# Esame scritto di Matematica - Laurea in Scienze dell'architettura

## Università degli Studi di Udine - 14 luglio 2010

**Nome Cognome:** **Matricola:** **Anno iscrizione:**

**Selezionare i moduli affrontati nel presente esame:** $\boxed{1}$ $\boxed{2}$

Gli studenti iscritti agli A.A. 2007-2008 e seguenti non possono sostenere l'esame in due moduli separati. L'esame è quindi diviso nei due moduli seguenti con i relativi punti e livelli di sufficienza minimi da conseguire in entrambi (l'insufficienza in uno dei due moduli rende insufficiente l'esame):

1. matematica 1: 20 punti + 3 punti bonus, minimo 12 punti per la sufficienza;
2. matematica 2: 10 punti + 7 punti bonus, minimo 6 punti per la sufficienza.

Il tempo totale è di 3 ore.

Agli iscritti negli A.A. 2006-2007 e precedenti che intendono sostenere solo uno dei moduli (per chi li affronta entrambi vale quanto scritto sopra) è aggiunta alla sezione corrispondente un numero di esercizi per 10 o 14 punti con un ricalcolo della sufficienza e del tempo come segue:

1. matematica 1: (20 + 3 punti bonus) + (10 punti), minimo 18 punti per la sufficienza, 3 ore;
2. matematica 2: (10 punti + 7 punti bonus) + (10 punti + 4 punti bonus), minimo 12 punti per la sufficienza (20 punti corrisponde al voto trenta/30), 2 ore.

Scrivete chiaramente e in buon italiano. Sono ammessi solo carta e penna.

## ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 1 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

### Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{1}$ o i moduli $\boxed{1+2}$
### (20 punti + 3 punti bonus)

1. È data la funzione reale di variabile reale $f$ definita da $f(x) = |x^2 - 2|$. Si disegni il grafico di $f$, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di $f$, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, crescenza/decrescenza, convessità/concavità. (8 punti)

2. Siano $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $\lim_{x\to+\infty} g(x)h(x) = 1$. Sia inoltre $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   Si dica se $h$ è limitata o meno e lo si motivi. (2 punti)

   Si dica se può accadere che non esiste il limite di $h$ per $x \to +\infty$ e lo si motivi. (3 punti)

3. Si studi
$$\lim_{x\to-\infty} x(1 - \cos x). \qquad \text{(5 punti)}$$

4. Si calcoli l'integrale indefinito
$$\int \varphi(x)dx = \int e^x \tan(e^x)dx; \qquad \text{(5 punti)}$$

**Parte aggiuntiva per chi affronta solo il modulo $\boxed{1}$ (10 punti)**

5. Si determini l'equazione della tangente al grafico della funzione dell'esercizio 1 nel punto $(2, f(2))$. (2 punti)
6. Si dimostri che la funzione $p(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ ammette uno zero e se ne calcoli uno con un errore inferiore a $2^{-2}$. (4 punti)
7. Si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione dell'esercizio 6 centrato in $x = 1$. (4 punti)

## ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 2 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$ o i moduli $\boxed{1+2}$**
**(10 punti + 7 punti bonus)**

8. Sia $\pi_1 \subset \mathbb{R}^3$ il piano dato dall'equazione $2x + 3y - 7z = 2$ e sia $\pi_2 \subset \mathbb{R}^3$ il piano i cui punti sono parametrizzati da $P(s,t) = (1,0,0) + s(1,0,1) + t(0,1,-1)$. Si trovi
   (a) una parametrizzazione della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$; (2 punti)
   (b) il coseno dell'angolo tra $\pi_1$ e $\pi_2$. (2 punti)
9. È data la regione $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\}$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R}, \ f(x,y) = 2xy + x - y$.
   (a) Si disegni $D$; (1 punto)
   (b) si dimostri che $f$ è differenziabile; (2 punti)
   (c) si calcolino i punti critici di $f$ e si dica di che tipo sono; (2 punti)
   (d) si calcolino i massimi e minimi di $f$ in $D$. (3 punti)
10. È data la regione $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2, \ x \leq 0\}$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R}, \ f(x,y) = -xy^2$.
    (a) Si disegni $D$; (1 punto)
    (b) si calcoli l'integrale di superficie $\iint_D f dS$. (4 punti)

**Parte aggiuntiva per chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$ (10 punti + 4 punti bonus)**

11. Sia $f$ la funzione dell'esercizio 9.
    (a) Si dica se $f$ è limitata o meno; (1 punto)
    (b) si determini l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$; (2 punti)
    (c) si calcoli la derivata direzionale in $(1,1)$ rispetto al versore definito da $\mathbf{v} = (2,1)$. (2 punti)
12. È data la funzione a valori vettoriali $\vec{r} : [0,2] \to \mathbb{R}^3, \ \vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{t+1}\vec{j} + \sqrt{2}e^{t+1/2}\vec{k}$.
    (a) Si verifichi che la curva $\mathscr{R} = \vec{r}([0,2])$ è regolare; (2 punti)
    (b) si calcoli la lunghezza d'arco $s(t)$; (3 punti)
    (c) si calcoli la lunghezza di $\mathscr{R}$; (1 punto)
    (d) si calcoli la curvatura di $\mathscr{R}$ al variare di $t \in [0,2]$; (2 punti)
    (e) usando il risultato di 12d, si dica che tipo di luogo geometrico è $\mathscr{R}$. (1 punto)