Algoritmi Avanzati

scritto del 2 febbraio 2004 (appello straordinario)

1. Tengo nascosto nel taschino della giacca un grafo misterioso di 7 nodi. Vi dico solo che listando le valenze (= numero dei nodi adiacenti) dei 7 nodi ottengo la seguente sequenza.

$$1, 1, 1, 3, 3, 5, 5.$$

   Secondo voi, è possibile che un tale grafo possa esistere? Se pensate che un tale grafo non possa esistere, dimostratemi nella massima semplicità che vi ho detto una bugia. In caso contrario, siete anche in condizioni di determinare come sia fatto il grafo misterioso? Se vi dicessi che il grafo è connesso, potreste quantomeno concludere che esso è un albero?

   Ripetiamo ora lo stesso giochino (tutte le domande), ma riferendoci questa volta alla seguente sequenza.

$$1, 1, 1, 1, 2, 3, 3.$$

2. Si indichi con $K_{m,n}$ il grafo bipartito completo composto da m nodi bianchi, n nodi neri, e tutti gli mn archi tra nodi di diverso colore. Dimostrare che $m = n > 1$ è condizione necessaria affinchè $K_{m,n}$ sia Hamiltoniano. Dimostrare che tale condizione è anche sufficiente.

3. Un *vertex-cover* di un grafo indiretto $G = (V, E)$ é un sottoinsieme $V' \subset V$ tale che $\forall (u, v) \in E$ o $u \in V'$ o $v \in V'$ (o entrambi). Il problema del *vertex-cover* consiste nel trovare un *vertex-cover* di cardinalitá minima. Si consideri il seguente algoritmo:

   $C := A := \emptyset$; $E' := E(G)$;
   while $E' \neq \emptyset$ **do**
   let (u, v) be an arbitrary edge of E';
   $C := C \cup \{u\} \cup \{v\}$;
   $A := A \cup \{(u, v)\}$;
   remove from E' every edge incident on either u or v;
   return C.

   Si dimostri che l'insieme di nodi C ritornato dall'algoritmo è sempre un vertex-cover. Si dimostri che il semplice algoritmo proposto è 2-approssimante, ossia il rapporto di approssimazione fra la soluzione C trovata da questo algoritmo e la soluzione ottima C^* é limitato superiormente da 2. (Sugg. Si provi che $|C^*| \geq |A|$).

   Si consideri ora l'algoritmo che ripetutamente inserisce nel vertex-cover il nodo di grado massimo, anzichè gli estremi di un arco qualsiasi.

   Dimostrare la seguente congettura, o fornire un controesempio: Tale algoritmo, se applicato ad un albero, trova sempre la soluzione ottima.

   Il problema del vertex-cover è NP-completo per grafi generici. Sapresti fornire un algoritmo polinomiale nel caso di alberi?