

Secondo Scritto

ASD1 2002-2003

Esercizio 1

Siano $f(n)$ e $g(n)$ due funzioni non negative e monotone non decrescenti. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere, fornendo un controesempio qualora non lo fossero:

1. $(\min(f(n), g(n)) + \max(f(n), g(n))) \in \Theta(2f(n) + 3g(n))$;
2. $\Omega(|f(n) - g(n)|) \cap O(f(n) + g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$;
3. $f(n) \cdot f(n+2) \in O(f(n+1) \cdot f(n+1))$;
4. $4^{f(n)} + 4^{g(n)} \in O(2^{f(n)+g(n)})$

Esercizio 2

Il *semifattoriale* di un intero positivo n è il prodotto di tutti gli interi positivi non maggiori di n , aventi la stessa parità di n .

Ad esempio, $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1$; $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2$.

Trovare una semplice $f(n)$ per cui si abbia $\log(n!!) \in \Theta(f(n))$. Dimostrare il risultato trovato, senza dare per buoni i fatti visti a lezione riguardo a $\log(n!)$.

Esercizio 3

Mettere le seguenti funzioni in ordine di crescita non decrescente, segnalando le funzioni che avessero eventualmente lo stesso ordine di crescita:

$$f_1(n) = \binom{6n}{2n}, \quad f_2(n) = \binom{6n}{3n}, \quad f_3(n) = \binom{6n}{4n}, \quad f_4(n) = 8^{2n}, \quad f_5(n) = 2^{8n}.$$

È concesso avvalersi, se necessario, della formula di Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Esercizio 4

Sia dato un grafo non orientato con n nodi e m archi. Vogliamo produrre un elenco delle componenti connesse del grafo, disposte in ordine non crescente di dimensione. Supponiamo, ad esempio, che ogni componente connessa sia rappresentata dal nodo di minimo indice presente in essa.

Dare una descrizione di un algoritmo, avente complessità $O(m+n)$, per questo problema, sottolineando tutti gli aspetti che è necessario considerare per ottenere un tale risultato.

Esercizio 5

Descrivere a parole o con pseudocodice commentato l'operazione di estrazione del minimo sia nel caso di heap binomiali che nel caso di heap di Fibonacci.

Per ciascuno dei due casi, fornire un esempio concreto (mostrando tutte le fasi dell'operazione) di estrazione del minimo da uno heap di 13 elementi, che causi modifiche a tutti gli alberi presenti nella struttura dati.