\pi\,R \left(R - \frac{R}{2}\right) = \pi\,R^2 \,, \end{aligned}$$

È poi la somma che fa il totale.

d)

$S = \frac{3}{4}\pi\,R^2 + \pi\,R^2 = \frac{7}{4}\pi\,R^2$

8/30

Prova scritta di Matematica II - 31 marzo 2006 - FILA A
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Calcolare la distanza tra i punti $P = (4, 6, -2)$ e $Q = (1, -6, 2)$.

$$d(P,Q) = \sqrt{\underbrace{(4-1)^2}_{9} + \underbrace{(6-(-6))^2}_{144} + \underbrace{(-2-2)^2}_{16}} = \sqrt{169} = 13\,.$$

1/30

1.b. Calcolare la distanza tra il punto $P = (4, 6, -2)$ ed il piano $\Sigma_1 :\ 4x - 2y + 4z = 2$.

$$d(P, \Sigma_1) = \frac{|4\,(4) - 2\,(6) + 4\,(-2) - 2|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{36}} = \frac{6}{6} = 1$$

2/30

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $P = (4, 6, -2)$ e la retta R di equazioni $4x - 2y + 4z = 2$ e $z = -\frac{1}{2}$.
Si noti che il punto $Q = \left(4, 6, -\frac{1}{2}\right)$ appartiene ad R. Pertanto $d(P, R) \leq d(P, Q) = \frac{3}{2}$. Inoltre, $d(P, R) \geq \frac{3}{2}$ poichè tutti i punti (x, y, z) di R soddisfano $z - \frac{1}{2}$ mentre la terza coordinata di P è -2. Pertanto, $d(P, R) = \frac{3}{2}$.
Un approccio generale per rispondere a questa tipologia di domanda sarebbe passato per l'esprimere R in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ora che il generico punto $R(t)$ di R è espresso in dipendenza di un singolo parametro t, possiamo minimizzare $d(P, R(t)) = \sqrt{(t-4)^2 + ((2\,t-2)-(6))^2 + \left(-\frac{1}{2} - (-2)\right)^2}$ che equivale a minimizzare il funzionale $g(t) = (t-4)^2 + (2\,t-8)^2 = 5\,t^2 - 40\,t + 80$ poichè la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è monotona crescente e poichè il termine $\left(-\frac{1}{2} - (-2)\right)^2$ non dipende dalla t. Il minimo si ha per $t = 4$ come si può evidenziare imponendo $0 = g'(t) = 10\,t - 40$. Il punto di R che minimizza $g(t)$ è pertanto $Q = \left(4, 2\,(4) - 2, -\frac{1}{2}\right) = \left(4, 6, -\frac{1}{2}\right)$. A questo punto le argomentazioni di cui sopra potrebbero risultare più naturali e, se entrano, ci servono come utile verifica.

$$d(P, R) = d\left((4, 6, -2), \left(4, 6, -\tfrac{1}{2}\right)\right) = d\left((0, 0, -2), \left(0, 0, -\tfrac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}$$

3/30

1.d. Calcolare per quale valore di α il piano Σ_α di equazione $6x - 3y + \alpha z = -\alpha$ risulta parallelo al piano Σ_1 di equazione $4x - 2y + 4z = 2$. Determinare quindi la distanza tra questi due piani paralleli.
Chiaramente, $\alpha = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ e $\Sigma_\alpha :\ 6x - 3y + 6z = -6$.

$$\Sigma_\alpha :\ 6x - 3y + 6z = -6 \qquad \left(\alpha = 4 \cdot \tfrac{3}{2} = 6\right)$$

1/30

La strategia per determinare la distanza tra il piano $\Sigma_1 :\ 4x - 2y + 4z = 2$ ed il piano $\Sigma_6 :\ 6x - 3y + 6z = -6$ consiste nello scegliere un punto a caso di Σ_6 e nell'utilizzare quindi la formula per il computo della distanza punto/piano. Un punto conveniente è forse $T = (-1, 0, 0)$. A questo punto possiamo riempire il riquadro.

$$d(\Sigma_1, \Sigma_\alpha) = \frac{|4\,(-1) - 2\,(0) + 4\,(0) - 2|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{36}} = \frac{6}{6} = 1$$

2/30

Dovrebbe ora venire il sospetto che anche il punto $P = (4, 6, -2)$ appartenga al piano Σ_α. In effetti $6\,(4) - 3\,(6) + 6\,(-2) = -6$, ed anche questo fatto ci vale come verifica incrociata.

1.e. Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = 1 + t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2t$ e $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

Il più corto segmento che congiunge R_1 ed R_2 sarà ortogonale ad entrambe ossia parallelo al vettore $(1, 6, 2) \wedge (2, 15, 6) = (6, -2, 3)$. Si prenda un qualsiasi punto della retta R_1, come ad esempio il punto $(1, 1, 0)$ e si osservi che la retta R_1 sarà contenuta nel piano Π_1 di equazione $6(x - 1) - 2(y - 1) + 3(z - 0) = 0$, ossia $6x - 2y + 3z = 4$. Si prenda un qualsiasi punto della retta R_2, come ad esempio il punto $(1, 5, -2)$ e ci si avvalga ancora una volta della formula per il computo della distanza punto/piano per riempire il seguente riquadro.

$$d(R_1, R_2) = \frac{|6\,(1) - 2\,(5) + 3\,(-2) - 4|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{49}} = \frac{14}{7} = 2$$

3/30

2. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo della funzione

$$F(x, y) = 2x^2 - 4x + 2y^2 + 2,$$

nella regione $2x^2 + 3y^2 \leq 16$, specificando la natura di tali estremi (assoluti o relativi).

La funzione $F(x, y) = 2x^2 - 4x + 2y^2 + 2$ è un paraboloide e pertanto, quando considerata su tutto $\mathbb{R}^2$, avrà un unico punto estremale. Esso costituirà un minimo assoluto (i coefficienti dei termini x^2 ed y^2 sono entrambi positivi) e sarà anche l'unico punto stazionario della F. Per individuare tale punto stazionario della F ricerchiamo quel punto di $\mathbb{R}^2$ in cui entrambe le componenti del gradiente della F si annullano. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 4\,x - 4$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 4\,y$ ed il punto ricercato sarà pertanto $(1, 0)$. Tale punto cade internamente alla regione $2x^2 + 3y^2 \leq 16$, e pertanto costituirà un minimo assoluto per la F anche in riferimento a tale regione. Sostituendo i valori delle coordinate nella forma della F, $F(1, 0) = 0$. In effetti $F(x, y) = 2(x - 1)^2 + y^2$ non potrà mai assumere valori negativi e quindi $(1, 0)$ resta confermato come punto di minimo assoluto. La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere anche un punto di massimo assoluto sulla regione assegnata. Esso sarà necessariamente situato sulla frontiera, e pertanto lo ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 4\,x - 4 & = F_x = & \lambda(4x) \\ 4\,y & = F_y = & \lambda(6y) \\ 2x^2 + 3y^2 & = & 16 \end{cases}$$

Di queste equazioni, la seconda è quella che parla per prima portando a considerare due casi:

1. $y = 0$, e quindi $x = \pm 2\sqrt{2}$ (per la terza equazione);

2. $y \neq 0$, quindi $\lambda = \frac{2}{3}$ (per la seconda equazione), quindi $x = 3$ (per la prima equazione), il che risulta impossibile (per la terza equazione).

In conclusione, a seguito di questa analisi restano individuati il punto $(2\sqrt{2}, 0)$ in cui $F(2\sqrt{2}, 0) = 18 - 8\sqrt{2}$, ed il punto $(-2\sqrt{2}, 0)$ in cui $F(-2\sqrt{2}, 0) = 18 + 8\sqrt{2}$. Pertanto, il punto $(-2\sqrt{2}, 0)$ costituisce sicuramente il punto di massimo assoluto per la F sulla regione assegnata.

Volendo comprendere la natura del punto $(2\sqrt{2}, 0)$, risulta di grande aiuto il considerare che le curve di livello della F sono le circonferenze con centro nel punto $(1, 0)$. Poichè lo studio dei moltiplicatori di Lagrange ha condotto a queste due sole soluzioni, ne consegue che due sole di queste circonferenze sono tangenti all'elisse $2x^2 + 3y^2 = 16$: quella con tangenza nel punto $(-2\sqrt{2}, 0)$, che risulta tutta esternaall'elisse, e quella con tangenza nel punto $(2\sqrt{2}, 0)$, che pertanto è tutta contenuta nell'elisse, altrimenti altre circonferenze con centro in $(1, 0)$ sarebbero tangenti all'elisse. Pertanto, il punto $(2\sqrt{2}, 0)$ non è nè di massimo nè di minimo locale: per ridurre il valore della F basta spostarsi verso il punto $(1, 0)$, mentre spostarsi lungo l'elisse porta ad incrementare il valore della F.

1 Minimo Assoluto: $(1, 0)$; $F(1, 0) = 0$

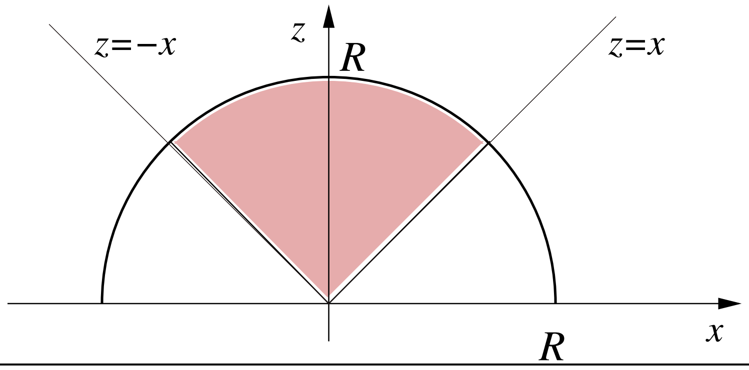
1 Massimo Assoluto: $(-2\sqrt{2}, 0)$; $F(-2\sqrt{2}, 0) = 18 + 8\sqrt{2}$

7/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z, sia M_R l'intersezione della palla di raggio R centrata nell'origine con il cono con vertice nell'origine, asse di simmetria coincidente con l'asse delle z, e la cui intersezione con il piano $y = 0$ è data da $\{(x, 0, z) \mid z \geq |x|\}$.

3.a Disegnare M_R (o una sua sezione significativa);

a) Disegnare M_R (o una sua sezione significativa)



1/30

3.b esprimere M_R in coordinate Cartesiane;

b)

$$M_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ x^2+y^2 \le z^2\ \}\,.$$

1/30

3.c calcolare il volume di M_R mediante integrazione;

Il solido M_R gode di simmetria sferica e, quando espresso tramite le coordinate di Eulero, esso corrisponde al rettangolo $M_R = \big\{(\phi,\theta,\rho) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le R\big\}$. In questo modo, ricordando di introdurre il termine $\rho^2 \sin\phi$ corrispondente allo Jacobiano, otteniamo la seguente misura per il volume di M_R

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2\ \sin\phi\ d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2\ d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi\ d\phi \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R [-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3\,. \end{aligned}$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2\ d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi\ d\phi = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3$

6/30

Come verifica, ricomputiamo lo stesso integrale in coordinate cilindriche, ricordando che ora il fattore dovuto allo Jacobiano è ρ.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \int_0^z \rho\ d\rho\ dz + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho\ d\rho\ dz \right) \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{z^2}{2}\ dz + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \frac{R^2-z^2}{2}\ dz \right) \\ &= \pi \left(\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} + R^2\left(R - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) - \left[\frac{z^3}{3}\right]_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \right) = \pi R^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{12} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che l'integrazione sarebbe risultata assai più difficoltosa se si fosse deciso di integrare prima rispetto a z e poi rispetto a ρ, ossia in questo caso è risultato preferibile spezzare la regione di integrazione in due regioni di tipo 2 piuttosto che non considerarla come un'unica regione di tipo 1 (con riferimento alla figura di cui sopra).

3.d calcolare la superficie di M_R.

In base alla Formula 7 a pag. 293 del testo, la superficie di M_R che è in contatto col cono, dove $r(z) = z$, è data da

$$2\,\pi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} r(z)\sqrt{1+(r'(z))^2}\; dz = 2\,\pi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} z\sqrt{2}\; dz = 2\sqrt{2}\,\pi \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} R^2\,.$$

In virtù della stessa formula, la superficie di M_R che è in contatto col la sfera, dove $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$, è data da

$$\begin{aligned} 2\,\pi \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} r(z)\sqrt{1+(r'(z))^2}\; dz &= 2\,\pi \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} \sqrt{R^2-z^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-z^2}}\; dz = 2\,\pi\, R \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}\; dz \\ &= 2\,\pi\, R\left(R - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \pi\, R^2\,(2-\sqrt{2})\,, \end{aligned}$$

È poi la somma che fa il totale.

d)

$S = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} R^2 + \pi\, R^2\,(2-\sqrt{2}) = \pi\, R^2\, \frac{4-\sqrt{2}}{2}$

8/30

Prova scritta di Matematica II - 16 marzo 2006 - FILA A
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (2,4,4) \qquad Q = v = (4,2,0) \qquad T = w = (6,0,8)\,.$$

1.a. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$$u \cdot v \wedge w = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \underbrace{2\,(2 \cdot 8)}_{32} + \underbrace{(-1)\,4\,(4 \cdot 8)}_{-128} + \underbrace{4\,(-1)\,(2 \cdot 6)}_{-48} = -144$$

2/30

Al fine di assicurarmi di aver ottenuto il valore corretto del determinante, ricomputo il determinante avvalendomi solamente di operazioni di riga o colonna. In pratica, almeno in questo caso, conviene ridursi al determinante di una matrice diagonale sommando o sottraendo multipli di riga ad altre righe.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(18)(2)(4) = -144\,,$$

dove ho prima sottratto il doppio della prima riga dalla terza al fine di sgoberare la terza colonna, ed ho poi sommato il quadruplo della seconda riga alla terza al fine di sgomberare anche la seconda colonna.

1.b. Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

L'area del triangolo è metà dell'area del parallelogramma di lati $\vec{PQ} = (4,2,0) - (2,4,4) = (2,-2,-4)$ e $\vec{PT} = (6,0,8) - (2,4,4) = (4,-4,4)$, ossia metà della lunghezza del vettore $\vec{PQ} \wedge \vec{PT} = (2,-2,-4) \wedge (4,-4,4) = (-24,-24,0)$. Pertanto, $Area(PQT) = ||(12,12,0)|| = 12\sqrt{2}$.

$$\text{AREA}(PQT) = \tfrac{1}{2}||\vec{PQ} \wedge \vec{PT}|| = ||(12,12,0)|| = 12\sqrt{2}$$

2/30

1.c. Determinare l'equazione del piano Π_1 passante per P, Q e T.
Il vettore $(12,12,0)$ ottenuto al punto precedente è normale a tale piano e quindi possiamo prendere $(1,1,0)$ come terna di coefficienti direttori. Poiché il piano passa per $P = (2,4,4)$ l'equazione del piano trova pertanto la forma: $(x-2)+(y-4) = 0$, ossia $x+y = 6$. È facile verificare che tale equazione risulta soddisfatta anche dai punti Q e T, ottenendo così una verifica esauriente per questo punto (1.c.) ed una verifica parziale per il punto precedente (1.b.).

$\Pi_1 : x + y = 6$

2/30

1.d. Determinare l'equazione del piano Π_2 passante per $P = (2,4,4)$ e che è tangente in P alla sfera S di raggio 6 centrata nell'origine.

Tale piano risulta ortogonale al raggio $\vec{OP} = (2,4,4)$ e possiamo pertanto prendere $(1,2,2)$ come terna di coefficienti direttori. Poiché il piano passa per $P = (2,4,4)$ potrà essere espresso tramite l'equazione $x + 2y + 2z = 18$.

$\Pi_2 : x + 2y + 2z = 18$

2/30

1.e. Determinare le equazioni parametriche della retta R_1 passante per P ed ortogonale a Π_1 e le equazioni parametriche della retta R_2 passante per P ed ortogonale a Π_2.
Risulta immediato fornire l'equazione della retta R_1 in forma vettoriale parametrica:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

e l'equazione della retta R_2 in forma vettoriale parametrica:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

Forniamo nello spazio apposito riservato in copertina le equivalenti riscritture scalari di queste due equazioni parametriche.

$$R_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + t \\ z = 4 \end{cases} \qquad R_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

2/30

1.f. Sia P_1 il punto diverso da P in cui R_1 interseca la sfera S. Sia P_2 il punto diverso da P in cui R_2 interseca la sfera S. Fornire le distanze $d(P_1, P)$ e $d(P_2, P)$.

I due punti in cui la retta R_1 interseca la sfera S corrisponderanno ai due valori di t che portano al soddisfacimento dell'equazione della sfera $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 6^2$ riscritta nella sola t tramite le formule parametriche di R_1. In pratica, si richiede di reperire le due radici dell'equazione di secondo grado $(2 + t)^2 + (4 + t)^2 + 4^2 = 36$, sapendo poi già che una di queste radici - quella cui corrisponde il punto P, sarà data da $t = 0$. Perveniamo quindi all'equazione $0 = 2t^2 + 12t + 24 = 2t(t + 6)$, che manifesta la radice $t = -6$. Il valore $t = -6$ del parametro, sostituito nelle equazioni parametriche di R_1, ci consegna il punto $P_1 = (2 - 6, 4 - 6, 4) = (-4, -2, 4)$. Una rapida verifica $((-4)^2 + (-2)^2 + (4)^2 = 16 + 4 + 16 = 36 = 6^2)$ ci conferma che tale punto appartiene anche alla sfera. Per il computo della distanza Euclidea tra P e P_1 si utilizzano infine le formule derivanti dal teorema di Pitagora: $d(P_1, P) = \sqrt{6^2 + 6^2 + 0^2} = 6\sqrt{2}$.

Tutto questo percorso può essere evitato nel computo di $d(P_2, P) = 6$. Si noti infatti che il tratto della retta R_2 che cade internamente alla sfera S è un diametro di S e pertanto $d(P_2, P) = 2 \cdot 6 = 12$. Possiamo comunque verificare che il punto $(-2, -4, -4)$, ossia l'antipodate di P, che sicuramente appartiene alla sfera, appartiene anche alla retta R_2. Possiamo inoltre verificare che $\sqrt{4^2 + 8^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12$.

$d(P_1, P) = 6\sqrt{2}$

$d(P_2, P) = 12$

3/30

2. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo della funzione

$$F(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5,$$

nella regione $x^2 + y^2 \leq 16$, specificando la natura di tali estremi (assoluti o relativi).

La funzione $F(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ è un paraboloide e pertanto, quando considerata su tutto $\mathbb{R}^2$, avrà un unico punto estremale. Esso costituirà un minimo assoluto (i coefficienti dei termini x^2 ed y^2 sono positivi) e sarà anche l'unico punto stazionario della F. Per individuare tale punto stazionario della F ricerchiamo quel punto di $\mathbb{R}^2$ in cui entrambe le componenti del gradiente della F si annullano. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 4\,x - 4$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 6\,y$ ed il punto ricercato sarà pertanto $(1, 0)$. Tale punto cade internamente alla regione $x^2 + y^2 \leq 16$, e pertanto costituirà un minimo assoluto per la F anche in riferimento alla regione $x^2 + y^2 \leq 16$. Sostituendo i valori delle coordinate nella forma della F, $F(1, 0) = -7$. La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere anche un punto di massimo assoluto sulla regione assegnata. Esso sarà necessariamente situato sulla frontiera, e pertanto lo ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 4\,x - 4 = \lambda(2x) \\ 6\,y = \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

I punti di $\mathbb{R}^2$ che ne risultano individuati sono $(-2, \pm 2\sqrt{3})$ in cui $F(-2, \pm 2\sqrt{3}) = 47$, il punto $(4, 0)$ in cui $F(4, 0) = 11$, ed il punto $(-4, 0)$ in cui $F(-4, 0) = 43$. Pertanto i punti $(-2, \pm 2\sqrt{3})$ sono sicuramente punti di massimo assoluto per la F sulla regione assegnata.

Volendo studiare la natura degli altri punti conviene forse descrivere la frontiera della regione assegnata in termini di un unico parametro.

$$\begin{cases} x &= 4\cos\theta \\ y &= 4\sin\theta \end{cases}$$

Sostituendo nella F otteniamo

$$F(\theta) = 32\cos^2\theta + 48\sin^2\theta - 16\cos\theta - 5 = 48 - 16\cos^2\theta - 16\cos\theta - 5\,.$$

Ora, $F' := \frac{\partial F}{\partial\theta} = 32\cos\theta\sin\theta + 16\sin\theta$ e $F'' := \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} = 32\cos^2\theta - 32\sin^2\theta + 16\cos\theta = 64\cos^2\theta - 32 + 16\cos\theta$. Pertanto, $F' = 0$ solo quando $\sin\theta = 0$ (ossia $\theta = 0, \pi$) oppure $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ (ossia $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$). Sostituendo tali punti nella derivata seconda otteniamo: $F''(0) = 48$, $F''(\pi) = 16$, $F''(\frac{2}{3}\pi) = F''(\frac{4}{3}\pi) = 16 - 32 - 8 = -24$.

I punti $(4,0)$ e $(-4,0)$ vivono pertanto dei minimi qualora ci si muova lungo la frontiera della regione assegnata e non sono pertanto punti estremali in quanto il valore della F tende invece a decrescere se ci si muove verso l'interno della regione assegnata verso il punto di minimo del paraboloide. Infatti il gradiente $(F_x, F_y) = (4\,x - 4, 6\,y)$ e quindi nel punto $(-4,0)$ il gradiente della F vale $(-20,0)$ e punta quindi verso l'esterno della regione circolare assegnata. Pertanto, se ci si sposta verso l'origine, il valore della F tende a decrescere, mentre se ci si muove lungo la frontiera il valore della F aumenta. Lo stesso discorso vale in $(4,0)$ dove il gradiente è dato dal vettore $(12,0)$.

> 1 Minimo Assoluto: $(1,0)$; $F(1,0) = -7$
>
> 2 Massimi Assoluti: $(-2, 2\sqrt{3})$, $(-2, -2\sqrt{3})$; $F(-2, \pm 2\sqrt{3}) = 47$
>
> 7/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati: $E =$ parte del semipiano $y = 0$, $x > 0$ descritta dalle disequazioni $x^2 + z^2 \leq 4$ e $z \leq x$, e $M =$ solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z. Calcolare l'integrale triplo

$$I = \int_M z\; dx\, dy\, dz\,.$$

La regione di integrazione, ove descritta in coordiante sferiche, corrisponde al rettangolo $R_3 = \left\{(\phi,\theta,\rho) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi,\; 0 \leq \rho \leq 2\right\}$. La nostra prima scelta è pertanto quella di integrare in coordinate sferiche ricordandosi di introdurre il termine $\rho^2\sin\phi$ corrispondente allo Jacobiano, ed avvalendoci dell'equazione $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$ al fine di facilitare l'integrazione. In questo modo,

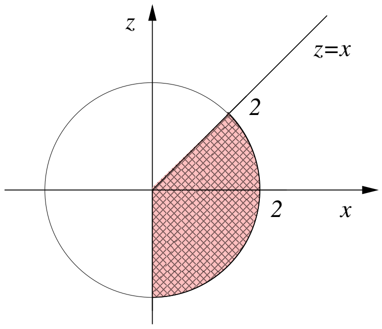
$$\begin{aligned} I &= \int_M z\; dV = \int_{R_3} \rho\cos\phi\,(\rho^2\sin\phi)\; d\theta\; d\rho\; d\phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3\; d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin\phi\cos\phi\; d\phi \\ &= 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{2\pi}{4}}^{2\pi} \sin(2\phi)\; d(2\phi) \\ &= 2\pi\,[-\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = 2\,\pi\,(-(1-0)) = -2\,\pi\,. \end{aligned}$$

L'utilizzo della formula trigonometrica per la duplicazione dell'angolo poteva essere aggirato considerando che $\frac{d\sin\phi}{d\phi} = \cos\phi$, da cui la sostituzione $\cos\phi\, d\phi = d\sin\phi$, e quindi

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin\phi\cos\phi\; d\phi = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \sin\phi\; d\sin\phi = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\,.$$

> $I = \int_0^{2\pi}\; d\theta \int_0^2 \rho^3\; d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin\phi\cos\phi\; d\phi = -2\,\pi$
>
> 8/30

Ma per una più ampia verifica, ricomputiamo il valore di I in coordinate cilindriche. La simmetria assiale di M attorno all'asse delle z fa si che anche in coordinate cilindriche la variabile θ si separi. Tuttavia la figura E tracciata nel piano $x - z$ deve essere vista come l'unione disgiunta di due regioni di tipo 1 affiancate (per $x = \rho \leq \sqrt{2}$ a per $x = \rho \geq \sqrt{2}$) e quindi l'integrale si spezza in corrispondenza di $\rho = \sqrt{2}$.



In questo modo,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_M z\,dV = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho \int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\rho} z\,dz\,d\rho + \int_{\sqrt{2}}^{2} \rho \int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z\,dz\,d\rho \right) \\
&= 2\,\pi \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\rho} d\rho + \int_{\sqrt{2}}^{2} \rho \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho \right) \\
&= \pi \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho \left[z^2 \right]_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\rho} d\rho \right) = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 - (4\rho - \rho^3)\,d\rho \\
&= \pi \int_0^{\sqrt{2}} 2\,\rho^3 - 4\rho\,d\rho = \pi \left[\frac{\rho^4}{2} - 2\rho^2 \right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= \pi\,(2-4) = -2\,\pi\,.
\end{aligned}
$$

4.a. Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola $y = ax^2$ compreso tra i punti $(0,0)$ e $(1,a)$.

Più in generale, otteniamo un'equazione che esprima la lunghezza dell'arco di parabola $y = ax^2$ compreso tra i punti $(0,0)$ e (B, aB^2). La derivata della funzione $y = ax^2$ è $y' = 2ax$, e pertanto

$$
L = \int_0^B \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \int_0^B \sqrt{1 + (2ax)^2}\,dx = \int_0^B \sqrt{1 + 4a^2x^2}\,dx\,.
$$

Per la ricerca di una primitiva ci si avvale dell'integrazione per parti, ossia

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1+Cx^2}\,dx &= \int 1 \cdot \sqrt{1+Cx^2}\,dx = x\,\sqrt{1+Cx^2} - \int x\,\frac{Cx}{\sqrt{1+Cx^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1+Cx^2} - \int \frac{1+Cx^2}{\sqrt{1+Cx^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+Cx^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1+Cx^2} - \int \sqrt{1+Cx^2}\,dx + \log(\sqrt{1+Cx^2} + x)\,.
\end{aligned}
$$

Risolvendo nel termine $\int \sqrt{1+Cx^2}\,dx$ l'equazione così ottenuta si perviene alla seguente espressione per la primitiva di pertinenza.

$$
\int \sqrt{1+Cx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+Cx^2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+Cx^2} + x)\,.
$$

Nella derivazione di cui sopra ci si è avvalsi della formula

$$
\int \frac{1}{\sqrt{1+Cx^2}}\,dx = \log(\sqrt{1+Cx^2} + x)\,,
$$

che può comunque essere ricavata ad esempio producendo la seguente riscrittura dell'integrando dove il numeratore eguaglia la derivata del denominatore.

$$
\int \frac{1}{\sqrt{1+Cx^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+Cx^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+Cx^2}+x}{\sqrt{1+Cx^2}+x}\,dx = \int \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+Cx^2}}}{\sqrt{1+Cx^2}+x}\,dx\,.
$$

Tornando al nostro esercizio, avvalendoci della primitiva di pertinenza esibita più sopra possiamo concludere:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^B \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1+4a^2x^2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+4a^2x^2}+x)\right]_0^B \\ &= \frac{B}{2}\sqrt{1+4a^2B^2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+4a^2B^2}+B)\,. \end{aligned}$$

$$\boxed{L = \int_0^B \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx = \tfrac{B}{2}\sqrt{1+4a^2B^2} + \tfrac{1}{2}\log(\sqrt{1+4a^2B^2}+B)}$$

3/30

4.b. Calcolare l'area della superfice ottenuta facendo ruotare attorno all'asse delle y l'arco di parabola di cui al punto precedente.

$$A = 2\pi\int_0^B y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = 2\pi\int_0^B ax^2\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx\,.$$

Anche in questo caso la ricerca della primitiva passa per la lettura di un'equazione ottenuta con l'integrazione per parti, ossia

$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{1+Cx^2}\,dx &= \frac{x^3}{3}\sqrt{1+Cx^2} - \int\frac{Cx^4}{3\sqrt{1+Cx^2}}\,dx \pm \int\frac{x^2}{3\sqrt{1+Cx^2}}\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}\sqrt{1+Cx^2} - \int\frac{x^2(Cx^2+1)}{3\sqrt{1+Cx^2}}\,dx + \int\frac{x^2}{3\sqrt{1+Cx^2}}\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}\sqrt{1+Cx^2} - \int\frac{x^2\sqrt{1+Cx^2}}{3}\,dx + \int\frac{x^2}{3\sqrt{1+Cx^2}}\,dx\,. \end{aligned}$$

Risolvendo tale equazione nel termine $\int x^2\sqrt{1+Cx^2}\,dx$ si perviene alla seguente espressione per la primitiva di pertinenza.

$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{1+Cx^2}\,dx &= \frac{x^3}{4}\sqrt{1+Cx^2} + \int\frac{x^2}{4\sqrt{1+Cx^2}}\,dx \\ &= \frac{x^3}{4}\sqrt{1+Cx^2} + \int\frac{x^2+\frac{1}{C}}{4\sqrt{1+Cx^2}}\,dx - \int\frac{\frac{1}{C}}{4\sqrt{1+Cx^2}}\,dx \\ &= \frac{x^3}{4}\sqrt{1+Cx^2} + \frac{1}{4C}\int\sqrt{1+Cx^2}\,dx - \frac{1}{4C}\int\frac{1}{\sqrt{1+Cx^2}}\,dx \\ &= \frac{x^3}{4}\sqrt{1+Cx^2} + \frac{1}{4C}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1+Cx^2} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+Cx^2}+x)\right)\,. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi a\int_0^B x^2\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx \\ &= 2\pi a\left[\frac{x^3}{4}\sqrt{1+4a^2x^2} + \frac{1}{16a^2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1+4a^2x^2} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+4a^2x^2}+x)\right)\right]_0^B \\ &= \pi a\left(\frac{B^3}{2}\sqrt{1+4a^2B^2} + \frac{1}{16a^2}\left(B\sqrt{1+4a^2B^2} - \log(\sqrt{1+4a^2B^2}+B)\right)\right)\,. \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 2\pi\int_0^B y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = 2\pi a\int_0^B x^2\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx\,.}$$

5/30

14/12/2005, prova scritta

1. Dati i vettori $u = (2, 2, 1)$, $v = (0, 1, 2)$, e $w = (4, 0, 3)$, avremo

$$u \cdot v \wedge w = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{2\,(1 \cdot 3)}_{6} + \underbrace{(-1)\,2\,(-1)\,(2 \cdot 4)}_{16} + \underbrace{1\,(-1)\,(1 \cdot 4)}_{-4} = 18$$

2/30

2. In merito al piano Π passante per il punto $P = (2, 2, 1)$ e tangente in P ad una sfera centrata nell'origine - si noti che il vettore $(2, 2, 1)$ è normale a Π. L'equazione di Π sarà pertanto $2x+2y+z = c$ per un qualche c. Il valore di c risulta poi determinato dalla condizione $P \in \Pi$, ossia dall'equazione $2(2) + 2(2) + 1(1) = c$, da cui $c = 9$.

$$\Pi = \{\, (x, y, z) \ : \ 2x + 2y + z = 9 \,\}$$

8/30

3. La funzione $F(x, y) = y(x+1)^2$ appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ossia è continua e ammette derivate di ogni ordine su tutto $\mathbb{R}^2$. Individuare i punti stazionari della F significa pertanto (si veda il testo a pag. 223 per la definizione di punto *critico* o *stazionario*) individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui entrambe le componenti del gradiente della F si annullano. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,y\,(x+1)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = (x+1)^2$ ed i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2\,y\,(x+1) & = & 0 \\ (x+1)^2 & = & 0 \end{cases}$$

debbono tutti avere $x = -1$ per soddisfare alla seconda equazione. La condizione $x = -1$ è poi sufficiente al fine di soddisfare entrambe le equazioni. L'insieme dei punti stazionari è quindi $\{\, (x, y) \ : \ x = -1 \,\}$, ossia la retta $x = -1$, che è una regione connessa di $\mathbb{R}^2$. Si noti che la F vale 0 su tutti i punti di questa regione. Si noti inoltre che non appena $x \neq -1$ allora il segno della F coincide con il segno della y. Possiamo concludere che la situazione è quella del riquadro qui sotto.

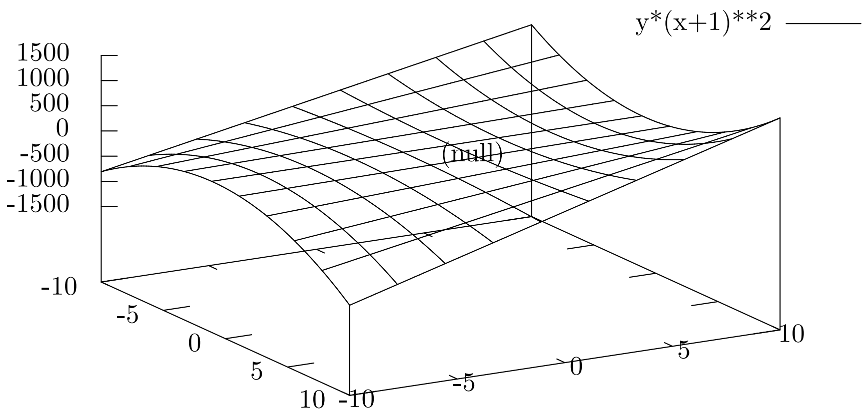
PUNTI STAZIONARI: $\{\, (x, y) \ : \ F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0 \,\} = \{\, (x, y) \ : \ x = -1 \,\}$.

Il punto $(-1, 0)$ è di sella.

Ogni punto $(-1, y)$ con $y > 0$ (con $y < 0$) è di minimo (massimo) relativo.

10/30

Non era richiesto nell'esercizio, ma riportiamo qui sotto una raffigurazione della F per invogliarvi all'uso di gnuplot ed al gusto dell'esplorazione dei grafici in 3D.



Si osservi ad esempio che $F(x,y) = y(x+1)^2$ è funzione lineare nella sola y e si cerchi riscontro di questo fatto nel grafico qui sopra cercando di rappresentarsi le intersezioni con i piani ad x costante. Si cerchi poi il sorriso nelle intersezioni con i piani ad y costante. Della retta di interfaccia tra riso e pianto abbiamo già parlato quando abbiamo osservato che essa è perfettamente orizzontale e galleggia a quota 0. Riesci a distinguere tale retta nel grafico qui sopra? In ogni caso, dal sito www di riferimento al corso puoi scaricarti dei sorgenti gnuplot per impostare convenientemente ciascuna delle funzioni considerate in questo documento. Caricando questi sorgenti da gnuplot, potrai, tramite interattivo ed intuitivo uso del mouse, cercare angolazioni chiarificatrici od eventualmente scuarci sorprendenti o reconditi sul grafico della funzione.

4. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati:

$$E = \{(x, 0, z) \mid x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq \sqrt{3}x\ \}$$

$M =$ solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

(a) Disegnare l'insieme E nel piano Cartesiano x, z;

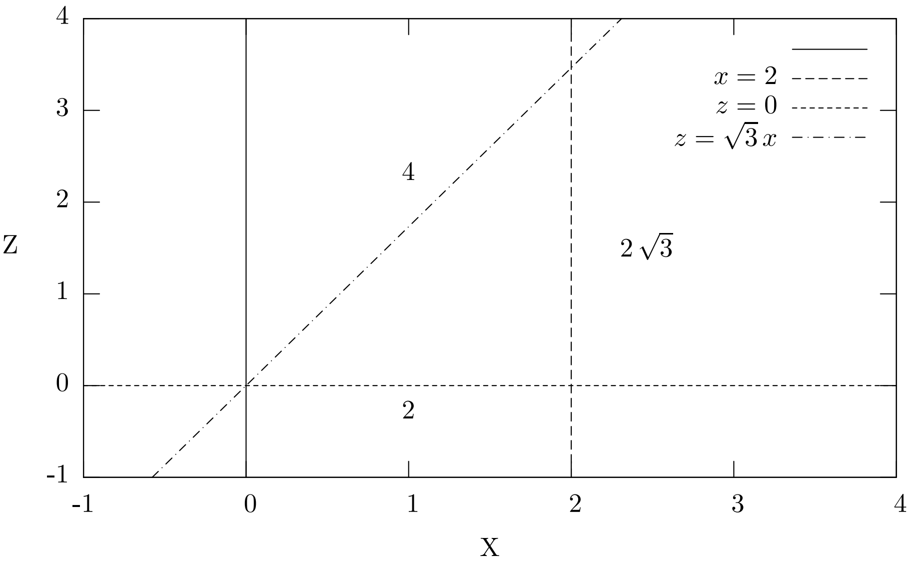
(b) calcolare l'area $A(E)$ dell'insieme E;

(c) descrivere e disegnare l'insieme M nel riferimento Cartesiano x, y, z;

(d) calcolare l'integrale triplo

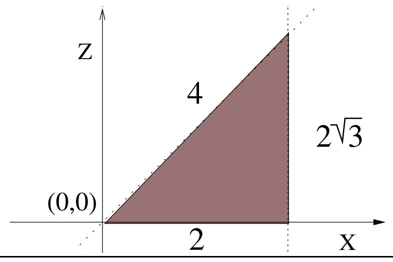
$$I = \int_M z\ dx\, dy\, dz\,.$$

(a) L'insieme E è il triangolo rettangolo di base 2 ed altezza $2\sqrt{3}$ che nel piano x, z risulta delimitato dalle rette $z = 0$, $x = 2$ e $z = \sqrt{3}x$.



A ben vedere si tratta di mezzo triangolo equilatero (tagliato lungo l'altezza). Ne riportiamo quantomeno la sagoma nel ristretto riquadro.

Disegnare l'insieme E



2/30

Applichiamo quindi la formula per l'area di un triangolo ($A = b \cdot h/2$).

$A(E) = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

5/30

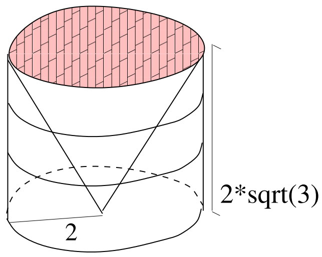
Per ottenere una descrizione analitica di M, conviene considerare la seguente riscrittura equivalente della descrizione analitica fornitaci per E:

$$E = \{(x, 0, z) \mid x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z^2 \leq 3\,x^2\ \}\,.$$

Si consideri $M := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z^2 \leq 3(x^2 + y^2)\ \}$. Per verificare che M è effettivamente il solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse z si osservi che M gode di simmetria assiale rispetto all'asse z e che E corrisponde all'intersezione di M con il primo quadrante del piano x, z.

In ogni caso, il solido di rotazione sarà un cilindro da cui è stato scavato fuori un cono, come rappresentato nella figura riportata nel riquadro.

Disegnare l'insieme M



2/30

Pertanto, per ogni valore di z nell'intervallo $[0, 2\sqrt{3}]$, l'intersezione del solido M con il piano orizzontale disposto a quota z è un cerchio di raggio 2 cui è stato tolto un cerchio ad esso concentrico e di raggio $\frac{z}{\sqrt{3}}$. Indichiamo con $A(z)$ l'area di tale sezione di M. Per quanto detto, $A(z) = \pi(2)^2 - \pi\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4\pi - \frac{\pi}{3}z^2$. A questo punto,

$$\begin{aligned} I &= \int_M z\ dx\,dy\,dz = \int_0^{2\sqrt{3}} z\,A(z)\ dz = \int_0^{2\sqrt{3}} 4\pi\,z - \frac{\pi}{3}z^3\ dz \\ &= \left[2\pi\,z^2 - \frac{\pi}{12}z^4\right]_0^{2\sqrt{3}} = 24\,\pi - 12\,\pi = 12\,\pi\,. \end{aligned}$$

$I = \int_0^{2\sqrt{3}} 4\pi\,z - \frac{\pi}{3}z^3\ dz = 12\,\pi$

5/30

Vogliamo ora verificare che $I = 12\,\pi$ ripetendo il computo in coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned} I &= \int_M z\ dx\,dy\,dz = \left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\sqrt{3}} z \int_{\frac{z}{\sqrt{3}}}^{2} \rho\,d\rho\,dz\right) \\ &= 2\pi \int_0^{2\sqrt{3}} z\ \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{z}{\sqrt{3}}}^{2}\ dz = \pi \int_0^{2\sqrt{3}} 4z - \frac{z^3}{3}\ dz \\ &= \pi\,\left[2z^2 - \frac{z^4}{12}\right]_0^{2\sqrt{3}} = \pi\,(24 - 12) = 12\,\pi\,. \end{aligned}$$

Infine, cosa non richiesta dal testo e quindi del tutto incidentale nella presente correzione, il volume del solido M può essere convenientemente calcolato come la differenza tra il volume del cono e quello del cilindro. Poichè il volume di un cilindro è pari ad un terzo del volume del cono su stessa base e di pari altezza, ne consegue che possiamo più semplicemente prendere i $2/3$ del volume del cilindro. Pertanto, $Vol(M) = \frac{2}{3}\,4\,\pi\,(2\,\sqrt{3}) = \frac{16\,\sqrt{3}}{3}\,\pi$.

Prova scritta di Matematica II - 15/9/2005

1. Determinare le equazioni dei seguenti piani:
   (a) piano Π_1 passante per $(1, 1, 0), (2, 1, 0), (0, 2, 2)$;
   (b) piano Π_2 passante per $(0, 2, 2)$ e ortogonale a $(0, 2, -1)$;
   (c) piano Π_3 contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (1 + t, 1, 0)$ e che interseca l'asse delle x nel punto $(0, 2, 2)$.

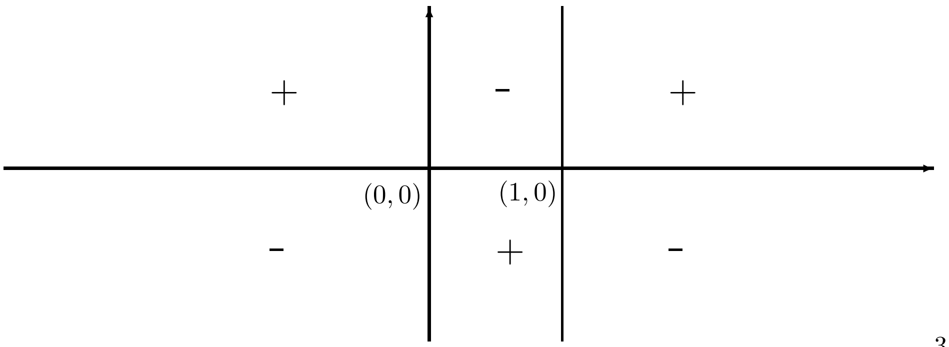
Se Π_1 passa per $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 0)$, e $(0, 2, 2)$, allora i vettori $(2, 1, 0) - (1, 1, 0) = (1, 0, 0)$ e $(2, 1, 0) - (0, 2, 2) = (2, -1, -2)$ sono entrambi paralleli a Π_1. Ne consegue che Π_1 è ortogonale a $(1, 0, 0) \wedge (2, -1, -2) = (0, 2, -1)$. Ma allora i quesiti (a) e (b) cadono insieme, ossia $\Pi_1 = \P_2$. Inoltre Π_1 risulta descritto da un'equazione del tipo $0 \cdot x + 2 \cdot y + (-1)z = c$, ossia $2y - z = c$. Per determinare la costante c si sfrutta una qualsiasi delle condizioni di passaggio per un punto. Ad esempio, visto che si richiede il piano passi per $(1, 1, 0)$, allora $2 \cdot 1 + (-1)0 = c$, ossia $c = 2$. Viene automatico il sospetto che questo piano $2y - z = 2$ sia anche quello richiesto al punto (c). In effetti, esso passa per $(0, 2, 2)$, e contiene 2 diversi punti della retta $P(t)$ fornita in forma parametrica: il punto $(1, 1, 0) = P(0)$ ed il punto $(2, 1, 0) = P(1)$. Giocoforza l'intera retta resta contenuta nel piano Π_1.

(a) $2y - z = 2$ (b) $2y - z = 2$ (c) $2y - z = 2$ 3+3+3/30

2. È data la funzione
$$F(x, y) = x(x - 1)y\,.$$

La F è data come prodotto di 3 monomi: x, $(x - 1)$ e y. Per la legge di annullamento del prodotto, l'insieme di livello $\Sigma_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\ \}$ è catturato nella scrittura $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0) \vee (x = 1) \vee (y = 0)\ \}$. E lo studio del segno deriva dalle 4 regole della serie "più per più = più".

a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



3/30

b) determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;
Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = (2x - 1)y$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x(x - 1)$ ed i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} (2x - 1)y &= 0 \\ x(x - 1) &= 0 \end{cases}$$

debbono tutti avere $x \in \{0, 1\}$ per soddisfare alla seconda equazione. Pertanto la prima equazione implica $y = 0$. Abbiamo pertanto 2 soli punti stazionari: il punto $(0, 0)$ ed il punto $(1, 0)$. Si noti che $F(0, 0) = 0 = F(1, 0)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) è facile dedurre che entrambi i punti sono di sella.

b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

I punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono entrambi punti di sella. 4/30

c) determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(2, 1, 2)$.

Poichè le derivate parziali $F_x = (2x-1)y$ e $F_y = x(x-1)$ esistono e sono continue in un intorno di $(2,1,2)$, la F è differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto può essere considerato come l'approssimazione lineare della F nel punto $(2,1,2)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(2,1) = F_x(2,1)\,(x-2) + F_y(2,1)\,(y-1)$ ed otteniamo l'equazione $z - 2 = 3\,(x-2) + 2\,(y-1)$, che si semplifica in $z = 3x + 2y - 6$.

c) Equazione del piano tangente F in $(2,1,2)$:

$$z = 3x + 2y - 6$$

5/30

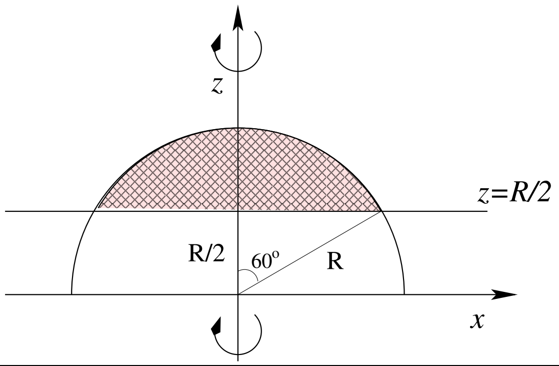
3. In un riferimento Cartesiano x, y, z, sia M_R l'intersezione della palla di raggio R centrata nell'origine con il semispazio $\{z \geq R/2\}$.

   (a) Disegnare M_R (o una sua sezione significativa);

   (b) esprimere M_R in coordinate Cartesiane;

   (c) calcolare il volume di M_R mediante integrazione.

a) Disegnare M_R (o una sua sezione significativa)



1/30

b)

$$M_R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \tfrac{R}{2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right\}$$

1/30

Vista la simmetria di M_R rispetto all'asse z, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate cilindriche per il computo del volume V di M_R:

$$\begin{aligned} V &= \int_M 1\ dx\,dy\,dz = \left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)\left(\int_{\frac{R}{2}}^{R}\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho\ d\rho\,dz\right) \\ &= 2\pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz = \pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} R^2 - z^2\ dz \\ &= \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{\frac{R}{2}}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{24}\right) = \frac{5}{24}\,\pi\,R^3\,. \end{aligned}$$

c)

$$V = \left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)\left(\int_{\frac{R}{2}}^{R}\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho\ d\rho\,dz\right) = \tfrac{5}{24}\,\pi\,R^3$$

10/30

Alternativamente, si poteva osservare che, per ogni valore di z nell'intervallo $[R/2, R]$, il piano orizzontale disposto a quota z interseca il solido M_R in un cerchio di raggio $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ ed area $A(z) = \pi(R^2 - z^2)$. A questo punto,

$$\begin{aligned} V &= \int_{R/2}^{R} A(z)\ dz = \int_{R/2}^{R} \pi(R^2 - z^2)\ dz = \int_{R/2}^{R} \pi R^2\ dz - \int_{R/2}^{R} \pi z^2\ dz \\ &= \pi \frac{R^3}{2} - \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_{R/2}^{R} = \pi \left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{24}\right) = \frac{5}{24}\, \pi\, R^3\,. \end{aligned}$$

Prova scritta di Matematica II - 24/6/2005

1. Dati il piano Π_0 di equazione $x + 2y - z = 0$ e il punto $P_0 = (2, 1, 2)$,

   a) determinare equazioni parametriche della retta R_1 passante per P_0 ed ortogonale a Π_0;

   $$R_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t \qquad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

   4/30

   b) determinare la minima distanza $d(P_0, \Pi_0)$ del punto P_0 dal piano Π_0.

   $$d(P_0, \Pi_0) = \frac{(2)+2\cdot(1)-(2)}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

   4/30

   c) determinare le equazioni Cartesiane della sfera di centro P_0 che è tangene il piano Π_0.

   Ovviamente il raggio di tale sfera è $d(P_0, \Pi_0) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

   $$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \leq \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

   4/30

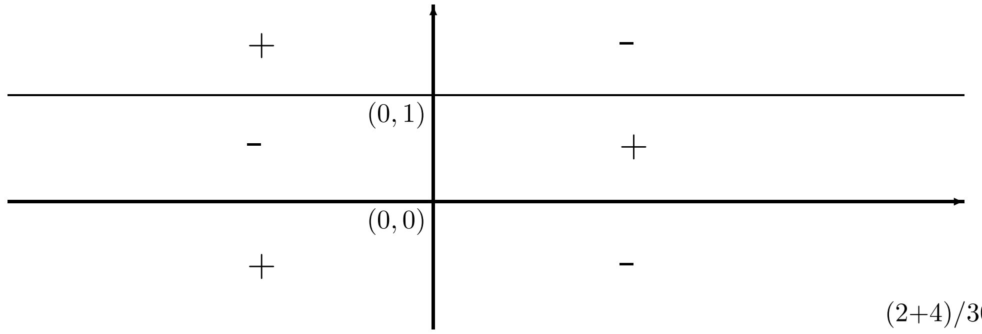
2. È data la funzione reale di due variabili reali $F(x, y) = y(2 - y)x$.

   (a) Determinare l'insieme di livello $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$;

   (b) studiare il segno di F;

   La F è data come prodotto di 3 monomi: x, $(2 - y)$ e y. Per la legge di annullamento del prodotto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0) \vee (y = 0) \vee (y = 2)\}$. Lo studio del segno non presenta difficoltà.

   Disegnare l'insieme Σ_0 e tratteggiare l'insieme su cui F è positiva



   (2+4)/30

   (c) determinare i punti stazionari di F studiandone la natura.

Le componenti del gradiente della F sono $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = y(2-y)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x(2-2y) = 2x(1-y)$ ed i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} y(2-y) = 0 \\ 2x(1-y) = 0 \end{cases}$$

debbono tutti avere $y \in \{0, 2\}$ per soddisfare alla prima equazione. Pertanto, l'unico modo per soddisfare anche alla seconda equazione è di avere $x = 0$. Va osservato che la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$ e quindi dalla precedente analisi abbiamo 2 soli punti stazionari: il punto $(0, 0)$ ed il punto $(0, 2)$. Si noti che $F(0, 0) = 0 = F(0, 2)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) è facile dedurre che entrambi i punti sono di sella.

Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0, 0)$ e $(0, 2)$.

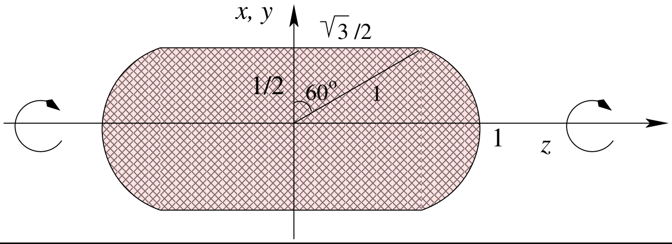
I punti $(0, 0)$ e $(0, 2)$ sono entrambi punti di sella.

6/30

3. Sia $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$.

(a) Descrivere e/o disegnare M (o una sua sezione significativa);

a)



4/30

(b) calcolare mediante integrazione il volume $V(M)$ di M.

Conviene fare riferimento alle coordinate cilindriche ma anche osservare che il volume di M è il doppio del volume dell'intersezione di M con il semispazio $z \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
V(M) &= 2\left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \rho\, d\rho\, dz + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho\, d\rho\, dz\right) \\
&= 4\pi\left(\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 1\, dz + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} dz\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} 1 - z^2\, dz\right) = 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \left[z - \frac{z^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\,.
\end{aligned}
$$

b) $V(M) = 2\left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \rho\, d\rho\, dz + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho\, d\rho\, dz\right) = \frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

6/30

Prova scritta di Matematica II - 6/4/2005
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. In un sistema di riferimento Cartesiano sono dati i punti $P_1 = (3, 2, 0)$ e $P_2 = (0, 1, 2)$.
   (a) Calcolare d =distanza Euclidea dei punti P_1 e P_2;
   (b) calcolare $P_1 \cdot P_2$;
   (c) calcolare $P_1 \wedge P_2$;
   (d) determinare il punto P_0 di intersezione della retta R passante per P_1 e per P_2 con il piano Π_1 di equazione $x + y + z = 1$;
   (e) determinare l'equazione del piano Π_0 passante per P_0 ed ortogonale a R.

$d = \sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$	2/30
$P_1 \cdot P_2 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 0 + 2 + 0 = 2$	2/30
$P_1 \wedge P_2 = (2 \cdot 2 - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 - 2 \cdot 3, 3 \cdot 1 - 0 \cdot 2) = (4, -6, 3)$	2/30
$P_0 = (-3, 0, 4)$ (vedere spiegazione sotto)	3/30
$\Pi_0 :\ 3(x+3) + y - 2(z-4) = 0$ ossia $3x + y - 2z = -17$	3/30

Dove per la determinazione del punto P_0 si sono prima raccolte le equazioni parametriche della retta R:

$$R(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ 2 & - & 1 \\ 0 & & 2 \end{pmatrix} \right] t \qquad \begin{cases} x &= 0 + 3\,t \\ y &= 1 \quad\ \ t \\ z &= 2 - 2\,t \end{cases}$$

E si è imposta poi l'equazione $1 = x+y+z = x(t)+y(t)+z(t) = (3\,t)+(1+t)+(2-2\,t) = 3+2\,t$ da cui abbiamo ottenuto $t = -1$. Infine, sostituendo il valore del parametro $t = -1$ nelle equazioni parametriche $(x(t), y(t), z(t))$ abbiamo ottenuto le coordinate del punto P_0.

2. È data la funzione reale di due variabili reali

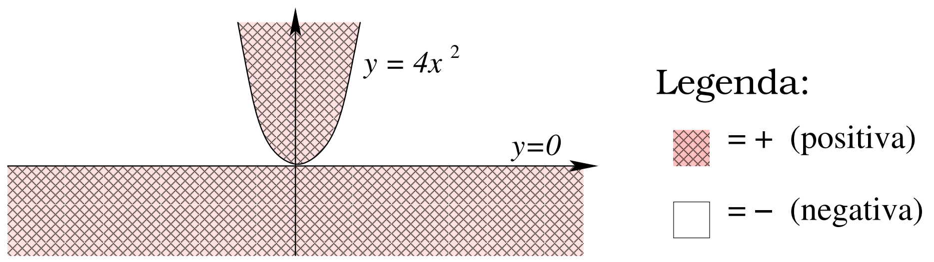
$$F(x, y) = y^2 - 4x^2 y\,.$$

a) Determinare $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;
Si noti che $F(x, y) = y^2 - 4x^2 y = y(y - 4x^2)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0$ oppure $y = 4x^2\ \}$.
b) determinare i punti stazionari di F studiandone la natura.
Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = -8xy$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 4x^2$. Il gradiente della F si annulla quando si annulla sia la sua componente $F_x = -8xy$ che la sua componente $F_y = 2y - 4x^2$. I punti stazionari sono pertanto quei punti (x, y) di $\mathbb{R}^2$ che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} xy &= 0 \\ y - 2x^2 &= 0 \end{cases}$$

La prima equazione implica che almeno una delle due coordinate di (x, y) è nulla, mentre la seconda equazione implica che se una componente è nulla allora anche l'altra lo è. Pertanto $(0, 0)$, ossia l'origine, è l'unico punto stazionario della F. Si noti che $F(0, 0) = 0$ e si osservi come l'analisi dei segni di cui al punto precedente mostri che l'origine è punto di sella.

a) Disegnare l'insieme Σ_0, tratteggiare l'insieme su cui F è positiva



4/30

b) UN SOLO PUNTO STAZIONARIO: $(0, 0)$. Esso è punto di sella.

4/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati gli insiemi

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\ \} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\ \}$$

ed $M = A \cap B$.

a) Disegnare e/o descrivere gli insiemi A, B, M (o loro sezioni significative).

A è la palla di raggio 2 e centro nell'origine. B è il cono avente l'asse z come asse di simmetria, vertice nell'origine, e direttrice $z = x$ nel piano x, z.
M è un cono gelato perfettamente simmetrico rispetto all'asse verticale.
L'unica pallina di M fa una dolce cupola sopra il bordo del cono.

1+1+1/30

Volendo comprendere a che quota la sfera interseca la superfice del cono (altezza del bordo della cialda), sostituiamo $z^2 = x^2 + y^2$ (condizione di appartenenza alla superfice del cono) in $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (appartenenza alla sfera), ottenendo $2z^2 = 4$, ossia $z = \sqrt{2}$ (ovviamente ci interessa solo la radice positiva). Poichè M è un solido pieno (di fatto convesso) e di rotazione rispetto all'asse z, ogni intersezione di M con un piano orizzontale restituisce un disco. Il raggio di tale disco dipende dalla quota z del piano orizzontale cui appartiene secondo la seguente legge:

$$r(z) = \begin{cases} z & \text{per } 0 \leq z \leq \sqrt{2}, \\ \sqrt{4 - z^2} & \text{per } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \end{cases}$$

b) Calcolare $I = \int_M z\, dx\, dy\, dz$.

Conviene l'utilizzo delle coordinate polari. L'espressione di M in coordinate polari conduce alle diseguaglianze $z \geq \rho$ e $\rho^2 + z^2 \leq 4$. Pertanto $0 \leq z \leq 2$, e $\rho \leq 2$. Inoltre, $\rho \leq \sqrt{4 - z^2}$. Di queste due ultime diseguaglianze su ρ, $\rho \leq 2$ domina per $0 \leq z \leq \sqrt{2}$, mentre $\rho \leq \sqrt{4 - z^2}$ domina per $\sqrt{2} \leq z \leq 2$.

$$\begin{aligned} I &= \int_M z\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^z z\, \rho\ d\rho dz + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} z\, \rho\ d\rho dz \right] d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\sqrt{2}} z\, \frac{z^2}{2}\ dz + \int_{\sqrt{2}}^2 z\, \frac{4 - z^2}{2}\ dz \right) \\ &= \pi \left(\left[\frac{z^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} + \left[2z^2 - \frac{z^4}{4} \right]_{\sqrt{2}}^2 \right) \\ &= \pi \left(\frac{4}{4} + 8 - 4 - 4 + \frac{4}{4} \right) = 2\, \pi\, . \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^z z\, \rho\ d\rho dz + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} z\, \rho\ d\rho dz \right]\ d\theta = 2\, \pi$$

8/30

Prova scritta di Matematica II - 8/9/2004 - FILA A
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati il piano Π_0 di equazione $x + 2y - 2z = 1$ e la retta R_0 di equazioni
$$\begin{cases} x+y = 0\,, \\ z = 0\,. \end{cases}$$

   i) Determinare il punto P_0 di intersezione fra il piano Π_0 e la retta R_0;
   Siamo chiamati a risolvere il sistema:
$$\begin{cases} z = 0 \\ x+y = 0 \\ x+2\,y-2\,z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x+y = 0 \\ x+2\,y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

   $P_0 = (-1, 1, 0)$

   2/30

   ii) determinare equazioni parametriche della retta R_1 passante per P_0 ed ortogonale a Π_0;

   $R_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} t$ $\quad\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2\,t \\ z = 0 - 2\,t \end{cases}$

   4/30

   iii) determinare il piano Π_1 contenente la retta R_1 e passante per l'origine.
   Si individuino innanzittutto 2 punti della retta R_1. Ad esempio, $R_1(0) = (-1, 1, 0)$ e $R_1(1) = (0, 3, -2)$. Siamo quindi interessati alla determinazione di un piano passante per $(-1, 1, 0)$, per $(0, 3, -2)$, e per l'origine. Tale piano avrà equazione $ax + by + cz = 0$, dove (a, b, c) è un qualsiasi vettore normale al piano. Per ottenere un vettore normale al piano computiamo il prodotto vettoriale di $(-1, 1, 0) - (0, 0, 0) = (-1, 1, 0)$ e $(0, 3, -2) - (0, 0, 0) = (0, 3, -2)$. Ora, $(-1, 1, 0) \wedge (0, 3, -2) = (-2, -2, -3)$. Si noti anche che è facile verificare (tramite semplice prodotto scalare) l'ortogonalità tra $(-2, -2, -3)$ ed entrambi i vettori $(-1, 1, 0)$ e $(0, 3, -2)$. Questa verifica non assicura la correttezza del computo del prodotto vettoriale (un pò come la prova del 9 non garantisce la correttezza delle operazioni aritmetiche), ma è del tutto conclusiva nel garantire che il vettore $(-2, -2, -3)$ è uno dei vettori ortogonali al piano da noi ricercati. Ovviamente preferiremo utilizzarne l'opposto $(2, 2, 3)$, visto che tutte le sue componenti sono positive.

   $\Pi_1 :\ 2\,x + 2\,y + 3 = 0$

   4/30

2. È data la funzione reale di due variabili reali
$$F(x, y) = (xy^2 - y - 1)^2 + (y^2 - 1)^2\,.$$

   Si noti che la F è una somma di quadrati, ossia è della forma $[A(x, y)]^2 + [B(x, y)]^2$. Ne consegue che $F(x, y) \geq 0$. Inoltre, $F(x, y) = 0$ in tutti e soli quei punti (x, y) che soddisfano al seguente sistema:
$$\begin{cases} A(x,y) = 0 \\ B(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} xy^2 - y - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

   La F si annulla pertanto solamente nei punti $(0, -1)$ e $(2, 1)$, che costituiscono pertanto 2 punti di minimo assoluto per la F.

   i) Determinare l'insieme di livello $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\ \}$;

   $\Sigma_0 = \{(0, -1), (2, 1)\}$

   2/30

ii) Determinare e studiare la natura di tutti i punti stazionari di F.

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2(xy^2 - y - 1)y^2$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2(xy^2 - y - 1)(2xy - 1) + 4y(y^2 - 1)$ ed i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2(xy^2 - y - 1)y^2 &= 0 \\ 2(xy^2 - y - 1)(2xy - 1) + 4y(y^2 - 1) &= 0 \end{cases}$$

debbono tutti avere o $y = 0$ o $x = \frac{y+1}{y^2}$ per soddisfare alla prima equazione. Nel caso $y = 0$, dalla seconda equazione otteniamo $2 + 0 = 0$, ossia una contraddizione.

Pertanto, $y \neq 0$ e $x = \frac{y+1}{y^2}$ valgono per tutti i punti stazionari della F. A questo punto, dopo aver sostituito via ogni occorrenza della x, la seconda equazione del sistema si riduce a,

$$4y(y^2 - 1) = 0\,,$$

da cui disegue $y \in \{-1, 0, 1\}$. Ricordando che si era posto $y \neq 0$, e $x = \frac{y+1}{y^2}$, otteniamo i 2 soli punti stazionari già incontrati in precedenza: $(0, -1)$ e $(2, 1)$. Ricordiamo che entrambi sono punti di minimo assoluto.

Elencare i punti stazionari specificandone la natura

PUNTI STAZIONARI: $(0, -1)$ e $(2, 1)$.

$(0, -1)$ e $(2, 1)$ sono entrambi punti di minimo assoluto.

6/30

3. Calcolare mediante integrazione il volume del solido

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\,,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\ \}\,.$$

Si noti che, nelle coordinate sferiche di Eulero, M è un semplice rettangolo: $0 \leq \theta \leq 2\,\pi$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \rho \leq 2$. Pertanto il volume di M è espresso dal sequente integrale:

$$\begin{aligned} V &= \int_M 1\ dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \rho^2 \sin\phi\ d\rho\, d\phi\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} 1\ d\theta\right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi\ d\phi\right) \left(\int_0^2 \rho^2\ d\rho\right) \\ &= 2\,\pi\,[-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = 2\,\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{8}{3} = \frac{16 - 8\sqrt{2}}{3}\,\pi\,. \end{aligned}$$

$Vol(M) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \rho^2 \sin\phi\ d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{16-8\sqrt{2}}{3}\,\pi$

10/30

Come verifica ed al fine di meglio consolidare quanto qui appreso, ricomputiamo il volume di M utilizzando questa volta le coordinate cilindriche. L'espressione di M in coordinate cilindriche conduce alle diseguaglianze $z \geq \rho$ e $\rho^2 + z^2 \leq 4$. Pertanto $0 \leq z \leq 2$, e $\rho \leq 2$. Inoltre, $\rho \leq \sqrt{4 - z^2}$. Di queste due ultime diseguaglianze su ρ, $\rho \leq 2$ domina per $0 \leq z \leq \sqrt{2}$, mentre $\rho \leq \sqrt{4 - z^2}$ domina per $\sqrt{2} \leq z \leq 2$.

$$\begin{aligned} Vol(M) &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^z \rho\ d\rho dz + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho\ d\rho dz\right] d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2}\ dz + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{4 - z^2}{2}\ dz\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi\left(\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} + \left[4z - \frac{z^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^2\right) \\
&= \pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 4\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \pi\frac{16 - 8\sqrt{2}}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Prova scritta di Matematica II - 30/6/2004
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i vettori $P_0 = (1, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 2)$.

   i) Calcolare $P_0 \cdot v$ e $P_0 \wedge v$;

   ii) determinare l'equazione del piano Π passante per P_0 ed ortogonale a v;

   iii) determinare le equazioni della retta R passante per P_0 ed ortogonale a Π

   iv) determinare l'equazione del piano Π_1 contenente la retta R e passante per l'origine;

Occorre avere chiaro che $(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Inoltre $(a_1, a_2, a_3) \wedge (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

i)

$$P_0 \cdot v = (1, 0, 1) \cdot (0, 1, 2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2$$

$$P_0 \wedge v = (0 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (-1, -2, 1)$$

2/30

I piani ortogonali a $(0, 1, 2)$ hanno tutti equazione $(0, 1, 2) \cdot (x, y, z) = c$ per una qualche costante c. In effetti tutti questi piani sono parallali. Il passaggio per $(1, 0, 1)$ identifica il piano tra gli infiniti piani di questo fascio, consentendo la determinazione di $c = (0, 1, 2) \cdot (1, 0, 1) = 2$.

ii)

$$\Pi : \; y + 2\, z = 2$$

2/30

In buona sintesi, la retta R è parallela a v. Essa risulta pertanto descritta dalle seguenti equazioni parametriche in forma vettoriale:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

Le equazioni parametriche qui sopra possono essere riscritte nella seguente forma scalare.

$$\begin{cases} x &= 1 & & \\ y &= & & t \\ z &= 1 &+ & 2\,t \end{cases}$$

Due piani (= equazioni) che catturano la retta sono $x = 1$ e $z = 1 + 2\, y$, dove la seconda equazione è stata ottenuta combinando le ultime 2 equazioni della forma parametrica in modo da sbarazzarsi del parametro t.

iii)

$$R : \; \begin{cases} x &= 1 & & \\ z &= 1 &+ & 2\, y \end{cases}$$

3/30

Il vettore $v = (0, 1, 2)$ esprime la direzione della retta R contenuta in Π_1, e quindi corre parallelamente lungo il piano. Anche il vettore $(1, 0, 1) = (1, 0, 1) - (0, 0, 0)$, ottenuto come differenza di 2 punti di Π_1, corre parallelamente al piano. Il piano è pertanto normale al vettore $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 2) = (-1, -2, 1)$ già calcolato al punto (i). Poichè Π_1 passa per l'origine esso ha equazione $(-1, -2, 1) \cdot (x, y, z) = 0$

iv)

$$\Pi_1 : \quad x + 2\, y - z = 0$$

3/30

2. Determinare tutti i punti stazionari della funzione

$$F(x, y) = x^2 y^2 + x^4 + y^2$$

specificandone la natura.

La F è un polinomio ed appartiene quindi a $\mathbf{C}^\infty$. $F_x = 2\, x\, y^2 + 4\, x^3$. $F_y = 2\, x^2\, y + 2\, y$. I punti stazionari sono caratterizzati dalla coppia di equazioni $(F_x, F_y) = (0, 0)$, ossia dal sistema

$$\begin{cases} 2\, x\, y^2 + 4\, x^3 &= 0 \\ 2\, x^2\, y + 2\, y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(y^2 + 2\, x^2) &= 0 \\ (x^2 + 1) y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

L'origine è pertanto l'unico punto stazionario. Si noti che $F(0, 0) = 0$. Questo è un minimo assoluto di F poichè

$$F(x, y) = x^2 y^2 + x^4 + y^2 \geq x^4 + y^2 \geq 0\,.$$

UNICO PUNTO STAZIONARIO: l'origine $(0, 0)$.

L'origine è punto di minimo assoluto.

10/30

3. Sia E il sottoinsieme del piano $y = 0$ contenuto nel quadrante $x > 0, z > 0$ e delimitato dalle curve di equazioni

$$xz = 2,\ y = 0 \qquad \text{e} \qquad x + z = 3,\ y = 0\,.$$

i) Calcolare

$$I = \int_E x\ dxdz\,.$$

Calcolare il volume del solido M che si ottiene facendo ruotare E di 60^o in senso antiorario attorno all'asse delle z.

Le 2 curve assegnate sono un'iperbole equilatera ed una retta che interseca l'asse delle x in $x = 3$ e quello delle z in $z = 3$. Operando la semplice sostituzione $z = 3 - x$ suggerita dall'equazione della retta, in seno all'equazione dell'iperbole, otteniamo che i punti di intersezione di queste 2 curve debbono soddisfare $x(3 - x) = 2$, ossia sono consegnati dall'equazione di secondo grado $0 = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. I due punti di intersezione sono pertanto $(1, 2)$ e $(2, 1)$. Quindi,

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 x \cdot \left(\int_{\frac{2}{x}}^{3-x} 1\ dz \right)\ dx = \int_1^2 x \left(3 - x - \frac{2}{x} \right)\ dx \\
&= \int_1^2 3x - x^2 - 2\ dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 2\,x \right]_1^2 \\
&= \left(6 - \frac{8}{3} - 4 \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - 2 \right) = 4 - \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{24 - 14 - 9}{6} = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

$I = \int_1^2 x \cdot \left(\int_{\frac{2}{x}}^{3-x} 1\ dz \right)\ dx = \frac{1}{6}$

5/30

Per quanto riguarda il computo del volume di M converrà avvalersi delle coordinate cilindriche ed in parte riutilizzare l'impostazione, e di fatto anche i conteggi, di cui sopra.
Quindi,

$$\begin{aligned}
V(M) &= \left(\int_0^{2\pi} 1\ d\theta \right) \left(\int_1^2 \rho \left(\int_{\frac{2}{\rho}}^{3-\rho} 1\ dz \right)\ d\rho \right) \\
&= 2\pi \int_1^2 \rho \left(3 - \rho - \frac{2}{\rho} \right)\ d\rho = 2\pi \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

$V(M) = \left(\int_0^{2\pi} 1\ d\theta \right) \left(\int_1^2 \rho \left(\int_{\frac{2}{\rho}}^{3-\rho} 1\ dz \right)\ d\rho \right) = \frac{\pi}{3}$

5/30

Prova scritta di Matematica II - 2/4/2004 - FILA A

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia R la retta di equazioni $x = 0, y = z$ e sia P_0 il punto di coordinate $(2, 1, 0)$. Determinare:

   i) il piano Π contenente R e P_0;

   ii) la retta $R^\perp$ passante per P_0 ed ortogonale a R;

   iii) la distanza $d(P_0, R)$ del punto P_0 dalla retta R.

   Due bei punti di R sono $(0, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Quindi Π passa per $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, e $(2, 1, 0)$. Passando per $(0, 0, 0)$, il piano Π sarà descritto da un equazione del tipo $ax + by + cz = 0$. Inoltre, i vettori $(0, 1, 1) - (0, 0, 0) = (0, 1, 1)$ e $(2, 1, 0) - (0, 0, 0) = (2, 1, 0)$ sono entrambi paralleli a Π. Ne consegue che Π è ortogonale a $(0, 1, 1) \wedge (2, 1, 0) = (-1, 2, -2)$. Un'equazione che descrive Π è pertanto $(-1) \cdot x + 2 \cdot y + (-2) \cdot z = 0$, ossia $-x + 2y - 2z = 0$.

   Equazione di Π: $-x + 2y - 2z = 0$

   3/30

   Si noti che $R^\perp$ è contenuta in Π. Pertanto l'equazione di Π è valida anche per $R^\perp$. Inoltre, la direzione di $R^\perp$ è ortogonale alla direzione di R, come espressa dal vettore $(0, 1, 1) - (0, 0, 0) = (0, 1, 1)$. Quindi una seconda equazione per $R^\perp$ avrebbe la forma $0x + 1y + 1z = c$. La c risulta determinata dal passaggio per P_0. Abbiamo $c = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$, e la seconda equazione è quindi $y + z = 1$.

   $$R^\perp: \quad \begin{cases} -x + 2\,y - 2\,z &= 0 \\ y + z &= 1 \end{cases}$$

   3/30

   Sia P_1 il punto in cui la retta $R^\perp$ incontra la retta R. Si noti che $d(P_0, R) = d(P_0, P_1)$. Il punto P_1 può essere individuato risolvendo il seguente sistema.

   $$\begin{cases} x &= 0, \\ y &= z, \\ y + z &= 1. \end{cases}$$

   Ovviamente $P_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

   $$d(P_0, R) = d\left((2, 1, 0), \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right) = \left|\left(2, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)\right| = \sqrt{4 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}} = \tfrac{3}{\sqrt{2}} = \tfrac{3\sqrt{2}}{2}$$

   4/30

2. Si consideri la funzione reale di due variabili reali $F(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 9)$.

   i) Disegnare l'insieme di livello $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ e studiare il segno di F;

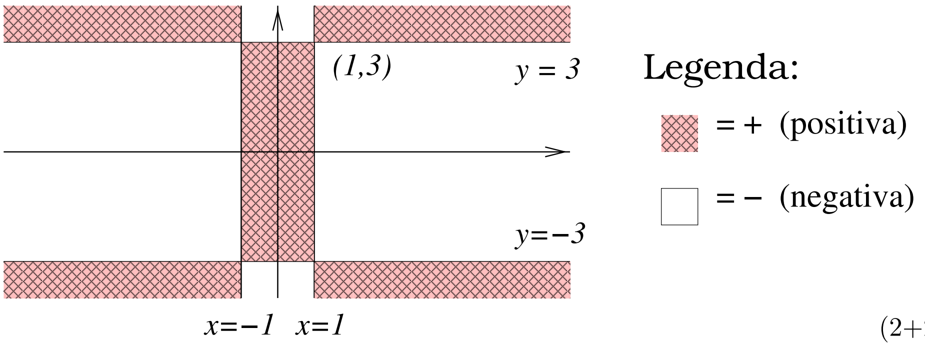
   ii) determinare tutti i punti stazionari di F;

   iii) studiare la natura di tutti i punti stazionari di F.

   La F può essere espressa come il prodotto di 4 monomi: $(x - 1)$, $(x + 1)$, $(y - 3)$ e $(y + 3)$. Per la legge di annullamento del prodotto, l'insieme di livello $\Sigma_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ è catturato nella scrittura $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = -1) \vee (x = 1) \vee (y = -3) \vee (y = 3)\}$. Il segno risulta determinato dalle regole per il segno di un prodotto come da seguente tabella.

*	+	-
+	+	-
-	-	+

Disegnare l'insieme Σ_0 e individuare l'insieme su cui F è positiva



(2+2)/30

Le componenti del gradiente della F sono $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2x(y^2-9)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2y(x^2-1)$ ed i punti (x,y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2x(y^2-9) &= 0 \\ 2y(x^2-1) &= 0 \end{cases}$$

sono il punto $(0,0)$ più i 4 punti (x,y) con $x \in \{-1,1\}$ e $y \in \{-3,3\}$. Si noti che $F(1,3) = F(1,-3) = F(-1,3) = F(-1,-3) = 0$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) è facile dedurre che questi 4 punti sono di sella. La situazione è diversa per l'origine, dove $F(0,0) = 9$, e non possiamo quindi dedurre la natura del punto stazionario $(0,0)$ in sola funzione dello studio del segno. Siamo quindi chiamati ad osservare il segno del determinante della matrice Hessiana

$$\begin{bmatrix} F_{xx}(x,y) & F_{xh}(x,y) \\ F_{yx}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(y^2-9) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2-1) \end{bmatrix}$$

valutata nel punto $(0,0)$. Il segno di

$$Det\left(\begin{bmatrix} 2(y^2-9) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2-1) \end{bmatrix}_{(0,0)}\right) = Det\left(\begin{bmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 36$$

è positivo. Ne consegue che $(0,0)$ è un estremo locale. La regola dell'Hessiano (vedi test delle derivate seconde a pag.224 del testo) specifica anche che trattasi di un massimo locale in quanto $F_{xx}(0,0) = -18 < 0$. Non è però un punto di massimo assoluto visto che la funzione non è superiormente limitata come è facile convincersi considerando $\lim_{t\mapsto\infty} F(t,t)$.

Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

5 PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$, $(1,3)$, $(1,-3)$, $(-1,3)$, $(-1,-3)$.

I 4 punti $(1,3)$, $(1,-3)$, $(-1,3)$ e $(-1,-3)$ sono tutti punti di sella.

Il punto $(0,0)$, l'origine, è un punto di massimo relativo non assoluto.

ii)=2/30, *iii*)=4/30

3. Calcolare il volume $V(M)$ del solido $M = \{(x,y,z) \mid 4x^2+4y^2 \leq z \leq 1\}$.
Si noti che M è un solido di rotazione rispetto all'asse z, la cui intersezione con un piano orizzontale di quota z è nulla per $z < 0$ e per $z > 1$, mentre è un disco il quadrato del cui raggio vale $\frac{z}{4}$ se $0 \leq z \leq 1$.

$V(M) = \int_0^1 \pi\frac{z}{4}\,dz = \pi\left[\frac{z^2}{8}\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$

10/30

Prova scritta di Matematica II - 17/3/2004 - FILA A
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Musina

1. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che i vettori

$$P = (\alpha, 1, 2) \qquad Q = (3, -\alpha, 1)$$

risultino ortogonali.
La condizione di ortogonalità, vista come condizione di annullamento del prodotto scalare, si traduce immediatamente nell'equazione: $0 = \alpha \cdot 3 + 1 \cdot (-\alpha) + 2 \cdot 1 = 2\alpha + 2$, da cui $\alpha = -1$.

$\alpha = -1$ 3/30

2. Determinare $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ in modo tale che i vettori

$$A = (\sqrt{3}, 1, \beta) \qquad B = (3, \beta, \lambda)$$

risultino paralleli.
Parallellismo significa che un vettore è multiplo dell'altro, ossia $\sqrt{3} : 3 = 1 : \beta = \beta : \lambda$. Quindi $\beta = \sqrt{3}$. Quindi $\lambda = 3$.

$\beta = \sqrt{3}$	$\lambda = 3$ 4/30

3. Determinare l'equazione del piano Π passante per in punti

$$C = (-1, 1, 2) \quad D = (3, 1, 1) \quad E = (2, 2, 2)\,.$$

Se Π passa per $(-1, 1, 2)$, $(3, 1, 1)$, e $(2, 2, 2)$, allora i vettori $(2, 2, 2) - (-1, 1, 2) = (3, 1, 0)$ e $(3, 1, 1) - (-1, 1, 2) = (4, 0, -1)$ sono entrambi paralleli a Π. Ne consegue che Π è ortogonale a $(3, 1, 0) \wedge (4, 0, -1) = (-1, 3, -4)$. Quindi Π risulta descritto da un equazione del tipo $(-1)x + 3 \cdot y + (-4)z = c$, ossia $-x + 3y - 4z = c$. Per determinare la costante c si sfrutta una qualsiasi delle condizioni di passaggio per un punto. Ad esempio, visto che si richiede il piano passi per $(3, 1, 1)$, allora $-(3) + 3 \cdot (1) - 4 \cdot (1) = c$, ossia $c = -4$.

$-x + 3y - 4z = -4$ 4/30

4. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4, \quad z = 16 - 4x^2 - 4y^2\ \},$$

e sia M il solido compreso fra Σ e il piano di equazione $z = 0$.

a) Calcolare il volume $V(M)$ di M;

b) calcolare l'area $A(\Sigma)$ di Σ.

Si noti che M è un solido di rotazione rispetto all'asse z, la cui intersezione con un piano orizzontale di quota z è nulla per $z < 0$ e per $z > 16$, mentre è un disco il quadrato del cui raggio vale $r^2(z) = \frac{16-z}{4}$ se $0 \le z \le 16$.

$V(M) = \int_0^{16} \pi \frac{16-z}{4}\, dz = \int_0^{16} 4\,\pi\, dz - \int_0^{16} \pi \frac{z}{4}\, dz = 64\pi - \pi \left[\frac{z^2}{8}\right]_0^{16} = 32\pi$ 8/30

Da $r(z) = \sqrt{\frac{16-z}{4}} = \frac{\sqrt{16-z}}{2}$ otteniamo $r'(z) = -\frac{1}{4\sqrt{16-z}}$ Per il computo di $A(\Sigma)$ diamo applicazione alla Formula 7 a pag. 293 del testo.

$$\begin{aligned}
A(\Sigma) &= 2\pi \int_0^{16} r(z)\sqrt{1+[r'(z)]^2}\ dz = 2\pi \int_0^{16} \frac{\sqrt{16-z}}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4^2(16-z)}}\ dz \\
&= \pi \int_0^{16} \sqrt{16-z}\sqrt{\frac{4^2(16-z)+1}{4^2(16-z)}}\ dz = \frac{\pi}{4}\int_0^{16} \sqrt{16(16-z)+1}\ dz \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{16} (257-16z)^{\frac{1}{2}}\ dz = \frac{\pi}{4}\left[-16\,\frac{2}{3}\,(257-16z)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{16} \\
&= \frac{8}{3}\pi\left[(257)^{\frac{3}{2}}-(257-256)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3}\pi\left[(257)^{\frac{3}{2}}-1\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{A(\Sigma) = 2\pi \int_0^{16} r(z)\sqrt{1+[r'(z)]^2}\ dz = \frac{8}{3}\pi\left[(257)^{\frac{3}{2}}-1\right]}$$

8/30