

Relazione di Complessità

Marco Stenico 211qc

22 giugno 2003

Indice

1	Dominating Set	2
2	Independent Set	4

1 Dominating Set

In questa sezione introduciamo il problema di *Dominating Set* (da ora DS) e ne dimostriamo l'NP-completezza.

Dominating Set (DS)

INPUT: un grafo $G = (V, E)$ ed un intero positivo k .

OUTPUT: esiste un *dominating set* di dimensione al più k per G , cioè un sottoinsieme $D \subseteq V$ tale che $|D| \leq k$ e tale che ogni vertice $v \in V - D$ è unito ad almeno un elemento di D da un lato in E ?

Rendersi conto che DS è in NP è abbastanza semplice, ma è comunque una buona idea affermarlo in evidenza.

Osservazione 1.1 *DS è in NP.*

Dimostrazione se l'oracolo ci dá una soluzione D al problema siamo in grado di verificare che è giusta in tempo polinomiale. Basta verificare che $|D| \leq k$ e che ogni vertice $v \in V - D$ è unito ad almeno un vertice in D da un lato in E . \square

La dimostrazione di NP-completezza a cui sono pervenuto è un po' più complessa. Prima di descriverla, cercherò di riportare alcune considerazioni di carattere intuitivo che mi hanno permesso di giungere alla soluzione proposta. Sono partito cercando un problema noto NP-completo da trasformare in DS. *Vertex Cover* (VC) sembrava il più simile. Riporto qui la definizione del problema.

Vertex Cover (VC)

INPUT: un grafo $G = (V, E)$ ed un intero positivo k .

OUTPUT: esiste un *vertex cover* di dimensione al più k per G , cioè un sottoinsieme $C \subseteq V$ tale che $|C| \leq k$ e tale che per ogni lato $uv \in E$ almeno uno tra u e v appartiene a C ?

Teorema 1.2 *DS è NP-completo.*

Dimostrazione Abbiamo già osservato (vedi Osservazione 1.1) che $DS \in NP$. Proponiamo ora una riduzione polinomiale da VC a DS. Si consideri una generica istanza $\langle G, k \rangle$ di VC, dove $G = (V, E)$ e $k > 0$. Dobbiamo costruire un grafo $G' = (V', E')$ e un intero positivo k' tale che G ha un *vertex cover* di dimensione al più k se e solo se G' ha un *dominating set* di dimensione al più k' .

Costruiremo un nuovo grafo che ha come vertici sia i vertici di G sia i lati di G e prenderemo $k' = k$.

Sia l'insieme dei nodi-lato definito come $V_e = \{v_e | e \in E\}$. Definiamo l'insieme dei nodi del nuovo grafo $V' = V \cup V_e$. Metto in relazione i lati del grafo G con i vertici che lo compongono, cioè costruisco l'insieme dei lati $E_e = \{uv_e | u \in e\}$.

Costruisco una clique su i vertici di V , introducendo un nuovo insieme di lati $E_v = \{uv | u, v \in V \text{ con } v \neq u\}$. Definisco finalmente l'insieme dei lati del nuovo grafo come $E' = E_v \cup E_e$.

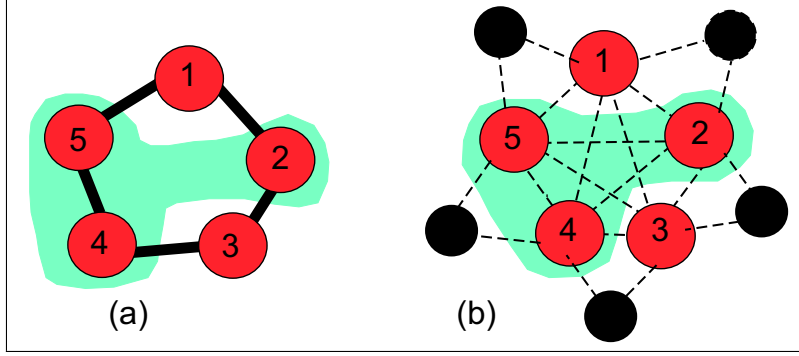


Figura 1: Costruzione del grafo. (a) un'istanza $\langle G, k \rangle$ con $k = 3$ di VC, l'area colorata é un possibile *vertex cover* per G (b) risultato della riduzione a DS, l'area colorata é un *dominating set*.

La Figura 1 illustra come avviene la costruzione del grafo.

É evidente che tale trasformazione può essere condotta in tempo polinomiale.

Rimane da dimostrare che G' ha un *dominating set* di dimensione al più $k' = k$ se e solo se G ha un *vertex cover* di dimensione al più k .

(\Leftarrow) *supponiamo che G abbia un vertex cover C di dimensione al più k . Dimostriamo che C é un dominating set per G' . Prendiamo un nodo $v \in V'$. Se $v \in E_e$ allora di sicuro é adiacente ad un nodo in C , infatti v é un lato $u_i u_j \in G$ e almeno uno dei vertici u_i, u_j deve appartenere al *vertex cover*. Se il nodo $v \in V$ allora abbiamo due possibilità o il nodo $v \in C$ e quindi abbiamo concluso, oppure $v \notin C$, ma per come abbiamo costruito il grafo G' , v é adiacente ad ogni nodo di V e in particolar modo ad un nodo $u \in C$.¹*

(\Rightarrow) *supponiamo che G' abbia un dominating set D di dimensione al più k . Questa volta non possiamo dire che D é un *vertex cover* per G perché nel *dominating set* ci potrebbero essere selezionati alcuni nodi-lato.*

Prendiamo un nodo-lato $v_e \in D$, dove $e = uv$ é un lato di G . Per costruzione v_e é adiacente solo ai nodi v ed u . Definisco un nuovo insieme $D' = D - \{v_e\} \cup \{v\}$. É facile vedere che $|D| \leq |D'|$ e che D' é ancora un *dominating set*.

Posso ripetere l'algoritmo sopra per ogni nodo-lato nel *dominating set* ed ottengo un nuovo *dominating set* \tilde{D} con $|\tilde{D}| \leq k$ e composto solo da nodi in V . Resta da dimostrare che \tilde{D} é un *vertex cover* per G . Consideriamo un nodo lato $uv \in E_e$. Per come abbiamo costruito \tilde{D} , uv non appartiene al *dominating set*, ma allora, in quanto uv é adiacente solo ai due nodi u e $v \in V$ e per la definizione di *dominating set*, $u \in \tilde{D}$ oppure $v \in \tilde{D}$. Quindi \tilde{D} é un *vertex cover* per G . \square

¹Possiamo supporre senza perdita di generalità che il grafo G contenga almeno un arco.

2 Independent Set

In questa sezione introduciamo ora il problema di *Independent Set* (IS). Tale problema é noto essere NP-completo (vedi [1, p.188]). Mostriamo come rimanga NP-completo anche se ci si restringe a considerare solo grafi planari.

Planar Independent Set (Planar IS)

INPUT: un grafo $G = (V, E)$ planare, un intero positivo k .

OUTPUT: esiste un *independent set* di dimensione k per G , cioè un sottoinsieme $I \subseteq V$ tale che $|I| = k$ e tale che se $u, v \in I$ non c'è alcun lato tra u e v ?

Osservazione 2.1 *Planar IS é in NP.*

Dimostrazione segue immediatamente dal fatto che IS é in NP. \square

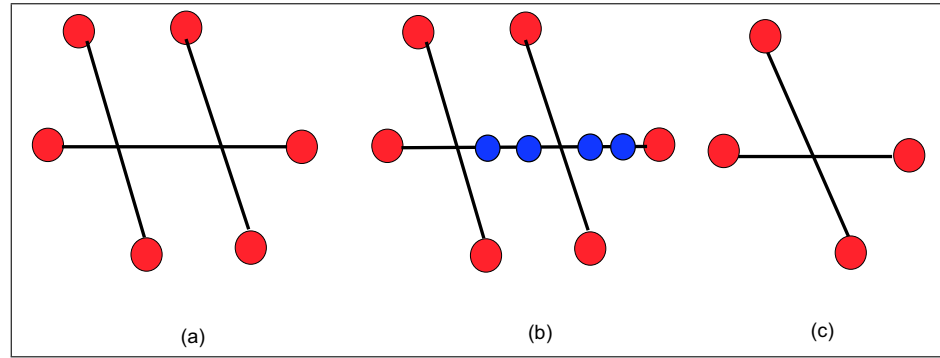


Figura 2: (a) caso generale (b) riduzione (c) crossing semplice.

In generale un lato può formare più di un crossing, vedi Figura 2 (a). Possiamo però ricondurci al caso più semplice di Figura 2 (c), dove ogni lato può formare al più un crossing. Basta applicare la riduzione proposta nella Figura 2 (b). Dimostriamo questo fatto attraverso il seguente lemma.

Lemma 2.2 *IS é NP-completo anche se ci si restringe a considerare grafi in cui un lato forma al più un crossing (IS').*

Dimostrazione IS' é in NP in quanto IS é in NP. Proponiamo ora una riduzione polinomiale da IS a IS'. Si consideri una generica istanza $\langle G, k \rangle$ di IS, dove $G = (V, E)$ e k é un intero positivo. Dobbiamo costruire un grafo $G' = (V', E')$ dove ogni lato forma al più un crossing e un intero positivo k' tale che G ha un *independent set* di dimensione k se e solo se G' ha un *independent set* di dimensione k' . Per costruire G' procediamo come segue. Sia c_{uv} il numero di crossing formati dal lato $uv \in E$. Suddividiamo ogni lato $uv \in E$ con l'aggiunta di $2c_{uv}$ nodi artificiali $a_1, a_2, \dots, a_{2c_{uv}}$, due tra il vertice v e il più vicino crossing, due tra ogni coppia di crossing adiacenti (vedi Figura 2). Completiamo la riduzione

settando $k' = k + c$ dove $c = \sum_{uv \in E} c_{uv}$. É evidente che tale trasformazione può essere condotta in tempo polinomiale.

Rimane da dimostrare che G' ha un *independent set* di dimensione k' se e solo se G ha un *independent set* di dimensione k .

(\Leftarrow) Supponiamo che G abbia un *independent set* I con $|I| = k$. Allora possiamo costruire un *independent set* I' per G' di dimensione k' procedendo come segue. Inizialmente poniamo $I' = I$. Per ogni lato $uv \in E$, entrambi i vertici v e u non possono appartenere all'insieme indipendente I . Quindi senza perdita di generalità assumiamo che $u \notin I$ e quindi $u \notin I'$. Consideriamo il cammino $u, a_1, a_2, \dots, a_{2c_{uv}}, v$ nel grafo G' , dove $a_1, a_2, \dots, a_{2c_{uv}}$ sono i nodi artificiali aggiunti al lato $uv \in E$. Aggiungiamo all'insieme indipendente I' i c_{uv} nodi artificiali di indice dispari $a_1, a_3, \dots, a_{2c_{uv}-1}$. É facile vedere che I' é ancora un insieme indipendente. Ripetendo lo stesso algoritmo per tutti i lati di G otteniamo un insieme indipendente I' di dimensione k' .

(\Rightarrow) supponiamo che G' abbia un *independent set* I' con $|I'| = k'$. Posso ottenere un insieme indipendente per G di dimensione k procedendo nel seguente modo. Inizialmente pongo $I = I'$. Consideriamo $uv \in E$, allora si possono verificare i seguenti casi:

- i. i nodi u e v non appartengono entrambi a I . Allora al più c_{uv} dei nodi artificiali $a_1, a_2, \dots, a_{2c_{uv}}$ che sono stati aggiunti al lato uv possono essere nell'insieme indipendente I . Tolgo da I i nodi artificiali $a_1, a_2, \dots, a_{2c_{uv}}$.
- ii. entrambi i nodi u e v appartengono a I . Allora al più $c_{uv} - 1$ dei nodi artificiali $a_1, a_2, \dots, a_{2c_{uv}}$ possono essere in I . Tolgo da I i nodi artificiali e il nodo v .

Ripetendo lo stesso procedimento per ogni lato $uv \in E$ ottengo un insieme indipendente per G , I , tale che $|I| > k' - \sum_{uv \in E} c_{uv} = k$. Eliminando alcuni nodi da I posso ottenere finalmente un insieme indipendente di cardinalità esattamente k . \square

Per dimostrare l'NP-completezza di Planar IS presenteremo una riduzione polinomiale dal problema generale (con istanze non necessariamente planari), utilizzando la tecnica di local replacement. Useremo il gadget proposto da [3].

Teorema 2.3 *Planar IS é NP-completo.*

Dimostazione Abbiamo già osservato (vedi Osservazione 2.1) che Planar IS é in NP. Proponiamo ora una riduzione polinomiale da IS a Planar IS. Si consideri una generica istanza $\langle G, k \rangle$ di IS, dove $G = (V, E)$ e k é un intero positivo. Dobbiamo costruire un grafo planare $G' = (V', E')$ e un intero positivo k' tale che G ha un *independent set* di dimensione k se e solo se G' ha un *independent set* di dimensione k' .

Come osservato nel Lemma 2.2, possiamo supporre che ogni lato di G formi al più un crossing.

Per costruire G' sostituiamo ogni crossing nel grafo G con il grafo-gadget $H = (R \cup B, E_h)$ di Figura 2 (b). Come mostra la figura, l'insieme B corrisponde

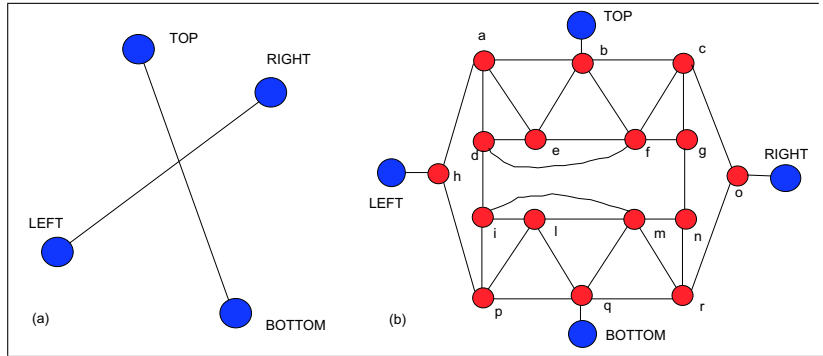


Figura 3: Il grafo-gadget $H = (R \cup B, E_h)$ dove $B = \{top, bottom, left, right\}$ e $R = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n, o, p, q, r\}$.

all'insieme dei nodi degli archi che formano il crossing in G . Il gadget ha le seguenti proprietà:

- p1) é planare;
- p2) se due nodi in B ed opposti (ad esempio left e right) sono nell'*independent set*, posso inserire nell'*independent set* ancora al più 5 nodi tra quelli appartenenti a R ;
- p3) se tutti i nodi in B (cioé left, right, top, bottom) sono nell'*independent set* posso inserire nell'*independent set*, ancora al più 4 nodi tra quelli appartenenti a R ;
- p4) in tutti gli altri casi posso inserire fino ad esattamente 6 nodi appartenenti a R nell'*independent set*;

Completiamo la riduzione settando $k' = k + 6c$ dove c é il numero di crossing in G . É evidente che tale trasformazione può essere condotta in tempo polinomiale. Rimane da dimostrare che G' ha un *independent set* di dimensione k' se e solo se G ha un *independent set* di dimensione k .

(\Leftarrow) Supponiamo che G abbia un *independent set* I con $|I| = k$. Allora possiamo costruire un *independent set* I' per G' di dimensione k' procedendo come segue: inizialmente pongo $I' = I$, poi aggiungo ad I' sei nodi appartenenti ad R per ogni gadget in modo tale che I' continui ad essere un insieme indipendente. In tutto abbiamo c gadget e quindi alla fine otterremo che $|I'| = k + 6c$. Per la Proprietá p4 é sempre possibile aggiungere ad I' sei nodi di R per ogni gadget preservando la proprietà di indipendenza perché per ipotesi I é un *independent set* per G e quindi non possono esservi inseriti due nodi in B opposti. La Figura 2 mostra i casi che possono capitare (non ho riportato quelli simmetrici).

(\Rightarrow) supponiamo che G' abbia un *independent set* I' con $|I'| = k'$. Costruiremo un insieme indipendente I per G di cardinalità k .

Impostiamo inizialmente $I = I'$. Ripetiamo il seguente algoritmo. Per ogni gadget g in G' possono capitare i seguenti casi:

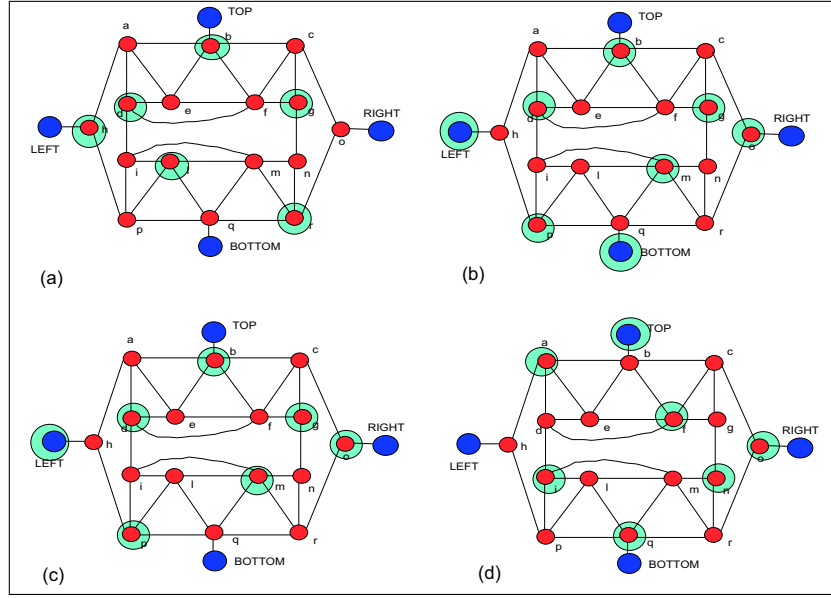


Figura 4: (a) Nessun nodo blu é in I (b) due nodi blu non opposti sono in I (c, d) un nodo blu in I .

- i. se $|I \cap \{top_g, bottom_g\}| \leq 1$ e $|I \cap \{left_g, right_g\}| \leq 1$, allora per la Proprietá p4 $|I \cap R_g| \leq 6$. Possiamo definire un nuovo insieme indipendente $\tilde{I} = I \setminus R_g$ dove $|\tilde{I}| \geq |I| - 6$. Assegno $I = \tilde{I}$.
- ii. se $|I \cap \{left_g, right_g\}| \leq 1$ e $|I \cap \{top_g, bottom_g\}| = 2$, allora per la Proprietá p2 $|I \cap R_g| \leq 5$. Possiamo definire un nuovo insieme indipendente $\tilde{I} = I \setminus (R_g \cup \{top_g\})$ dove $|\tilde{I}| \geq |I| - 6$. Assegno $I = \tilde{I}$.
- iii. se $|I \cap \{top_g, bottom_g\}| \leq 1$ e $|I \cap \{left_g, right_g\}| = 2$, allora per la Proprietá p2 $|I \cap R_g| \leq 5$. Possiamo definire un nuovo insieme indipendente $\tilde{I} = I \setminus (R_g \cup \{left_g\})$ dove $|\tilde{I}| \geq |I| - 6$. Assegno $I = \tilde{I}$.
- iv. se $top_g, bottom_g, left_g, right_g \in I$, allora per la Proprietá p3 $|I \cap R_g| \leq 4$. Possiamo definire un nuovo insieme indipendente $\tilde{I} = I \setminus (R_g \cup \{bottom_g, right_g\})$ dove $|\tilde{I}| \geq |I| - 6$. Assegno $I = \tilde{I}$.

Alla fine otteniamo un insieme indipendente I per G di dimensione $k \geq k' - 6 \cdot c$. Possiamo ottenere un insieme indipendente \tilde{I} per G di dimensione esattamente $\tilde{k} = k' - 6 \cdot c$ togliendo $k - k' + 6 \cdot c$ vertici qualsiasi da I , cioè $\tilde{I} = I \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2} \dots v_{i_{k-k'+6 \cdot c}}\}$ con $v_{i_1}, v_{i_2} \dots v_{i_{k-k'+6 \cdot c}} \in I$. \square

Riferimenti bibliografici

- [1] Christos H. Papadimitriou, *Computational Complexity* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1993)
- [2] Michael R. Garey, David S. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness* (W.H.Freeman and company, 1978)
- [3] Thomas Emden-Weinert, Stefan Hougardy, Bernd Kreuter, Hans Jrgen Prmel, Angelika Steger, *Einfhrung in Graphen und Algorithmen*(<http://www.informatik.hu-berlin.de/Institut/struktur/algorithmen/ga/>)