Prova scritta di Matematica II - 3 febbraio 2011 - CORREZIONE Fila B

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(1, \sqrt{3}, \pi)$, $(2, 0, \sqrt{3} + \pi)$ e $(3, \pi + \sqrt{3}, 0)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (2, 5\,t, 5\,t)$ e la retta $y = z = 14$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alla funzione $z = x^2 - y^2 + 3$ nel suo unico punto stazionario;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti abbiamo che $y + z = \sqrt{3} + \pi$, ed è quindi questa l'equazione del piano Π_1.

La normale al piano Π_2 è normale ad entrambe le rette e si ottiene quindi come prodotto vettoriale delle direzioni delle rette $(0, 1, 1) \wedge (1, 0, 0) = (0, 1, -1)$. In effetti il piano $y = z$ contiene ambo le rette.

In un punto stazionario il piano tangente è sicuramente orrizzontale. In questo caso $z = 3$ è il piano in questione.

Il piano Π_1 è ortogonale al piano Π_2 come evidenziato dall'annullamento del prodotto scalare $(0, 1, 1) \cdot (0, 1, -1) = 0$. La relazione tra i vettori $(0, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$ (tra i piani Π_1 e Π_3) e tra i vettori $(0, 1, -1)$ e $(0, 0, 1)$ (tra i piani Π_2 e Π_3) è invece generica.

Π_1: $y + z = \sqrt{3} + \pi$	Π_1 (H) Π_2 (G) Π_3 (G) Π_1
Π_2: $y - z = 0$	
Π_3: $z = 3$	1+1+1+2/30

1.b. Dati i 3 vettori:

$$v_1 : (\alpha + \beta, \beta, \alpha) \qquad v_2 : (\alpha + \beta, -\beta, 1) \qquad v_3 : (\beta, 0, 1)\,,$$

si determini per quali valori di α e β:

1.) v_1 e v_2 sono paralleli;

2.) v_1 e v_2 sono ortogonali;

3.) v_1, v_2 e v_3 sono coplanari.

Affinchè v_1 sia parallelo a v_2 dovremo avere che $\alpha \neq 0$ (si osservi la terza componente dei due vettori). Se $\beta = 0$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere identici (si osservi la prima componente) e quindi $\alpha = 1$ (dalla terza componente). Se $\beta \neq 0$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere opposti (si osservi la seconda componente) e quindi $\alpha = -1$ (per la terza componente) e $\alpha + \beta = -(\alpha + \beta)$ (per la prima componente) da cui $\beta = -\alpha = 1$.

Il prodotto scalare $v_1 \cdot v_2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \alpha$ si annulla per $\alpha = 0$ e per $\alpha = -2\beta - 1$, dove si ha l'ortogonalità tra i vettori.

Il prodotto triplo

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha+\beta & \beta & \alpha \\ \alpha+\beta & -\beta & 1 \\ \beta & 0 & 1 \end{array} \right\| = -2\,\alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta^2 = \beta(\alpha\beta - 2\,\alpha - \beta)\,.$$

si annulla ogniqualvolta $\beta = 0$ ma anche quando $\beta = \frac{2\,\alpha}{\alpha-1}$ (con $\alpha \neq 1$). L'annullamento del prodotto triplo denuncia la coplanarità tra i tre vettori.

1.) v_1 e v_2 paralleli: per $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ e per $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$

2.) v_1 e v_2 ortogonali: sia per $\alpha = 0$ che per $\alpha = -2\beta - 1$

3.) v_1, v_2 e v_3 coplanari: sia per $\beta = 0$ che per $\beta = \frac{2\,\alpha}{\alpha-1}$

1+1+1/30

1.c. Calcolare la distanza tra la retta $R(t) = (1 + t, t, 2\,t)$ ed il piano $x + y - z = 0$.

La direzione $(1, 1, 2)$ della retta R è in effetti ortogonale alla normale al piano $(1, 1, -1)$ e pertanto retta e piano sono paralleli. Basta quindi calcolare la distanza dal piano per uno qualsiasi dei punti della retta, come $R(0) = (1, 0, 0)$. Utilizzando la formula per la distanza punto/piano otteniamo $d(R, \Pi) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$d(R, \Pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$

3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R_1 di equazioni $x + y + z = 0$ e $y = 2x$ e la retta $R_2 = (1 - 2\,t, t - 1, 2 + t)$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo $x = t$ risulta facile trovare una forma parametrica per la prima retta come $R_1(t) = (t, 2\,t, -3\,t)$. Risulta ora evidente che la retta R_1 di direzione $(1, 2, -3)$ e la retta R_2 di direzione $(-2, 1, 1)$ non sono parallele. Il versore $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ risulta ortogonale ad entrambe queste direzioni e cattura pertanto la direzione di un percorso minimo da una retta all'altra. Sia $P_1 = (0, 0, 0)$ un qualsiasi punto della retta R_1 (ottenuto ponendo $t = 0$) e sia $P_2 = (1, -1, 2)$ un qualsiasi punto della retta R_2 (ottenuto ponendo $t = 0$). La distanza tra le due rette vale allora

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) \cdot (P_2 - P_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

Le rette sono quindi sghembe poichè non sono parallele e non hanno punti in comune (distanza non nulla).

$d(R_1, R_2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$
Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

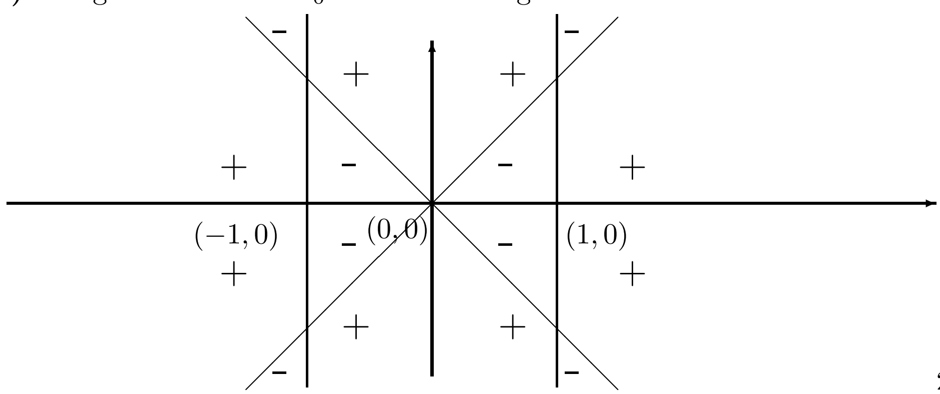
2. È data la funzione $F(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^2 - x^2\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Occorre innanzitutto fattorizzare la F, il che viene semplice per raccoglimenti algebrici $F(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^2 - x^2 = x^2(x^2 - 1) - y^2(x^2 - 1) = (x^2 - y^2)(x^2 - 1) = (x - y)(x+y)(x-1)(y-1)$ ma poteva anche essere condotto, come primo passo, semplicemente risolvendo nella y (equazione di secondo grado) o nella y^2 (equazione di primo grado). Ultimando la fattorizzazione, scriveremo $F(x, y) = (x - y)(x + y)(x - 1)(x + 1)$, da cui si evince lo studio del segno. Infatti, per la legge di annullameno del prodotto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm x \vee \vee x = \pm 1\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 10 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". Non essendoci in questo caso radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 4\,x^3 - 2\,xy^2 - 2, x = 2\,x(2\,x^2 - y^2 - 1)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = -2\,x^2y + 2\,y = 2\,y(1 - x^2)$ e dobbiamo ricercare i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2\,x(2\,x^2 - y^2 - 1) &= 0 \\ 2\,y(1 - x^2) &= 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione porta a considerare due casi:

$y = 0$ da cui seguirebbe $x = 0$ oppure $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ dalla prima equazione, e quindi otteniamo i 3 punti stazionari $(0, 0)$ e $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0, 0)$ è punto di sella. Inoltre, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ devono essere punti di minimo locale per la F visto che la F, essendo continua, deve avere un massimo ed un minimo in ogni chiuso e compatto (si consideri il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ dove la F, sempre non negativa, si annulla sui bordi e quindi dovrà pur avere un massimo da qualche parte nel mezzo, e questo massimo dovrà essere rilevato come punto stazionario per la differenziabilità della F);

$x = \pm 1$ da cui seguirebbe $y = \pm 1$ dalla prima equazione, e quindi otteniamo i 4 punti stazionari $(1, \pm 1)$ e $(-1, \pm 1)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che questi 4 punti sono selle.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0, 0)$, $(1, \pm 1)$, $(-1, \pm 1)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

I punti $(0, 0)$, $(1, \pm 1)$, $(-1, \pm 1)$ sono selle della F.

I punti $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ sono minimi locali della F.

6/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1, 1, 0)$.

Poichè $F(1, 1) = 0$ il punto dato appartiene effettivamente al grafico della F. L'approssimazione lineare in quel punto sarà data da $z = 0 + F_x(1, 1) \cdot (x - 0) + F_y(1, 1) \cdot (y - 0) = 0$. In effetti il piano tangente doveva essere orrizzontale visto che $(1, 1)$ era un punto stazionario della F.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1, 1, 0)$:

$z = 0$

1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $x^2 + y^2 \leq 4$.

I punti in Σ_0, presi unitamente ai punti con $x^2 + y^2 = 4$, contornano 18 regioni del piano, di cui 8 illimitate (dove $x^2 + y^2 \geq 4$) e 10 limitate (dove $x^2 + y^2 \leq 4$). La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto in ciascuna di queste 10 regioni limitate (e chiuse). Lo studio dei punti stazionari di cui sopra ha portato all'individuazione di 2 minimi in seno a due di queste regioni. Queste due regioni sono contornate dai soli punti di Σ_0 ed in esse il massimo vale 0 e si riscontra sulla frontiera. I punti critici sono giá stati tutti analizzati e gli eventuali massimi o minimi sono quindi tutti situati sul bordo $x^2 + y^2 = 4$. Viste le simmetrie in gioco possiamo giá dedurre che dei massimi saranno locati nei punti $(\pm 2, 0)$ e nei punti $(0, \pm 2)$, ma restano comunque da individuare i minimi nelle regioni illimitate con valore negativo dela F. In ogni caso, trovare gi estremi di $F(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^2 - x^2$ sul bordo $x^2 + y^2 = 4$, ossia dove $y^2 = 4 - x^2$, é del tutto equivalente a trovare gli estremi di $\overline{F}(x, y) = x^4 - x^2(4 - x^2) + (4 - x^2) - x^2 = 2\,x^4 - 6\,x^2 + 4$ tenendo presente che $x^2 \leq 4$. Derivando, otteniamo $\overline{F}'(x, y) = 8\,x^3 - 12\,x$ che si annulla, oltre che in $x = 0$ (una conferma), anche in $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ cui corrisponde $y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ per 4 punti di minimo. I valori $F'(-2) < 0$ e $F'(2) > 0$ confermano i 2 massimi nei punti $(\pm 2, 0)$. Per stabilire poi quali massimi/minimi siano solo locali piuttosto che assoluti occorre valutare la F nei punti di interesse ed effettuare il confronto dei valori ottenuti.

2.d)

2 Max Assoluti: $(\pm 2, 0)$

2 Max Locali: $(0, \pm 2)$

4 Min Assoluti: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

2 Min Locali: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

5 selle: $(0,0)$, $(1, \pm 1)$, $(-1, \pm 1)$

4/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E il triangolo del piano $y = 0$ di vertici $(R, 0)$, (R, R) e $(2\,R, 0)$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

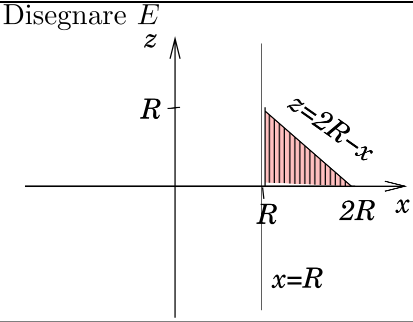
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \; dx\, dy\, dz$;

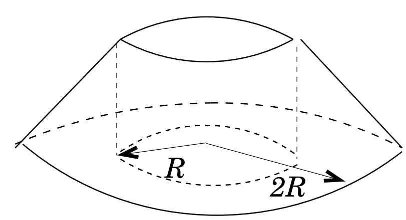
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q.

La figura piana E è il triangolo di vertici $(R, 0)$, (R, R), e $(0, R)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; R \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\,R - z\} \right\}$

cil: $Q = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; R \leq \rho \leq 2\,R - z \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int\int_Q \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_R^{2R-z} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R\int_R^{2R-z} \rho \, d\rho \, dz\right) = 2\pi \int_0^R \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_R^{2R-z} dz \\
&= 2\pi \int_0^R 2R^2 - 2Rz + \frac{z^2}{2} - \frac{R^2}{2} \, dz = 2\pi \left[2R^2 z - R z^2 + \frac{z^3}{6} - \frac{R^2 z}{2}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3 .
\end{aligned}
$$

c) $V = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_R^{2R-z} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$

5/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_Q z\,\rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_R^{2R-z} z\,\rho \, d\rho \, dz \, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R z\int_R^{2R-z} \rho \, d\rho \, dz\right) = 2\pi \int_0^R z\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_R^{2R-z} d\rho \\
&= 2\pi \int_0^R 2R^2 z - 2R z^2 + \frac{z^3}{2} - \frac{R^2 z}{2} \, dz = 2\pi \left[R^2 z^2 - \frac{2}{3}R z^3 + \frac{z^4}{8} - \frac{R^2 z^2}{4}\right]_0^R = \frac{5}{12}\pi R^4 .
\end{aligned}
$$

d) $I = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_R^{2R-z} z\,\rho \, d\rho \, dz \, d\theta = \frac{5}{12}\pi R^4$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$
z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{5}{12}\pi R^4}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{5}{16}R .
$$

e) $x_b = 0$ $\quad$ $y_b = 0$ $\quad$ $z_b = \frac{I}{V} = \frac{5}{16}R$

2/30