Notazione Asintotica
$O(n^2)$, $\Theta(n \log n)$, $\Omega(2^n)$, $o(n)$, $w(n \log n)$

Definition 1 *Diremo che una funzione $f(n)$ appartiene a $O(g(n))$ (ma chissà poi perchè si è soliti scrivere $f(n) = O(g(n))$ invece di $f(n) \in O(g(n))$) quando esistono delle costanti positive n_0 e c tali che*

$$0 \leq f(n) \leq cg(n) \qquad \text{per ogni } n \geq n_0 \qquad (1)$$

Definition 2 *Diremo che una funzione $f(n)$ appartiene a $\Theta(g(n))$ (ma poi si è soliti scrivere $f(n) = O(g(n))$ invece di $f(n) \in \Theta(g(n))$) quando esistono delle costanti positive n_0, c_1 e c_2 tali che*

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \qquad \text{per ogni } n \geq n_0 \qquad (2)$$

Definition 3 *Diremo che una funzione $f(n)$ appartiene a $\Omega(g(n))$ (ma poi si è soliti scrivere $f(n) = \Omega(g(n))$ invece di $f(n) \in \Omega(g(n))$) quando esistono delle costanti positive n_0 e c tali che*

$$0 \leq cg(n) \leq f(n) \qquad \text{per ogni } n \geq n_0 \qquad (3)$$

Exercise 1 *Dimostare che $2n^2 - 4n - 4 = \Theta(n^2)$. Dimostare che $2n^2 - 4n - 4 = O(n^2)$.*

Exercise 2 *È vero o falso che $f(n) = \Theta(g(n))$ implica che $f(n) = O(g(n))$? Argomentarlo. È vera anche l'implicazione inversa? Fornire un controesempio.*

Exercise 3 *È vero o falso che $f(n) = \Theta(g(n))$ implica che $f(n) = \Omega(g(n))$? Argomentarlo. È vera anche l'implicazione inversa? Fornire un controesempio.*

Exercise 4 *Dimostrare che $f(n) = \Theta(g(n))$ se e solo se abbiamo sia che $f(n) = \Omega(g(n))$ ma anche che $f(n) = O(g(n))$.*

Exercise 5 *Dimostrare che $f(n) = O(g(n))$ se e solo $g(n) = \Omega(f(n))$. Possiamo ora concludere, tramite l'esercizio precedente, che $f(n) = \Theta(g(n))$ se e solo se $g(n) = \Theta(f(n))$?*

Definition 4 *Scriveremo $f(n) = o(g(n))$ quando per una qualunque costante positiva c, esiste una costante positiva n_0 tale che*

$$0 \leq f(n) \leq cg(n) \qquad \text{per ogni } n \geq n_0 \qquad (\mathbf{1})$$

Definition 5 *Scriveremo $f(n) = \omega(g(n))$ quando per una qualunque costante positiva c, esiste una costante positiva n_0 tale che*

$$0 \leq cg(n) \leq f(n) \qquad \text{per ogni } n \geq n_0 \qquad (\mathbf{3})$$

Exercise 6 *È vero o falso che $f(n) = o(g(n))$ implica $f(n) = O(g(n))$? È vera anche l'implicazione inversa? Fornire un controesempio.*

Exercise 7 *È vero o falso che $f(n) = \omega(g(n))$ implica $f(n) = \Omega(g(n))$? È vera anche l'implicazione inversa? Fornire un controesempio.*

Exercise 8 *Dimostrare che $f(n) = o(g(n))$ se e solo $g(n) = \omega(f(n))$.*

Exercise 9 *Si supponga di definire $\theta(g(n))$ come l'insieme di quelle funzioni $f(n)$ tali che sia $f(n) = o(g(n))$ che $f(n) = \omega(g(n))$ valgano. Come mai siamo sicuramente dei pionieri nel proporre questa nuova classe di funzioni?*

Exercise 10 *Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti affermazioni.*

- $f(n) = O(g(n))$ *implica* $g(n) = O(f(n))$;
- $f(n) + g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$;
- $f(n) = O(g(n))$ *e* $g(n) = O(h(n))$ *implicano* $f(n) = O(h(n))$;
- $f(n) = O(g(n))$ *implica* $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$;
- $f(n) = O((f(n))^2)$;
- $f(n) = \Theta(f(\frac{n}{2}))$;
- $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$.

Exercise 11 *Ordinare le seguenti funzioni per ordine di crescita asintotico non decrescente. Ve ne sono alcune che presentano lo stesso ordine di crescita?* $f(n) = \log\log n$, $f(n) = n^2$, $f(n) = 2^{\log n}$, $f(n) = n!$, $f(n) = (\log n)!$, $f(n) = n^{\log n}$, $f(n) = 2^n$, $f(n) = 4^n$, $f(n) = 2^{n+1}$, $f(n) = 4^{\log n}$, $f(n) = 2^{\log\log n}$, $f(n) = n\log n$, $f(n) = n$, $f(n) = n^3$, $f(n) = e^n$, $f(n) = (\log n)^{\log n}$, $f(n) = n^{100}$, $f(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$,

Exercise 12 *Siano* $f(n)$ *e* $g(n)$ *due funzioni asintoticamente non negative. Dimostrare che* $f(n) = o(g(n))$ *se e solo se* $\lim_{n\mapsto\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Exercise 13 *Siano* $f(n)$ *e* $g(n)$ *due funzioni asintoticamente non negative. Si assuma che* $\lim_{n\mapsto\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 5$. *Dimostrare che* $f(n) = O(g(n))$. *Possiamo concludere che* $f(n) = \Theta(g(n))$*?*

Exercise 14 *Stirling riuscí finalmente a coronare i propri sforzi per l'approssimazione asintotica di* $n!$ *producendo la seguente formula.*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Si utilizzi la formula di Stirling per dimostrare che $\log n! = \Theta(n\log n)$. *Ottenere lo stesso risultato senza avvalersi della formula di Stirling. Possiamo concludere qualcosa sul minor numero di confronti necessario per l'ordinamento di* n *numeri?*