Algoritmi Avanzati

Soluzioni dello scritto del 2 febbraio 2004 (appello straordinario)

1. *Tengo nascosto nel taschino della giacca un grafo misterioso di 7 nodi. Vi dico solo che listando le valenze (= numero dei nodi adiacenti) dei 7 nodi ottengo la seguente sequenza.*

$$1, 1, 1, 3, 3, 5, 5.$$

Secondo voi, è possibile che un tale grafo possa esistere? Se pensate che un tale grafo non possa esistere, dimostratemi nella massima semplicità che vi ho detto una bugia. In caso contrario, siete anche in condizioni di determinare come sia fatto il grafo misterioso? Se vi dicessi che il grafo è connesso, potreste quantomeno concludere che esso è un albero?

Soluzione:
Il grafo dato non può esistere perché il numero di vertici con grado dispari di un grafo deve essere pari. Questo deriva dal fatto che, essendo ogni arco connesso a due vertici

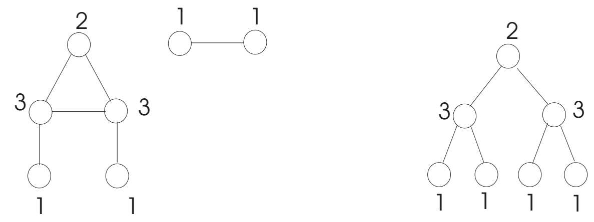
$$\sum_v d(v) = 2|E|$$

Ripetiamo ora lo stesso giochino (tutte le domande), ma riferendoci questa volta alla seguente sequenza.

$$1, 1, 1, 1, 2, 3, 3.$$

Secondo voi, è possibile che un tale grafo possa esistere? In caso contrario, siete anche in condizioni di determinare come sia fatto il grafo misterioso? Se vi dicessi che il grafo è connesso, potreste quantomeno concludere che esso è un albero?

Soluzione:
Il grafo dato esiste, ma non siamo in grado di determinare univocamente come esso sia fatto. I seguenti grafi, ad esempio, rispettano entrambi i gradi indicati:



Soluzione:
Un grafo connesso $G = (V, E)$ in cui $|E| = |V| - 1$ è un albero. Nel nostro caso, $|E| = \frac{\sum_v d(v)}{2} = 6$ e $|V| = 7$, quindi il grafo dato è un albero.

2. *Si indichi con $K_{m,n}$ il grafo bipartito completo composto da m nodi bianchi, n nodi neri, e tutti gli mn archi tra nodi di diverso colore. Dimostrare che $m = n > 1$ è condizione necessaria affinchè $K_{m,n}$ sia Hamiltoniano. Dimostrare che tale condizione è anche sufficiente.*

Soluzione: Dim sufficienza ($m = n \Rightarrow K_{m,n}$ Hamiltoniano)
E' noto che condizione sufficiente perché $G = (V, E)$ sia Hamiltoniano è $d(v) \geq \frac{|V|}{2} \quad \forall v \in V$. Indichiamo con V_m e V_n le due partizioni. Se $m = n$, $|V| = n+m = 2n$ e inoltre, poiché il grafo è bipartito completo,

$$d(v_m) = n \qquad \forall v_m \in V_m$$

$$d(v_n) = m = n \qquad \forall v_n \in V_n$$

Quindi $d(v) = n \quad \forall v \in V$ e la condizione $d(v) \geq \frac{|V|}{2} = n$ è soddisfatta.

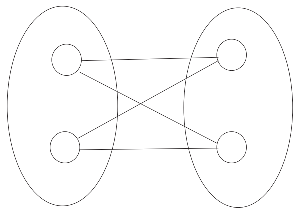


Figura 1: Grafo di esempio $K_{2,2}$

oppure
Siano $V_n = \{v_1, ..., v_n\}$ e $V_n = \{u_1, ..., u_n\}$ le due partizioni. Il ciclo

$$v_1 u_1 v_2 u_2 ... v_{n-1} u_{n-1} v_n u_n v_1$$

che segue cioè gli archi

$$(v_i, u_i) \qquad i = 1, ..., n$$

$$(u_j, u_{j+1}) \qquad j = 1, ..., n$$

$$(u_n, v_1)$$

è un ciclo Hamiltoniano in $K_{n,n}$.

Dim necessarietà ($K_{m,n}$ Hamiltoniano $\Rightarrow m = n$)

Procediamo per assurdo, supponendo $m \neq n$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre $m < n$. E' noto che condizione necessaria perché un grafo $G = (V, E)$ sia Hamiltoniano è che preso un sottoinsieme qualsiasi $V' \subset V$ il numero di componenti connesse di $G - V'$, $c(G - V') \leq |V'|$. Se prendiamo $V' = \{$ nodi bianchi $\}$, $|V'| = m$. Indichiamo per brevità $K_{m,n}$ con G_1. Poiché il grafo è bipartito, $c(G_1 - V')$ è uguale a n (numero dei nodi neri) in quanto questi ultimi non possono essere connessi tra di loro.

Quindi $c(G_1 - V') = n > m = |V'|$ che è in contraddizione con l'ipotesi che G_1 sia Hamiltoniano e quindi che $c(G_1 - V') \leq |V'|$.

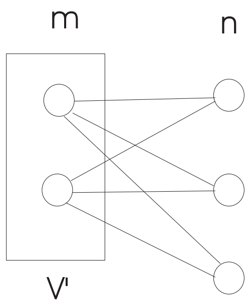


Figura 2: Grafo di esempio $K_{2,3}$

oppure

Essendo $K_{m,n}$ bipartito completo ogni ciclo in $K_{m,n}$ deve avere lunghezza pari. Poiché il ciclo minimo di lunghezza pari è lungo 4 non può essere $n = 1$ oppure $m = 1$. Inoltre, poiché $K_{m,n}$ è bipartito, in ogni cammino o ciclo si alternano vertici delle due partizioni. Indichiamo con V_m e V_n le due partizioni e poniamo per assurdo $m \neq n$. Poiché un ciclo Hamiltoniano deve attraversare tutti i vertici di un grafo una e una sola volta la lunghezza del ciclo Hamiltoniano C per $K_{m,n}$ deve essere $2 \cdot max(n, m)$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre $m < n$. A questo punto almeno un vertice di $|V_m|$ deve ripetersi in C affinché esso abbia lunghezza $2n$, ma ciò contraddice il fatto che C è Hamiltoniano. Dunque $n = m$.

3. *Un* vertex-cover *di un grafo indiretto $G = (V, E)$ é un sottoinsieme $V' \subset V$ tale che $\forall (u, v) \in E$ o $u \in V'$ o $v \in V'$ (o entrambi). Il problema del* vertex-cover *consiste nel trovare un* vertex-cover *di*

cardinalitá minima. Si consideri il seguente algoritmo:

1 $C := A := \emptyset$;
2 $E' := E(G)$;
3 **while** $E' \neq \emptyset$ **do**
4 let (u, v) be an arbitrary edge of E';
5 $C := C \cup \{u\} \cup \{v\}$;
6 $A := A \cup \{(u, v)\}$;
7 remove from E' every edge incident on either u or v;
8 **return** C.

Si dimostri che l'insieme di nodi C ritornato dall'algoritmo è sempre un vertex-cover.

Soluzione: Affinché C sia un vertex cover ogni arco di G deve avere un estremo in C. Dimostriamo per induzione su $|E|$ che questo è vero.

Se $|E| = 1$ allora al primo passo dell'algoritmo $E' \neq \emptyset$ e viene dunque scelto l'unico arco (u, v) di G. I suoi estremi vengono inseriti in C nell'istruzione seguente quindi C è un vertex-cover.

Supponiamo ora che la proposizione valga per $|E| \leq n$ e ne proviamo la validità per $|E| = n+1$. Sia (u, v) l'ultimo arco di E considerato dall'algoritmo: esso può essere considerato dall'istruzione alla linea 4 oppure dall'istruzione alla linea 7. Per ipotesi induttiva l'algoritmo ritorna un vertex cover C corretto per il grafo $G - (u, v)$. Se (u, v) è considerato al passo 4 i suoi estremi sono inseriti nel cover al passo 5 e dunque $C := C \cup \{u\} \cup \{v\}$ è un vertex cover per il grafo G. Se invece (u, v) è considerato al passo 7 ciò implica che i suoi estremi (uno di essi o entrambi) sono già contenuti in C e quindi C è un vertex cover anche per il grafo G.

Si dimostri che il semplice algoritmo proposto è 2-approssimante, ossia il rapporto di approssimazione fra la soluzione C trovata da questo algoritmo e la soluzione ottima C^* é limitato superiormente da 2. (Sugg. Si provi che $|C^*| \geq |A|$).

Soluzione: dimostriamo che $|C^*| \geq |A|$ (C^* è la soluzione ottima). Dalle linee 6 e 7 abbiamo che A è un insieme di

archi non adiacenti di G, tali che $\forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in A. u_i \neq v_j \quad i, j = 1, 2$. Ogni vertex cover deve contenere almeno un vertice per ogni elemento di A, quindi $|C^*| \geq |A|$.
Dalle linee 5 e 6 si conclude che $|C| = 2|A|$, quindi componendo i due risultati si ottiene che $\frac{|C|}{|C^*|} \leq 2$.

Si consideri ora l'algoritmo che ripetutamente inserisce nel vertex cover il nodo di grado massimo, anzichè gli estremi di un arco qualsiasi.

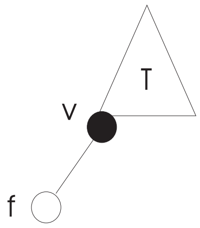
Dimostrare la seguente congettura, o fornire un controesempio: Tale algoritmo, se applicato ad un albero, trova sempre la soluzione ottima.

Soluzione: la congettura è falsa, basta considerare il seguente controesempio:

Nell'albero di sinistra, è rappresentato il vertex cover restituito dalla procedura, nell'albero di destra riportiamo il vertex cover ottimale. Il nodo di grado massimo è la radice di T, che viene scelta per prima.

Il problema del vertex-cover è NP-completo per grafi generici. Sapresti fornire un algoritmo polinomiale nel caso di alberi?

Soluzione: un algoritmo polinomiale è il seguente:
partendo dalle foglie, si considera l'arco che connette la foglia f al suo padre v.



Dato un qualsiasi albero e una qualsiasi foglia f, esiste un vertex cover ottimale C che non contiene f. Infatti se C

contenesse sia v che f esso non sarebbe ottimale, in quanto $C - f$ sarebbe ancora un vertex cover. Se C contenesse f ma non v, visto che ogni arco incidente a f è incidente anche a v, è possibile costruire il vertex cover $(C - f) \cup v$, che è ancora ottimale. Quindi l'algoritmo inserisce v nel vertex cover C e pota l'albero, togliendo f, (f, v), v e tutti gli archi incidenti a v. Poi prosegue ricorsivamente.

Alla fine della procedura, i nodi in C forniscono un vertx cover per l'albero.