Fac Simile B

Seconda Provetta
ASD1 2002-2003

Esercizio 1 *Sapresti dare uno pseudocodice od una descrizione comunque efficace e formale per la* t-Selection *in tempo lineare? (La* t-Selection *era l'algoritmo che avevamo proposto per risolvere il* Median Finding Problem *in tempo lineare). Sapresti esprimere i punti salienti per l'analisi del running time di tale algoritmo?*

Esercizio 2 *Per* n *elementi distinti* $x_1, \ldots, x_n$ *con pesi positivi* $w_1, \ldots, w_n$ *tali che* $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$*, il mediano pesato è l'elemento* x_k *che soddisfa le seguenti diseguaglianze:*

$$\sum_{x_i < x_k} w_i \leq \frac{1}{2}$$

e

$$\sum_{x_i > x_k} w_i \leq \frac{1}{2}.$$

Fornire un algoritmo che trovi il mediano pesato in tempo $\Theta(n)$.

Aiuto: Se non sai da che parte partire, prova a porti prima degli obbiettivi più modesti, che ti consentano di familiarizzare con il problema, ad esempio:

- sapresti dimostrare l'esistenza del mediano pesato?
- sapresti fornire un algoritmo $\Theta(n \log n)$ per la ricerca del mediano pesato?

Esercizio 3 *Agli archi di un grafo* $G = (V, E)$ *sono associati dei pesi (valori reali o interi, come preferisci). Abbiamo cioè una funzione* $w : E \mapsto R_+$*. Vorremo trovare un albero di copertura di peso minimo. Poggiando su uno heap di servizio (preso come black-box), si dia uno pseudocodice per l'algoritmo di Prim per il computo di una soluzione ottima. Si assuma che la soluzione* T *venga costruita a partire da un certo nodo* s*, aggiungendo gli archi uno alla volta. Nello pseudocodice, gli archi siano colorati verde, giallo e rosso, secondo il seguente schema:*

rosso *ad ogni istante, è rosso ogni arco che sia già stato infilato nella soluzione corrente* T*;*

giallo *si consideri un arco* uv *con un estremo* u *già raggiunto da* T *e l'altro estremo* v *non ancora raggiunto. L'arco* uv *è giallo se* u *è il primo nodo raggiunto da* T *tra quei nodi* z *che minimizzano* $w(zv)$ *con* $zv \in E$ *e* z *già raggiunto da* T*;*

verde *altrimenti.*

Nello pseudocodice, i nodi siano colorati bianco, grigio e nero, secondo il seguente schema:

bianco *se non si è ancora individuato un cammino da* s *al nodo in questione;*

grigio *se si è già individuato qualche cammino da* s *al nodo in questione* v*, ma* v *non è stato ancora estratto dallo heap di servizio;*

nero *il nodo in questione è già stato estratto dallo heap di servizio.*

Dimostrare poi le seguenti invarianti:

1. *ad ogni iterazione, ad uno specifico passo della tua procedura da te indicato, puoi affermare che i nodi grigi sono tutti e soli i nodi nello heap di servizio;*

2. *quando v è nero, allora v ed s sono già connessi in seno alla soluzione parziale T (fatta dagli archi rossi).*

3. *esiste una soluzione ottima per il problema ricevuto in input che contenga T, ossia tutti gli archi rossi.*

Esercizio 4 *Con riferimento al precedente esercizio, sapresti condurre l'analisi del running time nel caso peggiore evidenziando inoltre le differenze qualora lo heap sia sato realizzato come Heap Binomiale o come Heap di Fibonacci?*

Esercizio 5 *Sapresti esprimere in una mezza paginetta (e max una pagina) i punti salienti dell'analisi del* QuickSort*?*