Relazione di Complessitá

Marco Stenico 211qc

22 giugno 2003

Indice

1 Dominating Set

In questa sezione introduciamo il problema di *Dominating Set* (da ora DS) e ne dimostriamo l'NP-completezza.

Dominating Set (DS)
INPUT: un grafo $G = (V, E)$ ed un intero positivo k.
OUTPUT: esiste un *dominating set* di dimensione al piú k per G, cioé un sottoinsieme $D \subseteq V$ tale che $|D| \leq k$ e tale che ogni vertice $v \in V - D$ é unito ad almeno un elemento di D da un lato in E?

Rendersi conto che DS é in NP é abbastanza semplice, ma é comunque una buona idea affermarlo in evidenza.

Osservazione 1.1 *DS é in NP.*

Dimostazione se l'oracolo ci dá una soluzione D al problema siamo in grado di verificare che é giusta in tempo polinomiale. Basta verificare che $|D| \leq k$ e che ogni vertice $v \in V - D$ é unito ad almeno un vertice in D da un lato in E. $\square$

La dimostrazione di NP-completezza a cui sono pervenuto é un po' piú complessa. Prima di descriverla, cercheró di riportare alcune considerazioni di carattere intuitivo che mi hanno permesso di giungere alla soluzione proposta.
Sono partito cercando un problema noto NP-completo da trasformare in DS. *Vertex Cover* (VC) sembrava il piú simile. Riporto qui la definizione del problema.

Vertex Cover (VC)
INPUT: un grafo $G = (V, E)$ ed un intero positivo k.
OUTPUT: esiste un *vertex cover* di dimensione al piú k per G, cioé un sottoinsieme $C \subseteq V$ tale che $|C| \leq k$ e tale che per ogni lato $uv \in E$ almeno uno tra u e v appartiene a C?

Teorema 1.2 *DS é NP-completo.*

Dimostazione Abbiamo giá osservato (vedi Osservazione 1.1) che DS $\in$ NP.
Proponiamo ora una riduzione polinomiale da VC a DS. Si consideri una generica istanza $\langle G, k \rangle$ di VC, dove $G = (V, E)$ e $k > 0$. Dobbiamo costruire un grafo $G' = (V', E')$ e un intero positivo k' tale che G ha un *vertex cover* di dimensione al piú k se e solo se G' ha un *dominating set* di dimensione al piú k'.
Costruiremo un nuovo grafo che ha come vertici sia i vertici di G sia i lati di G e prenderemo $k' = k$.
Sia l'insieme dei nodi-lato definito come $V_e = \{v_e | e \in E\}$. Definiamo l'insieme dei nodi del nuovo grafo $V' = V \bigcup V_e$. Metto in relazione i lati del grafo G con i vertici che lo compongono, cioé costruisco l'insieme dei lati $E_e = \{uv_e | u \in e\}$.

Costruisco una clique su i vertici di V, introducendo un nuovo insieme di lati $E_v = \{uv | u, v \in V \text{ con } v \neq u\}$. Definisco finalmente l'insieme dei lati del nuovo grafo come $E' = E_v \cup E_e$.

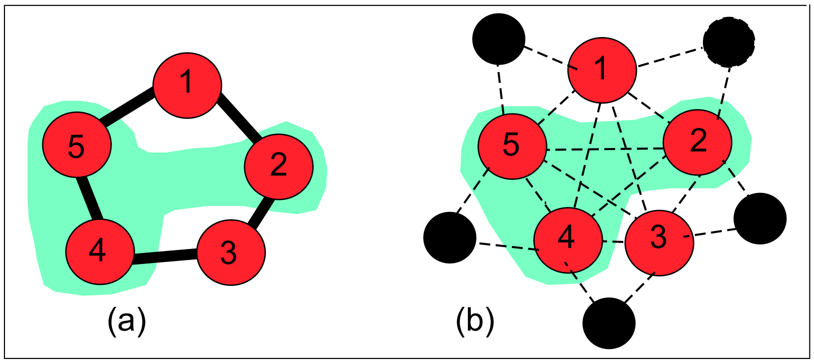

Figura 1: Costruzione del grafo. (a) un'istanza $\langle G, k\rangle$ con $k = 3$ di VC, l'area colorata é un possibile *vertex cover* per G (b) risultato della riduzione a DS, l'area colorata é un *dominating set*.

La Figura 1 illustra come avviene la costruzione del grafo.
É evidente che tale trasformazione puó essere condotta in tempo polinomiale.
Rimane da dimostrare che G' ha un *dominating set* di dimensione al piú $k' = k$ se e solo se G ha un *vertex cover* di dimensione al piú k.
($\Leftarrow$) *supponiamo che G abbia un* vertex cover *C di dimensione al piú k.* Dimostriamo che C é un *dominating set* per G'. Prendiamo un nodo $v \in V'$. Se $v \in V_e$ allora di sicuro é adiacente ad un nodo in C, infatti v é un lato $u_i u_j \in G$ e almeno uno dei vertici u_i, u_j deve appartenere al *vertex cover.* Se il nodo $v \in V$ allora abbiamo due possibilitá o il nodo $v \in C$ e quindi abbiamo concluso, oppure $v \notin C$, ma per come abbiamo costruito il grafo G', v é adiacente ad ogni nodo di V e in particolar modo ad un nodo $u \in C$. [1]
($\Rightarrow$) *supponiamo che G' abbia un* dominating set *D di dimensione al piú k.* Questa volta non possiamo dire che D é un *vertex cover* per G perché nel *dominating set* ci potrebbero essere selezionati alcuni nodi-lato.
Prendiamo un nodo-lato $v_e \in D$, dove $e = uv$ é un lato di G. Per costruzione v_e é adiacente solo ai nodi v ed u. Definisco un nuovo insieme $D' = D - \{v_e\} \bigcup \{v\}$.
É facile vedere che $|D| \leq |D'|$ e che D' é ancora un *dominating set.*
Posso ripetere l'algoritmo sopra per ogni nodo-lato nel *dominating set* ed ottengo un nuovo *dominating set* $\widetilde{D}$ con $|\widetilde{D}| \leq k$ e composto solo da nodi in V.
Resta da dimostrare che $\widetilde{D}$ é un *vertex cover* per G. Consideriamo un nodo lato $uv \in V_e$. Per come abbiamo costruito $\widetilde{D}$, uv non appartiene al *dominating set*, ma allora, in quanto uv é adiacente solo ai due nodi u e $v \in V$ e per la definizione di *dominating set*, $u \in \widetilde{D}$ oppure $v \in \widetilde{D}$. Quindi $\widetilde{D}$ é un *vertex cover* per G.$\square$

[1] Possiamo supporre senza perdita di generalitá che il grafo G contega almeno un arco.

2 Independent Set

In questa sezione introduciamo ora il problema di *Independent Set* (IS). Tale problema é noto essere NP-completo (vedi [1, p.188]). Mostreremo come rimanga NP-completo anche se ci si restringe a considerare solo grafi planari.

Planar Independent Set (Planar IS)
INPUT: un grafo $G = (V, E)$ planare, un intero positivo k.
OUTPUT: esiste un *independent set* di dimensione k per G, cioé un sottoinsieme $I \subseteq V$ tale che $|I| = k$ e tale che se u, $v \in I$ non c'é alcun lato tra u e v?

Osservazione 2.1 *Planar IS é in NP.*

Dimostazione segue immediatamente dal fatto che IS é in NP.□

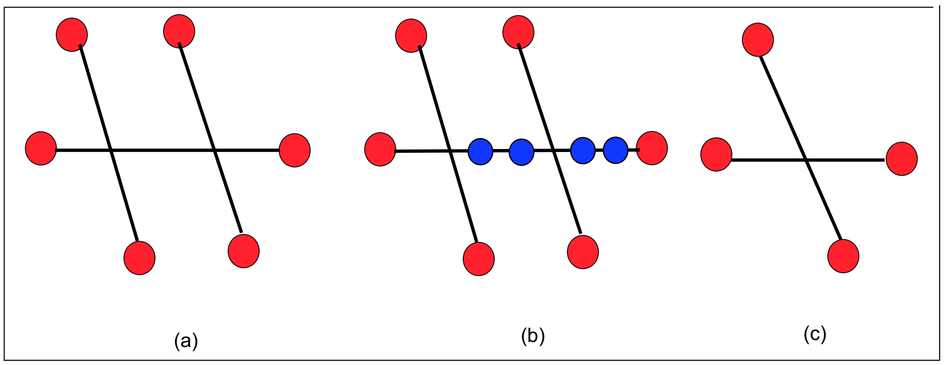

Figura 2: (a) caso generale (b) riduzione (c) crossing semplice.

In generale un lato puó formare piú di un crossing, vedi Figura 2 (a). Possiamo peró ricondurci al caso piú semplice di Figura 2 (c), dove ogni lato puó formare al piú un crossing. Basta applicare la riduzione proposta nella Figura 2 (b). Dimostriamo questo fatto attraverso il seguente lemma.

Lemma 2.2 *IS é NP-completo anche se ci si restringe a considerare grafi in cui un lato forma al piú un crossing (IS').*

Dimostazione IS' é in NP in quanto IS é in NP. Proponiamo ora una riduzione polinomiale da IS a IS'. Si consideri una generica istanza $\langle G, k \rangle$ di IS, dove $G = (V, E)$ e k é un intero positivo. Dobbiamo costruire un grafo $G' = (V', E')$ dove ogni lato forma al piú un crossing e un intero positivo k' tale che G ha un *independent set* di dimensione k se e solo se G' ha un *independent set* di dimensione k'. Per costruire G' procediamo come segue. Sia c_{uv} il numero di crossing formati dal lato $uv \in E$. Suddividiamo ogni lato $uv \in E$ con l'aggiunta di $2c_{uv}$ nodi artificiali $a_1, a_2, \ldots, a_{2c_{uv}}$, due tra il vertice v e il piú vicino crossing, due tra ogni coppia di crossing adiacenti (vedi Figura 2). Completiamo la riduzione

settando $k' = k + c$ dove $c = \sum_{uv \in E} c_{uv}$. É evidente che tale trasformazione puó essere condotta in tempo polinomiale.
Rimane da dimostrare che G' ha un *independent set* di dimensione k' se e solo se G ha un *independent set* di dimensione k.
($\Leftarrow$) *Supponiamo che* G *abbia un* independent set I *con* $|I| = k$. Allora possiamo costruire un *independent set* I' per G' di dimensione k' procedendo come segue. Inizialmente poniamo $I' = I$. Per ogni lato $uv \in E$, entrambi i vertici v e u non possono appartenere all'insieme indipendente I. Quindi senza perdita di generalitá assumiamo che $u \notin I$ e quindi $u \notin I'$. Consideriamo il cammino $u, a_1, a_2, \ldots, a_{2c_{uv}}, v$ nel grafo G', dove $a_1, a_2, \ldots, a_{2c_{uv}}$ sono i nodi artificiali aggiunti al lato $uv \in E$. Aggiungiamo all'insieme indipendente I' i c_{uv} nodi artificiali di indice dispari $a_1, a_3, \ldots, a_{2c_{uv}-1}$. É facile vedere che I' é ancora un insieme indipendente. Ripetendo lo stesso algoritmo per tutti i lati di G otteniamo un insieme indipendente I' di dimensione k'.
($\Rightarrow$) *supponiamo che* G' *abbia un independent set* I' *con* $|I'| = k'$. Posso ottenere un insieme indipendente per G di dimensione k procedendo nel seguente modo. Inizialmente pongo $I = I'$. Consideriamo $uv \in E$, allora si possono verificare i seguenti casi:

i. i nodi u e v non appartengono entrambi a I. Allora al piú c_{uv} dei nodi artificiali $a_1, a_2, \ldots, a_{2c_{uv}}$ che sono stati aggiunti al lato uv possono essere nell'insieme indipendente I. Tolgo da I i nodi artificiali $a_1, a_2, \ldots, a_{2c_{uv}}$.

ii. entrambi i nodi u e v appartengono a I. Allora al piú $c_{uv} - 1$ dei nodi artificiali $a_1, a_2, \ldots, a_{2c_{uv}}$ possono essere in I. Tolgo da I i nodi artificiali e il nodo v.

Ripetendo lo stesso procedimento per ogni lato $uv \in E$ ottengo un insieme indipendente per G, I, tale che $|I| > k' - \sum_{uv \in E} c_{uv} = k$. Eliminando alcuni nodi da I posso ottenere finalmente un insieme indipendente di cardinalitá esattamente k. $\square$

Per dimostrare l'NP-completezza di Planar IS presenteremo una riduzione polinomiale dal problema generale (con istanze non necessariamente planari), utilizzando la tecnica di local replacement. Useremo il gadget proposto da [3].

Teorema 2.3 *Planar IS é NP-completo.*

Dimostazione Abbiamo giá osservato (vedi Osservazione 2.1) che Planar IS é in NP. Proponiamo ora una riduzione polinomiale da IS a Planar IS. Si consideri una generica istanza $\langle G, k \rangle$ di IS, dove $G = (V, E)$ e k é un intero positivo. Dobbiamo costruire un grafo planare $G' = (V', E')$ e un intero positivo k' tale che G ha un *independent set* di dimensione k se e solo se G' ha un *independent set* di dimensione k'.
Come osservato nel Lemma 2.2, possiamo supporre che ogni lato di G formi al piú un crossing.
Per costruire G' sostituiamo ogni crossing nel grafo G con il grafo-gadget $H = (R \bigcup B, E_h)$ di Figura 2 (b). Come mostra la figura, l'insieme B corrisponde

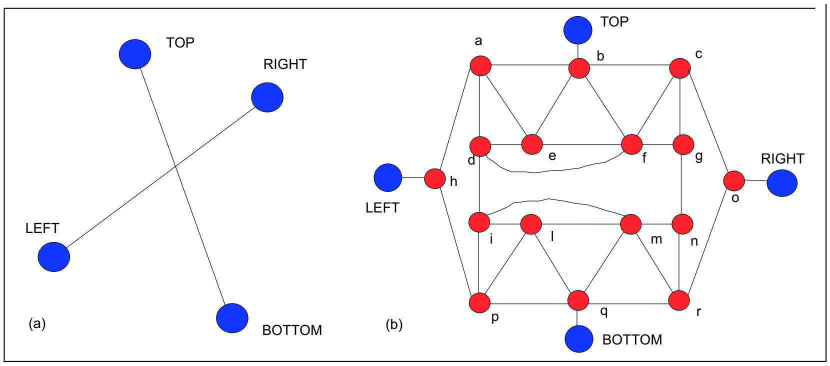

Figura 3: Il grafo-gadget $H = (R \bigcup B, E_h)$ dove $B = \{top, bottom, left, right\}$ e $R = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n, o, p, q, r\}$.

all'insieme dei nodi degli archi che formano il crossing in G. Il gadget ha le seguenti proprietá:

p1) é planare;

p2) se due nodi in B ed opposti (ad esempio left e right) sono nell'*independent set*, posso inserire nell'*independent set* ancora al piú 5 nodi tra quelli appartenetenti a R;

p3) se tutti i nodi in B (cioé left, right, top, bottom) sono nell'*independent set* posso inserire nell'*independent set*, ancora al piú 4 nodi tra quelli appartenetenti a R;

p4) in tutti gli altri casi posso inserire fino ad esattamente 6 nodi appartenenti a R nell'*independent set*;

Completiamo la riduzione settando $k' = k + 6c$ dove c é il numero di crossing in G. É evidente che tale trasformazione puó essere condotta in tempo polinomiale. Rimane da dimostrare che G' ha un *independent set* di dimensione k' se e solo se G ha un *independent set* di dimensione k.
($\Leftarrow$) *Supponiamo che* G *abbia un* independent set I *con* $|I| = k$. Allora possiamo costruire un *independent set* I' per G' di dimensione k' procedendo come segue: inizialmente pongo $I' = I$, poi aggiungo ad I' sei nodi appartenenti ad R per ogni gadget in modo tale che I' continui ad essere un insieme indipendente . In tutto abbiamo c gadget e quindi alla fine otterremo che $|I'| = k + 6c$. Per la Proprietá p4 é sempre possibile aggiungere ad I' sei nodi di R per ogni gadget preservando la proprietá di indipendenza perché per ipotesi I é un *independent set* per G e quindi non possono esservi inseriti due nodi in B opposti. La Figura 2 mostra i casi che possono capitare (non ho riportato quelli simmetrici).
($\Rightarrow$) *supponiamo che* G' *abbia un independent set* I' *con* $|I'| = k'$. Costruiremo un insieme indipendente I per G di cardinalitá k.
Impostiamo inizialmente $I = I'$. Ripetiamo il seguente algoritmo. Per ogni gadget g in G' possono capitare i seguenti casi:

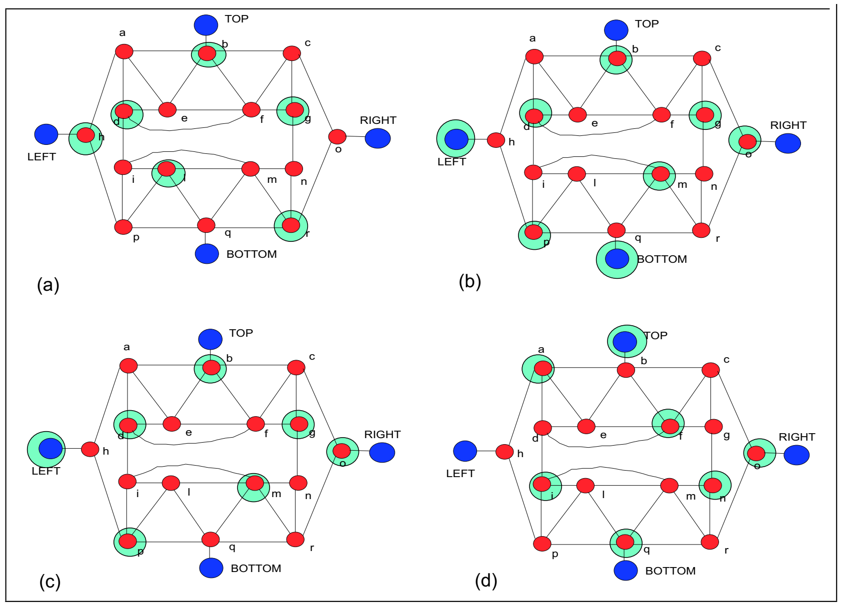

Figura 4: (a) Nessun nodo blu é in I (b) due nodi blu non opposti sono in I (c, d) un nodo blu in I.

i. se $|I \bigcap \{top_g, bottom_g\}| \leqslant 1$ e $|I \bigcap \{left_g, right_g\}| \leqslant 1$, allora per la Proprietá p4 $|I \bigcap R_g| \leqslant 6$. Possiamo definire un nuovo insieme indipendente $\widetilde{I} = I \setminus R_g$ dove $|\widetilde{I}| \geq |I| - 6$. Assegno $I = \widetilde{I}$.

ii. se $|I \bigcap \{left_g, right_g\}| \leqslant 1$ e $|I \bigcap \{top_g, bottom_g\}| = 2$, allora per la Proprietá p2 $|I \bigcap R_g| \leqslant 5$. Possiamo definire un nuovo insieme indipendente $\widetilde{I} = I \setminus (R_g \bigcup \{top_g\})$ dove $|\widetilde{I}| \geq |I| - 6$. Assegno $I = \widetilde{I}$.

iii. se $|I \bigcap \{top_g, bottom_g\}| \leqslant 1$ e $|I \bigcap \{left_g, right_g\}| = 2$, allora per la Proprietá p2 $|I \bigcap R_g| \leqslant 5$. Possiamo definire un nuovo insieme indipendente $\widetilde{I} = I \setminus (R_g \bigcup \{left_g\})$ dove $|\widetilde{I}| \geq |I| - 6$. Assegno $I = \widetilde{I}$.

iv. se $top_g, bottom_g, left_g, right_g \in I$, allora per la Proprietá p3 $|I \bigcap R_g| \leq 4$. Possiamo definire un nuovo insieme indipendente $\widetilde{I} = I \setminus (R_g \bigcup \{bottom_g, right_g\})$ dove $|\widetilde{I}| \geq |I| - 6$. Assegno $I = \widetilde{I}$.

Alla fine otteniamo un insieme indipendente I per G di dimensione $k \geq k' - 6 \cdot c$. Possiamo ottenere un insieme indipendente $\widetilde{I}$ per G di dimensione esattamente $\widetilde{k} = k' - 6 \cdot c$ togliendo $k - k' + 6 \cdot c$ vertici qualsiasi da I, cioé $\widetilde{I} = I \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2} \cdots v_{i_{k-k'+6 \cdot c}}\}$ con $v_{i_1}, v_{i_2} \cdots v_{i_{k-k'+6 \cdot c}} \in I$. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] Christos H. Papadimitriou, *Computational Complexity* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1993)

[2] Michael R. Garey, David S. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness* (W.H.Freeman and company, 1978)

[3] Thomas Emden-Weinert, Stefan Hougardy, Bernd Kreuter, Hans Jrgen Prmel, Angelika Steger, *Einfhrung in Graphen und Algorithmen*(http://www.informatik.hu-berlin.de/Institut/struktur/algorithmen/ga/)