Esame di Complessità Computazionale

Edoardo Di Lorenzo 102205 (15QN)

A.A. 2002-2003

Il mio compito consiste nel dimostrare che i problemi Feedback Vertex Set e Feedback Arc Set sono NP-completi. Per fare ciò tenterò di ridurre ad essi un altro problema: Vertex Cover, per il quale esiste una dimostrazione di NP-completezza sul nostro libro di testo [1].
Feedback Vertex Set ha delle applicazioni pratiche, ad esempio:

nelle telecomunicazioni, dove per monitorare una rete è utile trovare il minimo numero di vertici di controllo;

nel contesto dei sistemi operativi, dove per il superamento di deadlocks creati da richieste cicliche da parte di processi di risorse già allocate si desidera toccare un insieme minimo di processi. "Occorre comunque notare che la maggior parte dei sistemi operativi attuali non è in grado di prevedere il verificarsi dei deadlock" [2], compreso UNIX[1]. La risposta a questa affermazione è da ricercarsi nell'NP-completezza del problema.

1 Definizione dei problemi

1.1 Vertex Cover

Dato un grafo non diretto $G = (V, E)$, un *Vertex Cover* (VC) di G è un sottoinsieme X di V tale che per ogni arco $uv \in E$ almeno uno tra i nodi u e v è in X.

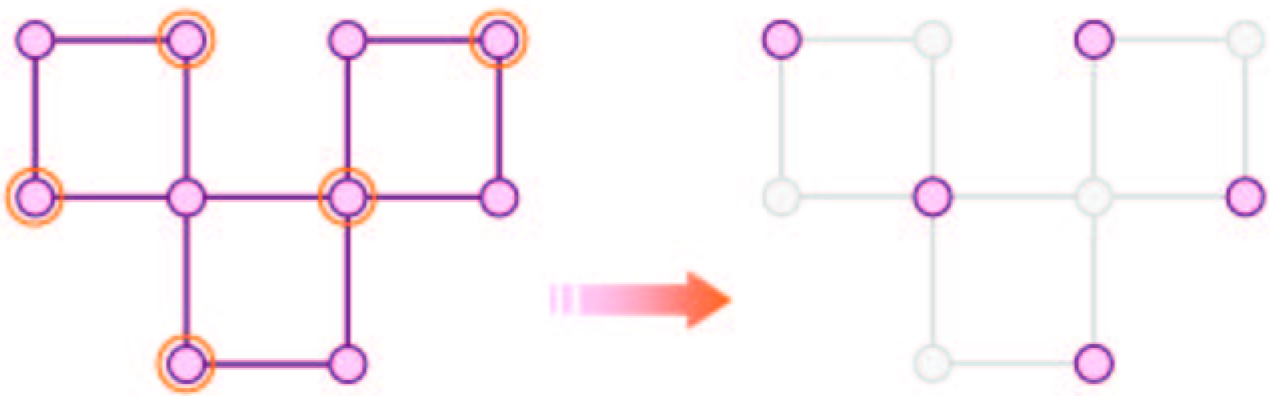

Figura 1: esempio di vertex cover.

VERTEX COVER è il seguente problema di decisione.

INPUT: una coppia $\langle G, k\rangle$ dove $G = (V, E)$ è un grafo non diretto e k è un numero intero.

TASK: decidere se G ammetta un Vertex Cover di cardinalità al più k.

1.2 Feedback Vertex Set

Dato un grafo diretto $D = (V, A)$, un *Feedback Vertex Set* (FVS) di D è un sottoinsieme X di V tale che $D \setminus X$ risulti essere privo di cicli.

[1] Il problema non viene risolto, ma esistono delle tecniche per prevenirlo, però la maggior parte dei sistemi operativi ignorano tale problema confidando nella scarsa possibilità che il sistema vada in deadlock. Perché si presenti un deadlock devono sussistere contemporaneamente quattro condizioni necessarie: mutua esclusione, possesso e attesa, impossibilità di prelazione e attesa circolare.

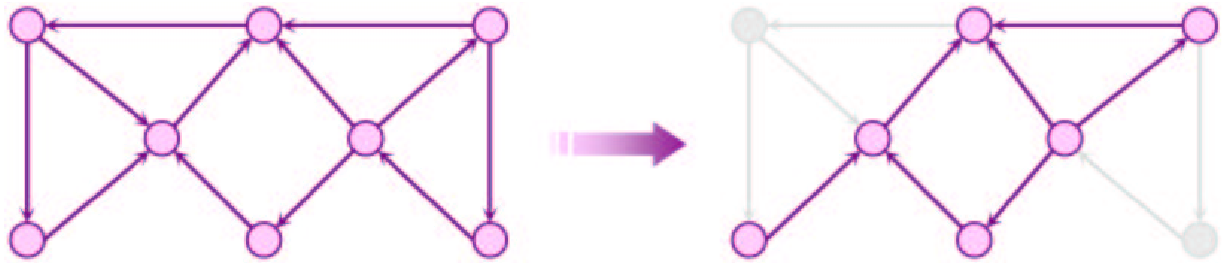

Figura 2: esempio di Feedback Vertex Set.

FEEDBACK VERTEX SET è il seguente problema di decisione.

INPUT: una coppia $\langle D, k\rangle$ dove $D = (V, A)$ è un digrafo e k è un numero intero.

TASK: decidere se D ammetta un FVS di cardinalità al più k.

1.3 Feedback Arc Set

Dato un grafo diretto $D = (V, A)$, un *Feedback Arc Set* (FAS) di D è un sottoinsieme F di A tale che $D \setminus F$ risulti essere privo di cicli.

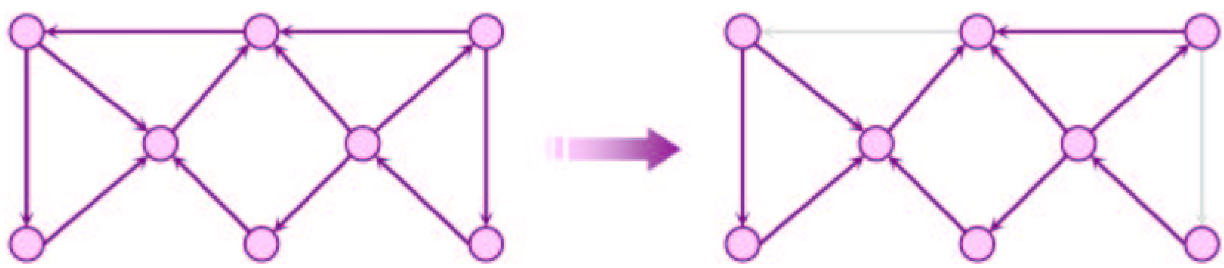

Figura 3: esempio di Feedback Arc Set.

FEEDBACK ARC SET è il seguente problema di decisione.

INPUT: una coppia $\langle D, k\rangle$ dove $D = (V, A)$ è un digrafo e k è un numero intero.

TASK: decidere se D ammetta un FAS di cardinalità al più k.

2 Riduzioni

2.1 Vertex Cover $\propto$ Feedback Vertex Set

Utilizzando la tecnica *local replacement* cercheremo di ridurre Vertex Cover a Feedback Vertex Set. Esibiremo infatti una trasformazione polinomiale che associa ad ogni grafo $G = (V, E)$ un digrafo D, sullo stesso insieme di nodi V, tale che $X \subseteq V$ è un Vertex Cover di G se e solo se X è un Feedback Vertex Set di D.

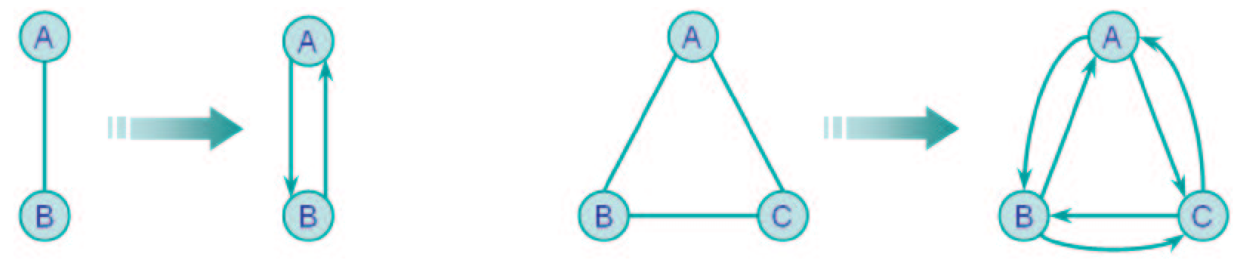

Figura 4: VC $\propto$ FVS.

Per costruire D partendo da G sostituiremo ogni arco uv in G con due archi diretti, uno da u a v e uno da v a u. In buona sostanza, a $G = (V, E)$ assoceremo $D = (V, A)$ con $A = \{(u, v) : uv \in E\}$. Tale trasformazione è illustrata ed semplificata in Figura 4.

La correttezza della riduzione proposta è argomentata dal seguente lemma.

Lemma 2.1 *Sia $D = (V, A)$ il digrafo ottenuto a partire da $G = (V, E)$ applicando la riduzione sopra descritta. Allora $X \subseteq V$ è un Vertex Cover di G se e solo se X è un FVS di D.*

Proof. Se un insieme X copre ogni arco in G, allora esso copre ogni arco diretto in D e quindi ogni ciclo diretto in D. Inoltre, se un insieme Y copre tutti i cicli diretti in D, in particolare esso copre i cicli di dimensione due introdotti al posto di ogni arco di G, coprendo così ogni arco di G. $\square$

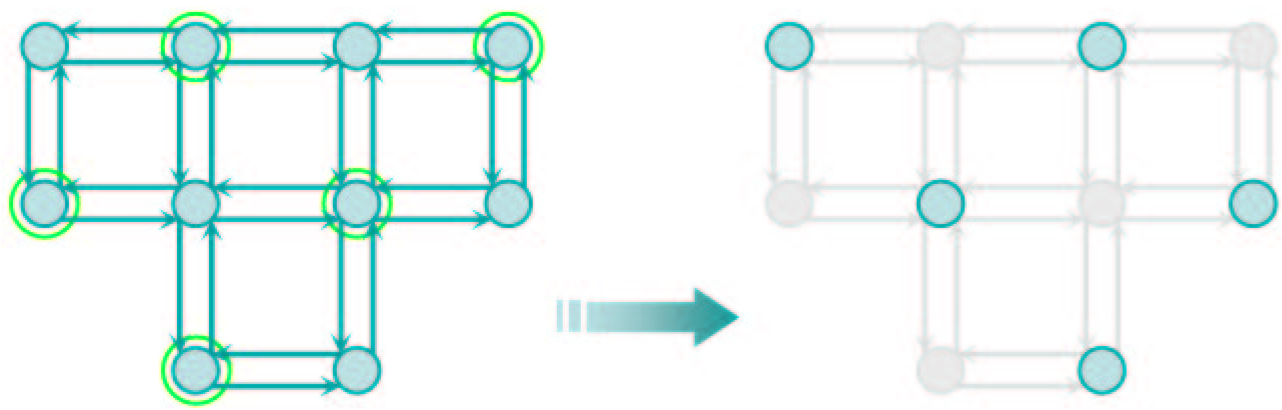

Figura 5: FVS applicato al VC della Figura 1.

2.2 Vertex Cover $\propto$ Feedback Arc Set

Utilizzando la tecnica *local replacement* cercheremo di ridurre Vertex Cover a Feedback Arc Set. Sia $\langle G, k\rangle$ un'istanza di VC, dove $G = (V, E)$ è un grafo non diretto e k un intero. Mostreremo come trasformare $\langle G, k\rangle$ in un'istanza di FAS $\langle D, k\rangle$, dove $D = (V', A)$ è un grafo diretto. Per far ciò, agiremo nel seguente modo: per ogni vertice $v \in V$ ci sono due vertici v_{in} e v_{out} in D; per ogni arco uv in G ci sono gli archi diretti (u_{out}, v_{in}) e (v_{out}, u_{in}) in D. Inoltre ci sono archi (v_{in}, v_{out}) in D per ogni vertice $v \in V$. È necessario provare che $\langle G, k\rangle$ è un'istanza valida di Vertex Cover se e solo se $\langle D, k\rangle$ è un'istanza valida di Feedback Arc Set.

Lemma 2.2 *Sia $S \subseteq V$ un Vertex Cover di G. Sia $F := \{(v_{in}, v_{out}) : v \in S\}$. Allora $|F| = |S|$ e F è un FAS di D.*

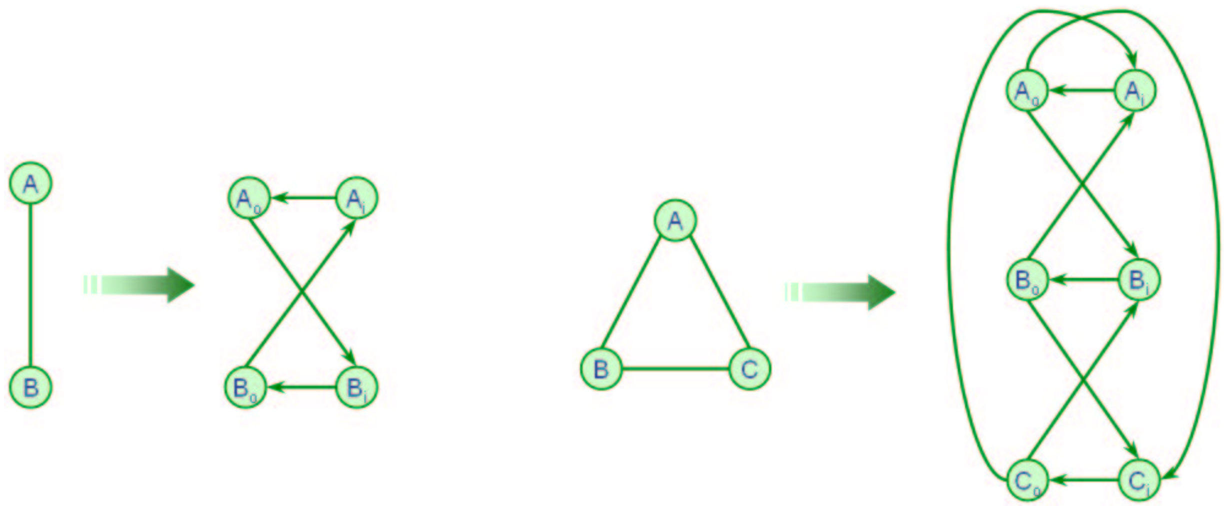

Figura 6: VC $\propto$ FAS.

Proof. Chiaramente $|F| = |S|$. Per mostrare che F è un FAS per D, si consideri il generico ciclo C in D. Sarà nostra cura mostrare che $C \cap F \neq \emptyset$. Chiaramente C conterrà almeno un arco di tipo (u_{out}, v_{in}), poiché gli archi di tipo (v_{in}, v_{out}) formano un matching, ossia non hanno estremi in comune. Sia a un arco di C del tipo (u_{out}, v_{in}). Si noti che (u_{in}, u_{out}) e (v_{in}, v_{out}) sono in C, dato che (u_{in}, u_{out}) è l'unico arco che entra in u_{out} mentre (v_{in}, v_{out}) è l'unico che esce da v_{in}. Mostreremo che almeno uno di questi due archi è in F. Siccome (u_{out}, v_{in}) è un arco di D, ne consegue che uv è un arco di G, e poiché S è un VC di G, allora $S \cap \{u, v\} \neq \emptyset$. Pertanto $F \cap \{(u_{in}, u_{out}), (v_{in}, v_{out})\} \neq \emptyset$. $\square$

Questo dimostra che se $\langle G, k\rangle$ è un'istanza valida di Vertex Cover allora $\langle D, k\rangle$ è un'istanza valida di Feedback Arc Set.

Per completare la dimostrazione di NP-completezza di FAS dobbiamo dimostrare il contrario, cioè provare che $\langle D, K\rangle$ è un istanza valida di FAS *solo* se $\langle G, k\rangle$ è un'istanza valida di VC. Per rendere la procedura uniforme è necessario considerare FAS di tipo "canonico".

Definizione 2.1 *Un Feedback Arc Set di D si dice in forma canonica se ad esso appartengono solo archi della forma (v_{in}, v_{out}).*

Lemma 2.3 *Dato un generico FAS F di D è possibile trasformarlo in un FAS F' in forma canonica con $|F'| \leq |F|$.*

Proof. Dato F, si consideri $F' := \{(v_{in}, v_{out}) : (v_{in}, v_{out}) \in F\} \cup \{(v_{in}, v_{out}) : (u_{out}, v_{in}) \in F\}$. È evidente che:

1. $|F'| \leq |F|$;
2. F' è in forma canonica.

Per mostrare che F' è un FAS di D, si consideri il generico ciclo C di D e si consideri un arco $a \in C \cap F$. (Tale arco esiste perché F è un FAS). Se a è un arco del tipo (v_{in}, v_{out}) allora $a \in F'$ per definizione di F'. Se a è un arco del tipo (u_{out}, v_{in}) basta sostituirlo con il suo successore nel ciclo $(v_{in}, v_{out}) \in C \cap F'$. Infatti (v_{in}, v_{out}) appartiene a F' per definizione di F' ed appartiene a C poiché un vertice v_{in} può essere lasciato solo attraverso l'arco (v_{in}, v_{out}). $\square$

Lemma 2.4 *Sia $F \subseteq A$ un FAS in forma canonica di D, allora $S := \{v \in V : (v_{in}, v_{out}) \in F\}$ è un Vertex Cover di G e $|S| = |F|$.*

Chiaramente $|S| = |F|$. Per mostrare che S è un VC di G, si consideri il generico arco uv di G: sarà nostra cura dimostrare che $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$. Si consideri il seguente ciclo diretto in D: $(u_{in}, u_{out}) \rightarrow (u_{out}, v_{in}) \rightarrow (v_{in}, v_{out}) \rightarrow (v_{out}, u_{in})$. Poichè F è in forma canonica, $F \cap \{(u_{out}, v_{in}), (v_{out}, u_{in})\} = \emptyset$. Poichè F è un FAS, deve purtuttavia intersecare il ciclo considerato; pertanto: $F \cap \{(u_{in}, u_{out}), (v_{in}, v_{out})\} \neq \emptyset$. Ciò implica che $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$. □

La riduzione è realizzabile in tempo polinomiale, per cui Feedback Arc Set è NP-completo.

Riferimenti bibliografici

[1] Michael R. Garey, David S. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, W.H.Freeman and company, 1978.

[2] Abraham Silberschatz, Peter Bear Galvin, *Sistemi Operativi - Quinta Edizione*, ADDISON - WESLEY, 1998.

[3] Camil Demetrescu, Irene Finocchi, *Combinatorial Algorithms for Feedback Problems in Directed Graphs*, Inform. Process. Lett., 86, (2003), no. 3, 129–136.

[4] Lorenzo Brunetta, Francesco Maffioli, Marco Trubian, *Solving The Feedback Vertex Set Problem On Undirected Graphs*, Discrete Appl. Math., 101, (2000), no. 1-3, 37–51.