3-DIMENSIONAL MATCHING

Vaccari Lorenzo

14 gennaio 2004

Corso di Laurea specialistica in informatica, Università di Trento
via Sommarive 14, 38050 Povo, Italy
40qc@kirk.science.unitn.it

Sommario

In questo documento dimostreremo che il problema del 3-DM appartiene all'insieme dei problemi NP-completi. La riduzione [2] è da 3-SAT ed è basata sulla tecnica del "Component design".

Keywords: 3-SATISFIABILITY, 3-SAT, 3-DIMENSIONAL MATCHING, 3-DM, problemi NP, problemi NP-completi.

1 Introduzione

Consideriamo il seguente "problema dei matrimoni": dati n uomini celibi e n donne nubili ed una lista di coppie maschio-femmina che vorrebbero vicendevolmente sposarsi, è possibile combinare n matrimoni in modo da accoppiare ogni individuo evitando però la poligamia? E' stato dimostrato che tale problema può essere risolto in tempo polinomiale ed attualmente l'algoritmo che detiene il record sul running time asintotico è stato proposto in [1].

Estendiamo ora la domanda al caso in cui si abbiano tre differenti sessi, e ogni tripla corrisponda ad un matrimonio a tre desiderabile da tutti e tre i partecipanti. In questo caso "evitare la poligamia" significa "evitare che due triple differenti condividano una persona di uno dei tre sessi".

Nel problema del 3-DM gli insiemi W, X, Y corrispondono ai tre differenti sessi, e ogni tripla in $M \subseteq W \times X \times Y$ corrisponde ad un matrimonio a tre desiderabile da tutti e tre i partecipanti. Tradizionalisti e bacchettoni saranno felici di sapere che in questo caso, contrariamente a quanto detto per matrimoni a due, il problema del 3-DM è NP-completo e molto probabilmente non può essere risolto in tempo polinomiale.

Prima di dare la definizione formale del problema 3-DM introduciamo il significato di alcuni termini che useremo frequentemente nel prosieguo del documento.

Definizione 1.1 (Matching). Dato un grafo $G = (V, E)$, un *matching* è un sottoinsieme di archi $E' \subseteq E$, tale che non esistono due archi di E' incidenti nel medesimo nodo di V.

Definizione 1.2 (Nodo coperto). Con riferimento ad un grafo $G = (V, E)$ e ad un matching M, diremo che un nodo di V è *coperto* (da M) se appartiene ad un arco in M, altrimenti diremo che il nodo è *esposto*.

Definizione 1.3 (Perfect matching). Un matching di $G = (V, E)$, che copra tutti i nodi di V, è detto *perfect matching*.

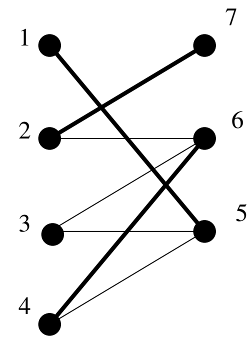

Figura 1: *Un esempio di matching (archi più evidenti) e di nodo esposto (nodo 3).*

In Figura 1 diamo un esempio degli oggetti definiti in 1.1 e in 1.2. Il matching (archi più evidenti) copre tutti i nodi del grafo tranne il nodo 3, che è esposto.

Le nozioni di *matching*, *nodo coperto ed esposto*, e *perfect matching* si estendono in modo naturale agli *ipergrafi*. Un *ipergrafo* è una coppia (V, H), dove V è un insieme finito di nodi e H è una famiglia di sottoinsiemi di V detti *iperarchi*. Nel caso in cui ogni iperarco di H abbia cardinalità due, l'ipergrafo è un grafo.

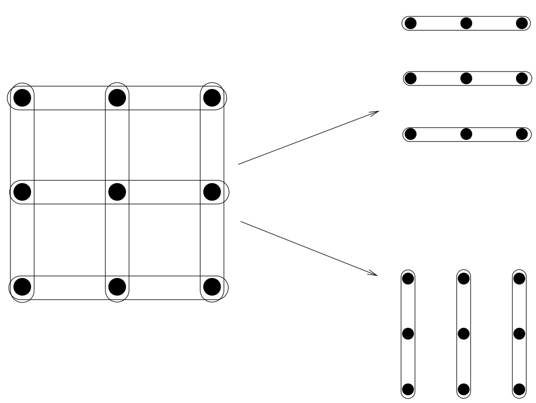

Figura 2: *L'ipergrafo delle righe e delle colonne di una matrice ha due perfect matching distinti.*

La Figura 2 mostra un esempio di ipergrafo in cui ogni riga e ogni colonna rappresenta un iperarco. In tale ipergrafo possiamo individuare due perfect matching distinti: il primo relativo alle righe, il secondo relativo alle colonne.

Possiamo ora dare la definizione di 3-DM.

Definizione 1.4 (3-DM).
ISTANZA:

Un insieme $M \subseteq W \times X \times Y$, dove W, X, Y sono insiemi disgiunti aventi lo stesso numero q di elementi.
DOMANDA:
M contiene un *perfect matching*, cioè un sottoinsieme $M' \subseteq M$ tale che $|M'| = q$ e nessun elemento di $W \cup X \cup Y$ appartiene a due diverse triple in M' ?

2 3-DM è NP-completo

In termini formali, dimostreremo il seguente:

Teorema 2.1. *3-DM è NP-completo.*

Dimostrazione. Lo schema tipo per una dimostrazione di NP-completezza, come previsto in [2], prevede quattro passi principali:

1. si dimostra che Π appartiene a NP;

2. si seleziona un problema Π' che è noto essere NP-completo;

3. si costruisce una trasformazione f da Π' a Π;

4. si prova che f è una trasformazione polinomiale.

1. Per dimostrare che 3-DM appartiene a NP possiamo utilizzare un algoritmo non deterministico che genera un sottoinsieme di $q = |W| = |X| = |Y|$ triple da M e che controlla in tempo lineare se un elemento non sia condiviso da due o più triple.

2. Per la seconda fase della dimostrazione selezioniamo il problema NP-completo 3-SAT [2]. Il problema è una versione ristretta di SAT nel quale le istanze hanno esattamente tre letterali in ogni clausola. La sua semplice struttura lo rende uno dei problemi più utilizzati per dimostrare altri risultati di NP-completezza.

Definizione 2.1 (3-SAT).
ISTANZA:
Una collezione $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ di clausole su un insieme finito U di variabili tale che $|c_i| = 3$ per $1 \leq i \leq m$.
DOMANDA:
Esiste un assegnamento di verità per U che soddisfa tutte le clausole in C ?

3. e 4. Costruiamo ora una trasformazione f da 3-SAT a 3-DM. Siano $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ l'insieme di variabili e $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ l'insieme di clausole di un'arbitraria istanza di 3-SAT. Partendo da $\langle U, C\rangle$ costruiremo un'istanza di 3-DM composta da tre insiemi disgiunti W, X, Y con identica cardinalità e da un insieme $M \subseteq W \times X \times Y$, e dimostreremo che M contiene un perfect matching M' se e solo se $\langle U, C\rangle$ è soddisfacibile.

Anticipiamo subito che, nell'istanza di 3-DM a cui perverremo, avremo che $W = \{u_i[j], \overline{u}_i[j] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, da cui possiamo calcolare immediatamente il valore di $q = |W| = 2mn$.

Secondo la tecnica denominata "Component Design", descriveremo nel seguito tre tipologie di componenti: "Truth setting and fan-out", "Satisfaction testing" e "Garbage collection".

Per ciascuna variabile $u_i \in U$ introduciamo una componente T_i di tipo "Truth setting and fan-out". La struttura di T_i dipende dal numero totale m di clausole in C. Le Figure 3 e 4 mostrano la componente per $m = 4$.

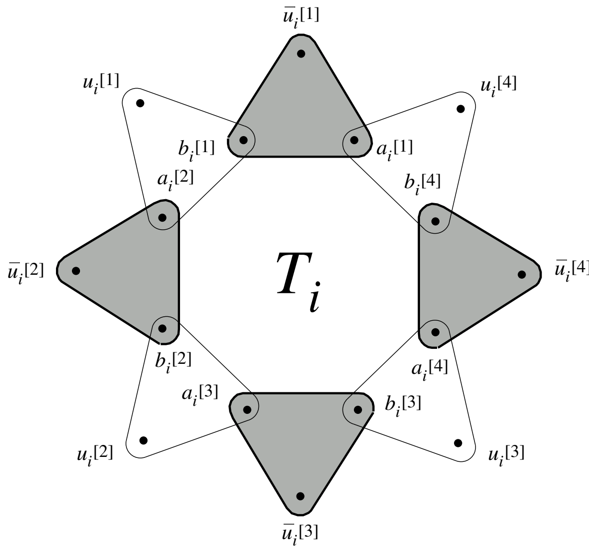

Figura 3: *La componente "Truth setting and fan-out" T_i nel caso di $m = 4$.*

Ogni componente "Truth setting and fan-out" è composta da elementi "interni" $a_i[j] \in X$ e $b_i[j] \in Y$, $1 \leq j \leq m$, che non appartengono ad altre triple, e da elementi "esterni" $u_i[j], \overline{u}_i[j] \in W$, $1 \leq j \leq m$, che possono appartenere anche ad altre triple.
Suddividiamo le triple di questa componente in due insiemi:

$$T_i^t = \{(\overline{u}_i[j], a_i[j], b_i[j]) : 1 \leq j \leq m\}$$
$$T_i^f = \{(u_i[j], a_i[j+1], b_i[j]) : 1 \leq j \leq m\} \cup \{(u_i[m], a_i[1], b_i[m]) : 1 \leq j \leq m\}.$$

Considerato che nessuno degli elementi interni $\{(a_i[j], b_i[j]) : 1 \leq j \leq m\}$ può apparire nelle triple al di fuori di $T_i = T_i^t \cup T_i^f$, ogni perfect matching M' dovrà includere esattamente m triple da T_i: o tutte le triple in T_i^t o tutte le triple in T_i^f. Dunque, nelle nostre intenzioni, un perfect matching $M' \subseteq M$ specifica un assegnamento di verità per U, con la variabile u_i vera se e solo se $M' \cap T_i = T_i^t$.

Per ogni clausola $c_j \in C$, introduciamo ora una componente "Satisfaction testing" C_j. Ogni componente di questo tipo contiene solo due elementi "interni", $s_x[j] \in X$ e $s_y[j] \in Y$, e tre elementi esterni, presi dal sottoinsieme $W_j = \{u_i[j], \overline{u}_i[j] : 1 \leq i \leq n\}$ di W, determinati da quali tre letterali sono presenti nella clausola c_j. La componente è data dal seguente insieme di tre triple:

$$\{(u_i[j], s_x[j], s_y[j]) : \text{il letterale } u_i \text{ appare in } c_j\} \cup \{(\overline{u}_i[j], s_x[j], s_y[j]) : \overline{u}_i \text{ appare in } c_j\}.$$

Per costruzione, per ogni C_j, un qualsiasi perfect matching $M' \subseteq M$ deve contenere esattamente una tripla di C_j che si occupi di coprire gli elementi interni $s_x[j]$ ed $s_y[j]$ di C_j. Questo è possibile solo se almeno un letterale di c_j non appartiene alle triple in $T_i \cap M'$ selezionate dalle componenti "Truth setting and fan out" di cui si è detto prima. In questo modo, le componenti "Truth setting and fan out" forzano il valore di verità di una variabile u_i, e la componente "Satisfaction testing" seleziona un'occorrenza di una variabile che fa sì

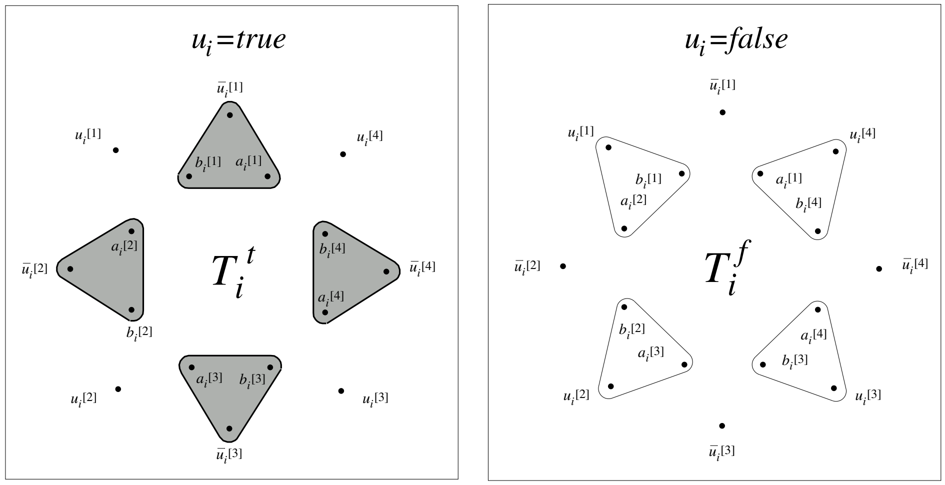

Figura 4: *La selezione di tutti gli insiemi di T_i^t (gli insiemi ombreggiati), oppure di tutti gli insiemi di T_i^f (gli insiemi trasparenti), lascia rispettivamente scoperte tutte le $u_i[j]$ o tutte le $\overline{u}_i[j]$.*

che la rispettiva clausola sia soddisfatta.

Prima di introdurre la terza componente eseguiamo alcuni conteggi (v. Tabella 2): abbiamo già detto che $q = |W| = 2mn$. Le due componenti viste fino ad ora permettono di comporre solo una parte del perfect matching M' che, ricordiamo, deve essere composto precisamente da q triple; in particolare, la componente “Truth setting and fan out” seleziona da M esattamente mn triple, e la componente “Satisfaction testing” ne seleziona m. Ne consegue che il numero delle triple mancanti per completare il perfect matching è: $2mn - mn - m = m(2n - n - 1) = m(n - 1)$.

Per consentire le triple mancanti introduciamo una componente G detta “Garbage collection”. La componente “Garbage collection” coinvolge elementi “interni” $g_x[k] \in X$ e $g_y[k] \in Y$, $1 \leq k \leq m(n-1)$, e tutti gli elementi di W in qualità di elementi “esterni”. Definiamo G come il seguente insieme di triple:

$$G = \{(u_i[j], g_x[k], g_y[k]), (\overline{u}_i[j], g_x[k], g_y[k]) : 1 \leq k \leq m(n-1), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Ogni coppia $g_x[k]$, $g_y[k]$ consente ora di coprire un nodo $u_i[j]$ o $\overline{u}_i[j]$ di W che non appare nelle triple in $M' - G$. Dunque la struttura di G assicura che possano essere sempre coperti i restanti $m(n-1)$ elementi di W selezionando appropriatamente $M' \cap G$.

La componente G gode infatti della seguente proprietà:

Proprietà 1. *Ogni matching in G copre al più $m(n-1)$ nodi di W. Sia W' un qualsiasi sottoinsieme di W con $|W'| = m(n-1)$. Allora esiste un matching in G che copre W'.*

L'insieme G garantisce pertanto che, se un matching in $M - G$ soddisfa i vincoli imposti dalle componenti “Truth setting and fan-out” e “Satisfaction testing”, allora tale sottoinsieme può essere esteso ad un perfect matching $M' \subseteq M$.

Riassumendo abbiamo:

$$W = \{(u_i[j], \overline{u}_i[j] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

$X = A \cup S_X \cup G_X$
dove

$A = \{a_i[j] : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$
$S_X = \{s_x[j] : 1 \le j \le m\}$
$G_X = \{g_x[j] : 1 \le j \le m(n-1)\}$

$Y = B \cup S_Y \cup G_Y$
dove

$B = \{b_i[j] : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$
$S_Y = \{s_y[j] : 1 \le j \le m\}$
$G_Y = \{g_y[j] : 1 \le j \le m(n-1)\}$.

Abbiamo inoltre definito l'insieme M come:

$$M = \left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} C_j\right) \cup G.$$

Nella Tabella 1 possiamo notare la composizione degli insiemi W, X, Y nel caso di $m = 2$ e $n = 4$.

W	X	Y
$u_1[1]$	$a_1[1]$	$b_1[1]$
$\overline{u}_1[1]$	$a_1[2]$	$b_1[2]$
$u_1[2]$	$a_2[1]$	$b_2[1]$
$\overline{u}_1[2]$	$a_2[2]$	$b_2[2]$
$u_2[1]$	$a_3[1]$	$b_3[1]$
$\overline{u}_2[1]$	$a_3[2]$	$b_3[2]$
$u_2[2]$	$a_4[1]$	$b_4[1]$
$\overline{u}_2[2]$	$a_4[2]$	$b_4[2]$
$u_3[1]$	$s_x[1]$	$s_y[1]$
$\overline{u}_3[1]$	$s_x[2]$	$s_y[2]$
$u_3[2]$	$g_x[1]$	$g_y[1]$
$\overline{u}_3[2]$	$g_x[2]$	$g_y[2]$
$u_4[1]$	$g_x[3]$	$g_y[3]$
$\overline{u}_4[1]$	$g_x[4]$	$g_y[4]$
$u_4[2]$	$g_x[5]$	$g_y[5]$
$\overline{u}_4[2]$	$g_x[6]$	$g_y[6]$

Tabella 1: *Gli insiemi W, X, Y nel caso di $m = 2$ e $n = 4$.*

Si noti come ogni tripla in M sia effettivamente un elemento di $W \times X \times Y$ e pertanto M sia da considerarsi come un'istanza di 3-DM. Inoltre, M contiene solo $2mn+3m+2m^2n(n-1)$ triple la cui definizione in termini dell'istanza di 3-SAT che si intende rappresentare è diretta. Se ne deduce che M può essere costruito in tempo polinomiale partendo da $\langle U, C\rangle$.

Per completare la nostra dimostrazione di NP-completezza resta solo da dimostrare che M ammette un perfect matching M' se e solo se $\langle U, C\rangle$ è soddisfacibile. A questo scopo predisponiamo i seguenti due lemmi.

Lemma 2.2. *Se l'istanza $\langle U, C\rangle$ di 3-SAT è soddisfacibile, allora M ammette un perfect matching.*

Dimostrazione. Sia $t : U \to \{T, F\}$ un assegnamento di verità che soddisfa C. Costruiamo il perfect matching $M' \subseteq M$ nel modo seguente: per ogni clausola $c_j \in C$, sia $z_j \in \{u_i, \overline{u}_i : 1 \le i \le n\} \cap c_j$ un letterale posto a vero da t (ne esiste almeno uno, visto che t soddisfa c_j).
Ora poniamo:

$$M' = \left(\bigcup_{t(u_i)=T} T_i^t \right) \cup \left(\bigcup_{t(u_i)=F} T_i^f \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \{(z_j[j], s_x[j], s_y[j])\} \right) \cup G'.$$

dove G' è un matching di $m(n-1)$ triple di G che include tutte le $g_x[k]$, $g_y[k]$, ed i nodi $u_i[j]$, $\overline{u}_i[j]$ non ancora coperti in W. L'esistenza di un tale G' è garantita dalla Proprietà 1. Ne consegue che M' è un perfect matching. $\square$

Lemma 2.3. *Sia M' un perfect matching di M, allora $\langle U, C\rangle$ è soddisfacibile.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che, per ogni $u_i \in U$, M' include esattamente m triple da T_i: o tutte le triple in T_i^t o tutte le triple in T_i^f. Possiamo pertanto definire il truth assignment $t : U \to \{T, F\}$ in cui $t(u_i) = T$ se e solo se $M' \cap T_i = T_i^t$. Mostreremo ora che t è un truth assignment che soddisfa C. Consideriamo pertanto la generica clausola $c_j \in C$. Si noti che, per coprire gli elementi privati della componente di tipo Satisfaction testing C_j, almeno una tripla di C_j deve essere contenuta in M'. Tale tripla coprirà un letterale di c_j che non appartiene a nessuna tripla in $M' \cap T_i$. Dato che $t(u_i) = T$ se e solo se $M' \cap T_i = T_i^t$, il truth assignment t soddisfa la clausola c_j. Ne consegue che tutte le clausole $c_j \in C, 1 \le j \le m$, sono soddisfatte dal truth assignment t. Quindi $\langle U, C\rangle$ è soddisfacibile. $\square$

Significato	Enumerazione
Numero di variabili in $\langle U, C\rangle$	n
Numero di clausole $\langle U, C\rangle$	m
Componente "Truth setting and fan out": triple in M	$2mn$
Componente "Truth setting and fan out": triple in M'	mn
Componente "Satisfaction testing": triple in M	$3m$
Componente "Satisfaction testing": triple in M'	m
Componente "Garbage collection": triple in M	$2m^2n(n-1)$
Componente "Garbage collection": triple in M'	$m(n-1)$
Dimensione del perfect matching: $\|M'\| = q = \|W\| = \|X\| = \|Y\|$	$2mn$
Dimensione M	$2mn + 3m + 2m^2n(n-1)$

Tabella 2: *Tabella riassuntiva di riferimento.*

$\square$

Riferimenti bibliografici

[1] HOPCROFT, J. E., AND R. M. KARP, An $n^5/2$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs, SIAM J. Comput., 2, 225-231. (1973).

[2] MICHAEL R. GARY / DAVID S. JOHNSON, Computers and Intractability, W. H. Freeman And Company, San Francisco. (1979).