Prova scritta di Matematica II - 14 febbraio 2012 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(3, \sqrt{3}, \pi)$, $(\sqrt{3}, \pi, 3)$ e $(\pi, 3, \sqrt{3})$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (3t, 3t, 1)$ e la retta $x = y = 1$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alla funzione $z = x^2 + y^2 + 1$ nel suo unico punto di minimo;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti abbiamo che $x + y + z = 3 + \sqrt{3} + \pi$, ed è quindi questa l'equazione del piano Π_1.

Contenendo una retta ($x = y = 1$) parallela all'asse delle z, il piano Π_2 è verticale e la sua equazione nello spazio coincide con l'equazione della sua traccia nel piano xy, o più in generale in un qualunque piano orizzontale. La retta $R(t)$ è appunto l'intersezione tra Π_2 ed il piano orizzontale $z = 1$. L'equazione ricercata è $x = y$. Si verifichi il contenimento di entrambe le rette da parte di questo piano.

Il paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ vive il suo minimo in $(0, 0)$ e la sua approssimazione lineare in quel punto é fornita dal piano $z = 1$.

Il piano Π_2 è ortogonale ai piani Π_1 e Π_3 come evidenziato dall'annullamento dei prodotti scalari $(1, -1, 0) \cdot (1, 1, 1) = 0$ e $(1, -1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$, rispettivamente. La relazione tra i vettori $(1, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$, come tra i piani Π_1 e Π_3, è invece generica.

Π_1: $x + y + z = 3 + \sqrt{3} + \pi$	Π_1 (H) Π_2 (H) Π_3 (G) Π_1
Π_2: $x - y = 0$	
Π_3: $z = 1$	1+1+1+2/30

1.b. Dati i 3 vettori:

$$v_1 : (\alpha + \beta, \beta, \alpha) \qquad v_2 : (\alpha + \beta, -\beta, 1) \qquad v_3 : (\beta, 0, 1)\,,$$

si determini per quali valori di α e β:

1.) v_1 e v_2 sono paralleli;

2.) v_1 e v_2 sono ortogonali;

3.) v_1, v_2 e v_3 sono coplanari.

Affinchè v_1 sia parallelo a v_2 dovremo avere che $\alpha \neq 0$ (si osservi la terza componente dei due vettori). Se $\beta = 0$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere identici (si osservi la prima componente) e quindi $\alpha = 1$ (dalla terza componente). Se $\beta \neq 0$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere opposti (si osservi la seconda componente) e quindi $\alpha = -1$ (per la terza componente) e $\alpha+\beta = -(\alpha+\beta)$ (per la prima componente) da cui $\beta = -\alpha = 1$.

Il prodotto scalare $v_1 \cdot v_2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \alpha$ si annulla per $\alpha = 0$ e per $\alpha = -2\beta - 1$, dove si ha l'ortogonalità tra i vettori.

Il prodotto triplo

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha+\beta & \beta & \alpha \\ \alpha+\beta & -\beta & 1 \\ \beta & 0 & 1 \end{array} \right\| = -2\,\alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta^2 = \beta(\alpha\beta - 2\,\alpha - \beta)\,.$$

si annulla ogniqualvolta $\beta = 0$ ma anche quando $\beta = \frac{2\,\alpha}{\alpha-1}$ (con $\alpha \neq 1$). L'annullamento del prodotto triplo denuncia la coplanarità tra i tre vettori.

1.) v_1 e v_2 paralleli: per $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ e per $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$
2.) v_1 e v_2 ortogonali: sia per $\alpha = 0$ che per $\alpha = -2\beta - 1$
3.) v_1, v_2 e v_3 coplanari: sia per $\beta = 0$ che per $\beta = \frac{2\,\alpha}{\alpha-1}$ 1+1+1/30

1.c. Trovare un'equazione parametrica per la retta R passante per il punto $(1, 2, 3)$ ed incidente ortogonalmente alla sfera di raggio $\sqrt{41}$ e centro in $(1, 1, 1)$.

La retta R passerà per il centro $(1, 1, 1)$ della sfera, oltre che per il punto $(1, 2, 3)$. Il passaggio per due punti è sufficiente a caratterizzare una retta. La direzione sarà espressa dal vettore spostamento $(1, 2, 3) - (1, 1, 1) = (0, 1, 2)$. Potremo pertanto scrivere $R(t) = (1, 1 + t, 1 + 2\,t)$.

$R(t) = (1, 1 + t, 1 + 2\,t)\,.$ 3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta $R_1(t) = (t, 2\,t, -3\,t)$ e la retta $R_2 = (1 - 2\,t, t - 1, 2 + t)$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

La retta R_1 ha direzione $(1, 2, -3)$ mentre la retta R_2 ha direzione $(-2, 1, 1)$. Il versore $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ risulta ortogonale ad entrambe queste direzioni e cattura pertanto la direzione di un percorso minimo da una retta all'altra. Sia $P_1 = (0, 0, 0)$ un qualsiasi punto della retta R_1 (ottenuto ponendo $t = 0$) e sia $P_2 = (1, -1, 2)$ un qualsiasi punto della retta R_2 (ottenuto ponendo $t = 0$). La distanza tra le due rette vale allora

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) \cdot (P_2 - P_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

Le rette sono quindi sghembe poichè non sono parallele e non hanno punti in comune.

$d(R_1, R_2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$
Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = 2\,(x^2 + y^2)(xy - 1) + 2\,(x - y)^2\,.$

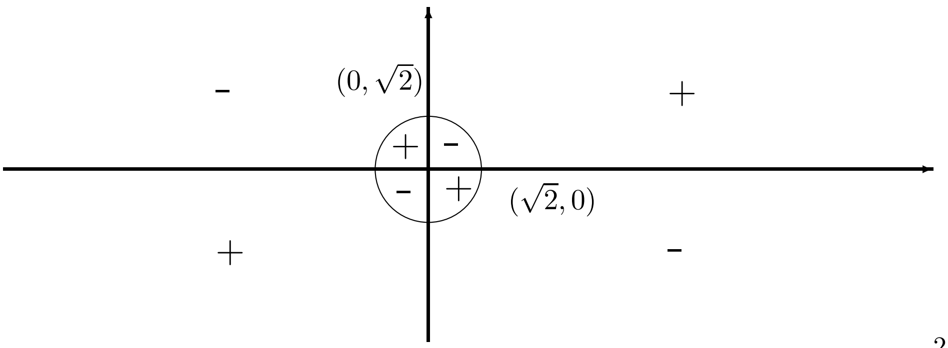
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F operando nelle tre solite fasi (sviluppare, semplificare, raccogliere):

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 2\,(x^2+y^2)(xy-1)+2\,(x-y)^2 && \text{come data}\\ &= 2\,x^3\,y - 2\,x^2 + 2\,y^3\,x - 2\,y^2 + 2\,x^2 + 2\,y^2 - 4\,xy && \text{esplosa, sciolti i termini, sviluppata}\\ &= 2\,x^3\,y + 2\,y^3\,x - 4\,xy && \text{raccolti i termini, semplificata}\\ &= 2\,xy(x^2+y^2-2)\,. && \text{raccolta, fattorizzata, semplificata} \end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = 2\,xy(x^2+y^2-2)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o y o $(x^2 + y^2 - 2)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0 \vee x^2+y^2 = 2\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 8 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Quattro di queste regioni sono limitate (quelle interne al cerchio).

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = 2\,xy(x^2+y^2-2)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,y(x^2+y^2-2) + 2\,xy(2\,x) = 2\,y(3\,x^2 + y^2-2)$ ed analogamente (visto che $F(x, y) = F(y, x)$) si avrà $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,x(3\,y^2+x^2-2)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,y(3\,x^2+y^2-2) &= 0\\ 2\,x(3\,y^2+x^2-2) &= 0\,. \end{cases}$$

Si nota subito che $(x,y) = (0,0)$ è un punto stazionario. A dire il vero ciò risultava evidente anche dallo studio del segno che indicava per altro anche la presenza di altri quattro punti stazionari: $(0, \pm\sqrt{2})$ e $(\pm\sqrt{2}, 0)$. Di fatto, dallo studio del segno posso anche dedurre che questi 5 punti sono tutti selle. Ma vediamo come sia possibile estrarre, con metodo, tutti i punti che soddisfino le equazioni scritte sopra. (Caso mai ce ne siano altri, e comunque, anche solo per il gusto di meglio capire come vadano queste cose). Chiediamoci innanzittutto come stanare i 5 punti che già ci sono stati rivelati: assumendo $x = 0$, la seconda equazione risulta appagata e la prima equazione diventa $y(y^2 - 2) = 0$ portando ad individuare i punti $(0,0)$ e $(0, \pm\sqrt{2})$. Parimenti, vista l'interscambiabilità della x e della y, assumendo $y = 0$, si individueranno i punti $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{2}, 0)$. Pertanto, resta solo da indagare l'eventualitá che $x \neq 0$ e $y \neq 0$ valgano entrambe. Assumendo $x \neq 0$, la seconda equazione diviene $3\,y^2 + x^2 - 2 = 0$, mentre, assumendo $y \neq 0$, la prima equazione diviene $3\,x^2 + y^2 - 2 = 0$. Pertanto $3\,x^2 + y^2 = 3\,y^2 + x^2$ e quindi $2\,x^2 = 2\,y^2$ che porta a concludere $x = \pm y$. Dopo questa importante scoperta, dalla prima equazione segue $4\,x^2 = 2$ ossia $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e restano così individuati i 4 ulteriori punti $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. In effetti, a ripensarci, anche l'esistenza di questi 4 ulteriori punti (uno per ciascuna delle 4 regioni limitate) era deducibile dallo studio del segno poichè ogni regione limitata vive almeno un punto di massimo ed uno di minimo. (Inoltre, che la condizione $x = \pm y$ fosse rispettata da questi quattro punti era deducibile a priori dalle simmetrie della F: interscambiabilitá delle variabili ossia $F(x,y) = F(y,x)$, ma anche $F(-x,y) = -F(x,y) = F(x,-y)$). Ciascuno di questi 4 punti è il punto estremale ricercato nella regione chiusa di sua pertinenza (ossia nel suo quarto di cerchio), ed è pertanto punto estremale anche per la F (almeno in senso locale). Su tutto il piano, questi quattro punti sono dei massimi/minimi relativi, dacchè la F non è limitata. Ora, $F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$ mentre $F\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = 1$.

2.b) Elencare le selle, i massimi, i minimi:

5 PUNTI DI SELLA: $(0,0)$, $(0, \pm\sqrt{2})$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

2 PUNTI DI MAX. RELATIVO: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ con $F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$.

2 PUNTI DI MIN. RELATIVO: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ con $F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$. 2+2+2/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0,1,2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i, 0, F(i,0))$;

Chiaramente, il punto $(i, 0, F(i,0))$ appartiene al grafico della F per definizione stessa del concetto di grafico di funzione. Tutti e tre i punti appartengono a Σ_0, e quindi i tre piani hanno equazioni del tipo

$$z = F_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)\,(y - y_0) = F_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)\,y\,.$$

Di fatto, poichè Σ_0 contiene l'intero asse delle x, la prima coordinata del gradiente in tutti questi punti è nulla. Quindi il piano tangente può essere inclinato solamente nella direzione delle y. L'equazione del piano tangente (testo, pag. 192) si riduce pertanto a

$$z = F_y(x_0,y_0)\,y\,.$$

Analizziamo ora singolarmente i tre punti. Poichè $(0,0)$ è punto stazionario, ci attendiamo che il piano ivi tangente sia orrizzontale, ossia abbia equazione $z = 0$. Nel caso di Π_1, ricordando che $F_y = 2\,x(3\,y^2 + x^2 - 2)$, otteniamo l'equazione $z = F_y(1,0)\,y = -2\,y$. Nel caso di Π_2, otteniamo l'equazione $z = F_y(2,0)\,y = 8\,y$. Quanto ora trovato trova corrispondenza con le informazioni provenienti dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = 0$ $\qquad$ Π_1: $z = -2\,y$ $\qquad$ Π_2: $z = 8\,y$

2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $x^2 + y^2 \leq 4$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa e limitata. Poichè i punti stazionari della F sono già stati presi in rassegna, vogliamo ora ricercare quei punti estremali di F che siano situati sulla frontiera, ossia lungo il bordo del cerchio $x^2 + y^2 = 4$, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 2\,y(3\,x^2 + y^2 - 2) & = F_x = \lambda g_x = & 2\,\lambda\,x \\ 2\,x(3\,y^2 + x^2 - 2) & = F_y = \lambda g_y = & 2\,\lambda\,y \\ x^2 + y^2 & = g(x,y) = & 4\,. \end{cases}$$

Poichè i punti stazionari sono stati ormai tutti individuati possiamo limitarci ad assumere $\lambda \neq 0$. Pertanto, se $x = 0$ allora $y = 0$ segue dalla seconda equazione, e se $y = 0$ allora $x = 0$ segue dalla prima equazione. Poichè il punto $(0,0)$ già compare tra i punti stazionari possiamo pertanto assumere che $x \neq 0 \neq y$. Si noti che dividendo per 2 e tramite accorto impiego della terza equazione il sistema può essere convenientemente riscritto come segue.

$$\begin{cases} y(2\,x^2 + 2) & = F_x = \lambda g_x = & \lambda\,x \\ x(2\,y^2 + 2) & = F_y = \lambda g_y = & \lambda\,y \\ x^2 + y^2 & = g(x,y) = & 4\,. \end{cases}$$

Moltiplicano ora per y la prima equazione e comparandola alla seconda moltiplicata per x otteniamo $y^2 = x^2$ e quindi $x = \pm y$. Dall'ultima equazione otteniamo quindi $x, y = \pm\sqrt{2}$.

Abbiamo pertanto due massimi assoluti con $F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = F(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 8$ e due minimi assoluti con $F(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = F(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8$.

Anche questa volta un'analisi delle simmetrie in gioco avrebbe potuto aiutarci a stanare queste 4 radici caleidoscopiche.

2.d)

2 Massimi Assoluti: $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$

dove $F = 8$

2 Minimi Assoluti: $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$

dove $F = -8$

6/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la regione del piano $y = 0$ delimitata dalle curve $z = |x|$ e $z = 2 - x^2$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

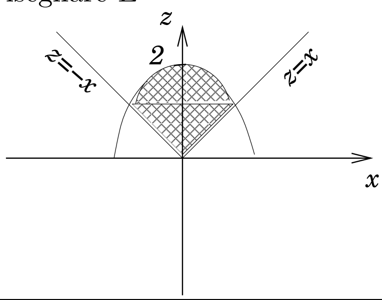
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \; dx\, dy\, dz$;

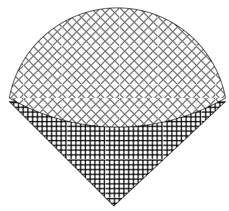
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E è contornata dalle bisetrici del primo e secondo quadrante e dalla parabolo rovesciata con vertice in $(0, 2)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \} \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \rho \leq z \leq 2 - \rho^2 \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_Q \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_\rho^{2-\rho^2} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho \int_\rho^{2-\rho^2} dz\, d\rho \right) = 2\pi \int_0^1 \rho(2 - \rho^2 - \rho) \; d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 2\rho - \rho^3 - \rho^2 \; d\rho = 2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{6}\pi\,. \end{aligned}$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_\rho^{2-\rho^2} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{5}{6}\pi$

5/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_Q z\,\rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{2-\rho^2} z\,\rho\; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho\int_\rho^{2-\rho^2} z\; dz\, d\rho\right) = 2\,\pi\int_0^1 \rho\left[\frac{z^2}{2}\right]_\rho^{2-\rho^2} d\rho \\
&= \pi\int_0^1 4\,\rho - 3\,\rho^3 + \rho^5\; d\rho = \pi\left[2\,\rho^2 - \frac{5}{4}\rho^4 + \frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{11}{12}\,\pi\,.
\end{aligned}
$$

d) $I = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{2-\rho^2} z\,\rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{11}{12}\,\pi$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$
z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{11}{12}\,\pi}{\frac{5}{6}\,\pi} = \frac{11}{10}\,.
$$

e) $x_b = 0$ $\quad y_b = 0$ $\quad z_b = \frac{I}{V} = \frac{11}{10}$

2/30