

Algoritmi Avanzati

facSimile di scritto in vista dell'appello straordinario del 2 febbraio 2004

1. Dati due grafi indiretti completi K_m e K_n , rispettivamente, di m e n vertici, sia il grafo $G = (V(G), E(G))$ il prodotto cartesiano $G = K_m \times K_n$, con $m, n \geq 3$ così definito: $V(G) = \{(u, v) : u \in K_m, v \in K_n\}$ e $E(G) = \{[(u, v)(w, x)] : (u = w) \text{ e } (v, x) \text{ é un arco di } K_m, \text{ oppure } (v = x) \text{ e } (u, w) \text{ é un arco di } K_n\}$. Verificare se G e il suo grafo complementare sono Hamiltoniani.
2. Un *vertex-cover* di un grafo indiretto $G = (V, E)$ é un sottoinsieme $V' \subset V$ tale che $\forall (u, v) \in E$ o $u \in V'$ o $v \in V'$ (o entrambi). Il problema del *vertex-cover* consiste nel trovare un *vertex-cover* di cardinalità minima. Si consideri il seguente algoritmo per risolvere il problema *vertex-cover*:

```
C := A := ∅; E' := E(G);
while E' ≠ ∅ do
    let (u, v) be an arbitrary edge of E';
    C := C ∪ {u} ∪ {v};
    A := A ∪ {(u, v)};
    remove from E' every edge incident on either u or v;
return C.
```

Si provi che il rapporto di approssimazione fra la soluzione C trovata da questo algoritmo e la soluzione ottima C^* é limitato superiormente da 2. (Sugg. Si provi che $|C^*| \geq |A|$)

Si consideri ora l'algoritmo che ripetutamente inserisce nel *vertex-cover* il nodo di grado massimo, anzichè gli estremi di un arco qualsiasi.

Dimostrare la seguente congettura, o fornire un controesempio: Tale algoritmo, se applicato ad un albero, trova la soluzione ottima?

3. Dato un grafo G , quale relazione lega le dimensioni delle clique in G e il numero cromatico di G ? Si disegni un grafo G tale che $\omega(G) = 2$ e $\chi(G) > 2$. Può G contenere triangoli?