Raccolta temi d'esame del corso di Complessità

Roberto Posenato

12 febbraio 2014

Parte I
Anno accademico 2001/2002

1 Appello del 24/06/2002

Esercizio 1.1. *(Esercizio annunciato)* Dimostrare il teorema della gerarchia in spazio: *Se $f(n)$ è una funzione di complessità propria, allora* $\mathsf{SPACE}(f(n)) \subset \mathsf{SPACE}(f(n)\log f(n))$. Il fattore $\log f(n)$ è necessario?

Soluzione. *Se si dimostra il teorema ripercorrendo in modo quasi sintattico la dimostrazione offerta dal Papadimitrou, si ottiene che con il lemma 1 si dimostra che $H_f \in \mathsf{SPACE}(f(n)^3)$ anziché $\mathsf{SPACE}(f(n)\log n)$. Per cui tutta la costruzione che si ottiene dimostra in modo diretto e semplice la tesi per funzioni proprie almeno lineari.*

Una dimostrazione alternativa del teorema è data dalla seguente, in cui non si ricorre alla macchina di Turing (MdT) Universale, ma si sfrutta il lemma in cui si dimostra che una k-MdT che opera in spazio $f(n)$ è simulabile da una 1-MdT che opera in spazio $O(f(n))$.

Teorema 1.1.1. *Siano $S_1(n)$ e $S_2(n)$ due funzioni spazio proprie (entrambe almeno $\log n$) e $S_2(n) = w(S_1(n))$. Allora esiste un linguaggio in $\mathsf{SPACE}(S_2(n))$ che non appartiene a $\mathsf{SPACE}(S_1(n))$.*

Dimostrazione. Si fissi una codifica binaria ragionevole di tutte le MdT con I/O con 1 nastro *lavoro* e che accettino l'alfabeto d'input $\{0, 1\}$. Si permetterà che ogni codifica sia prefissa da una stringa di lunghezza arbitraria finita costituita dal carattere '1': in questo modo la medesima MdT potrà avere più codifiche.

Costruiamo ora una MdT M con I/O a 3 nastri lavoro che operi in spazio $S_2(n)$ e che differisce almeno su un input con qualsiasi MdT codificata che opera in spazio $S_1(n)$.

Su input $w \in \{0, 1\}^n$, M inizia marcando esattamente $S_2(n)$ celle sui tutti i nastri lavoro. Questo si può fare in quando $S_2()$ è propria. Se durante la simulazione, M tenta di scrivere al di fuori delle celle marcate, essa si ferma in uno stato di rifiuto. In questo modo garantiamo che M opera in spazio $S_2(n)$.

Dato l'input x, M inizia la simulazione della macchina di Turing M_x su input x copiando x (codifica della MdT M_x) sul primo nastro lavoro e togliendo contemporaneamente gli eventuali '1' che riempiono in testa la codifica. M userà questo nastro per determinare le mosse della macchina da simulare. Sui nastri 2 e 3, M mantiene la codifica binaria dello stato e del nastro di lavoro di M_x. Se M_x si ferma e rifiuta x nello spazio disponibile, M **accetta** x, altrimenti M rifiuta.

Dato che M opera in spazio $S_2(n)$, il linguaggio $L_M \in \mathsf{SPACE}(S_2(n))$. Supponiamo ora $L_M \in \mathsf{SPACE}(S_1(n))$. Allora deve esistere una MdT M' che decide L_M e che opera in spazio $S_1(n)$. M' ha una codifica nell'enumerazione, supponiamo che sia w' di lunghezza n. Lo spazio richiesto da M per simulare M' su input w' è $\max\{e, \lceil\log s\rceil, \lceil\log t\rceil S_1(n)\}$, dove e è la lunghezza della più corta codifica di M' e s, t sono il numero di passi e di simboli di M'.

Dato $S_2(n) = w(S_1(n))$, se si sceglie n sufficientemente grande, possiamo ottenere $S_2(n) > \max\{e, \lceil\log s\rceil, \lceil\log t\rceil S_1(n)\}$. In questo modo, su input w', M ha sufficiente spazio per completare la simulazione di M' a accettare se e solo se M' rifiuta. Quindi l'assurdo. □

Esercizio 1.2. Dimostrare che $\mathsf{NTIME}(n) \subset \mathsf{PSPACE}$. Se fosse $\mathsf{NTIME}(n^k)$ cosa cambierebbe?

Esercizio 1.3. Se $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, allora esiste un algoritmo polinomiale in tempo che, data una formula booleana ϕ, determina un assegnamento di verità per ϕ se questa è soddisfacibile. Esibire tale algoritmo.

Esercizio 1.4. Determinare una riduzione diretta, logaritmica in spazio, da SAT a 3-SAT.

2 Appello del 15/07/2002

Esercizio 2.1. Dimostrare che la classe NL è chiusa rispetto alle operazioni di unione e concatenazione. *(max 7 punti)*

Esercizio 2.2. Descrivere l'errore nella seguente dimostrazione *errata* che $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$. *Si consideri un algoritmo per SAT del tipo: "Su input ϕ, prova tutti i possibili assegnamenti alle variabili. Accetta se almeno un assegnamento soddisfa ϕ". Questo algoritmo chiaramente richiede tempo esponenziale. Perciò SAT ha complessità esponenziale, quindi SODDISFACIBILITÀ $\notin \mathsf{P}$. Dato che SAT è in NP, si ottiene che $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$. (max 7 punti)*

Esercizio 2.3. Dimostrare che $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^+ \wedge \alpha < \beta, \mathsf{TIME}(n^\alpha) \subset \mathsf{TIME}(n^\beta)$.
È possibile dimostrare che anche $\mathsf{TIME}(n^\alpha 2^n) \subset \mathsf{TIME}(n^\beta 2^n)$? *(max 8 punti)*

Esercizio 2.4. Data una MdT M e due interi n, m, esiste un algoritmo che decide se M utilizza spazio m per qualche input di lunghezza n? Se sì, dare una dimostrazione con analisi di complessità dell'algoritmo. Se no, dare una dimostrazione formale. *(max 8 punti)*

3 Appello del 02/09/2002

Esercizio 3.1. Si riassumano i principali risultati di equivalenza (o non equivalenza), relativamente all'aspetto computazionale, tra i modelli di calcolo RAM e MdT. *(max 7 punti)*

Esercizio 3.2. Si definisca la classe $\mathsf{TIME}(f(n))$. Se $x \in \mathsf{TIME}(f(n))$, in quali altre classi $\mathsf{TIME}(g(n))$ è presente? Giustificare la risposta. *(max 7 punti)*

Esercizio 3.3. Dimostrare che $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^+ \wedge \alpha < \beta, \mathsf{SPACE}(n^\alpha) \subset \mathsf{SPACE}(n^\beta)$. È possibile dimostrare che anche $\mathsf{SPACE}(n^\alpha 2^n) \subset \mathsf{SPACE}(n^\beta 2^n)$? *(max 8 punti)*

Esercizio 3.4. Si definisca in modo rigoroso il concetto di riduzione e di riduzione logaritmica in spazio. Si esibisca una riduzione logaritmica in spazio tra CIRCUIT SAT e SAT. *(max 8 punti)*

Parte II
Anno accademico 2002/2003

4 Appello del 09/12/2002

Esercizio 4.1. Quali sono i risultati principali che permettono di dimostrare che $\mathsf{NL} \subset \mathsf{PSPACE}$. Giustificare la risposta. *(max 7 punti)*

Esercizio 4.2. Si supponga che esista una riduzione di complessità in tempo 2^n tra il linguaggio L_1 e il linguaggio L_2 e che $L_2 \in \mathsf{TIME}(2^n)$. Che cosa si può dire di L_1? Giustificare la risposta. *(max 7 punti)*

Esercizio 4.3. Indicare quali delle seguenti relazioni sono errate, giustificando la risposta:

1. SODDISFACIBILITÀ $\leq_{\log}$ CIRCUIT SAT;
2. CIRCUIT VALUE $\leq_{\log} \emptyset$;
3. MASSIMO FLUSSO $\leq_{\log}$ RAGGIUNGIBILITÀ.

(max 8 punti)

Esercizio 4.4. Un *triangolo* in un grafo non diretto è una cricca di ordine 3. Dimostrare che il problema TRIANGOLO = $\{G \mid G$ contiene un triangolo$\} \in \mathsf{P}$. *(max 8 punti)*

5 Appello del 24/03/2003

Esercizio 5.1. Fornire la definizione formale della classe di complessità EXP e dimostrare la relazione esistente tra EXP e la classe NP. *(max 7 punti)*

Esercizio 5.2. Qual è la classe di complessità in tempo, deterministica dove è presente il problema della RAGGIUNGIBILITÀ? Giustificare la risposta. *(max 7 punti)*

Esercizio 5.3. Si dimostri che la classe P è chiusa rispetto alla riduzione $\leq_{\log}$. *(max 8 punti)*

Esercizio 5.4. Si dimostri che il problema INSIEME INDIPENDENTE $\leq_{\log}$ COPERTURA DEI NODI. Vale il viceversa? Giustificare le risposte. *(max 8 punti)*

6 Appello del 24/06/2003

Esercizio 6.1. Spiegare cosa si intende per *analisi caso peggiore* nell'ambito della teoria della complessità computazionale e perché questa è più usata della cosiddetta *analisi del caso medio*. *(max 7 punti)*

Esercizio 6.2. Si definisca la classe $\mathtt{SPACE}(f(n))$. Se $l \in \mathtt{SPACE}(f(n))$, in quali altre classi $\mathtt{TIME}(g(n))$ è presente? Giustificare la risposta. *(max 7 punti)*

Esercizio 6.3. Si dimostri in quale classe di complessità si trova la versione di decisione del problema del commesso viaggiatore. *(max 8 punti)*

Esercizio 6.4. Si consideri la seguente riduzione: *Dati due linguaggi $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ e $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, L_1 è riducibile a L_2 in tempo polinomiale ($L_1 \leq_m L_2$) se esiste una funzione $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ computabile in tempo polinomiale da una Macchina di Turing deterministica tale che $\forall x \in \Sigma_1^*, x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.*

Che relazione esiste tra la riduzione $\leq_m$ e la riduzione $\leq_{\log}$?

Se si adottasse la riduzione $\leq_m$, quali dei risultati di completezza non potrebbero essere dimostrati? *(max 8 punti)*

7 Appello del 15/07/2003

Esercizio 7.1. Spiegare cosa si intende per *complessità computazionale di un algoritmo* e per *complessità computazionale di un problema* e come si calcolano. Qual è il legame fra le due complessità? *(max 7 punti)*

Esercizio 7.2. Si definisca cosa si intende per *funzione propria* e se ne dia un esempio con dimostrazione. *(max 7 punti)*

Esercizio 7.3. Si dimostri che se esiste un problema Π tale che sia Π sia Π^c sono $\mathtt{NP}$-completi, allora $\mathtt{NP} = co\mathtt{NP}$. *(max 8 punti)*

Esercizio 7.4. Una riduzione *in tempo lineare* R deve completare il suo output $R(x)$ in tempo $O(|x|)$. Dimostrare in modo formale che non ci possono essere problemi $\mathtt{P}$-completi se si adottano riduzioni in tempo lineare. *(max 8 punti)*

8 Appello del 10/09/2003

Esercizio 8.1. Dato un problema A che richiede al più $n^{\log_2 n}$ quanti di tempo per essere risolto mediante un elaboratore C e dati k quanti di tempo per determinare la soluzione, qual è la dimensione massima di un'istanza del problema che può essere risolta?

Se si adotta un calcolatore C' che opera 2^4 volte più veloce di C, qual è la nuova dimensione massima di un'istanza del problema che può essere risolta? *(max 7 punti)*

Esercizio 8.2. Si definisca la classe $\mathtt{NSPACE}(f(n))$. Se il linguaggio $L \in \mathtt{NSPACE}(f(n))$, in quali altre classi del tipo $\mathtt{TIME}(g(n))$ è presente? Giustificare la risposta. *(max 7 punti)*

Esercizio 8.3. Si determini un limite superiore alla complessità computazionale in tempo del problema PERFECT MATCHING. La dimostrazione deve essere completa. *(max 8 punti)*

Esercizio 8.4. Dato un grafo orientato G, il problema del CIRCUITO HAMILTONIANO chiede se esiste un ciclo che include ogni nodo di G esattamente una volta.

Si consideri la versione più generale di CIRCUITO HAMILTONIANO definita su grafi non orientati.

Si dimostri che CIRCUITO HAMILTONIANO $\leq_{\log}$ COMMESSO VIAGGIATORE(D).

Questa dimostrazione permette di affermare che CIRCUITO HAMILTONIANO è $\mathtt{NP}$-completo? Giustificare la risposta.

In caso di risposta negativa, CIRCUITO HAMILTONIANO è $\mathtt{NP}$-completo?

(max 8 punti)

9 Appello del 23/09/2003

Esercizio 9.1. Descrivere la differenza tra la versione di decisione e la versione costruttiva di un problema di ottimizzazione. Che relazioni si possono stabilire tra le due versioni di uno stesso problema nel caso in cui questo sia in $\mathtt{P}$? *(max 7 punti)*

Esercizio 9.2. Si illustri brevemente cosa si intende per *criterio del costo uniforme* e per *criterio del costo logaritmico* nel modello di calcolo RAM. Si determini poi il costo dell'operazione SUB *i. *(max 7 punti)*

Esercizio 9.3. Si determini la complessità computazionale in tempo del problema RAGGIUNGIBILITÀ senza ricorrere allo strumento della riduzione. *(max 8 punti)*

Esercizio 9.4. Dato un insieme $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ di interi positivi, il problema PARTIZIONE chiede se esiste un sottoinsieme $S \subseteq A$ tale che $\sum_{a_i \in S} a_i = \sum_{a_i \in A \setminus S} a_i$.

Dati un insieme $O = \{o_1, \ldots, o_n\}$ di 'oggetti', tali che o_i è caratterizzato da un profitto p_i e da un volume v_i, entrambi interi positivi, e due interi positivi c (capacità dello zaino) e k (obiettivo), il problema dello ZAINO chiede se esiste un sottoinsieme $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tale che $\sum_{i \in S} v_i \leq c$ e $\sum_{i \in S} p_i \geq k$.

Dimostrare che PARTIZIONE $\leq_{\log}$ ZAINO esibendo la riduzione.

Assumendo che SAT $\leq_{\log}$ PARTIZIONE, cosa si può asserire circa i due problemi? *(max 8 punti)*

Parte III
Anno accademico 2003/2004

10 Appello del 11/12/2003

Esercizio 10.1. Si enunci il teorema di gerarchia in tempo nella formulazione più stringente; si illustri brevemente il suo significato dal punto di vista della risorsa computazionale tempo; si indichi quali sono le conseguenze sulla gerarchia delle classi di complessità principali viste durante il corso. *(max 7 punti)*

Esercizio 10.2. Data una funzione di complessità propria $g(n)$, la funzione $f(n) = ng(n)$ è una funzione di complessità propria? Giustificare la risposta. *(max 7 punti)*

Esercizio 10.3. Si consideri il problema 7-CIRCUITO: *Dato un grafo G di n nodi, ammette un circuito di lunghezza 7?*

7-CIRCUITO $\overset{?}{\in}$ NL. Giustificare la risposta. *(max 8 punti)*

Esercizio 10.4. Esibire una riduzione $\leq_{\log}$ diretta da 3-COLORING a SAT e determinare quante clausole compongono l'espressione booleana determinata dalla riduzione. *(max 8 punti)*

11 Appello del 26/03/2004

Esercizio 11.1. Definire in modo formale una codifica di un grafo diretto pesato con stringhe binarie usando la matrice di adiacenza. Definire poi un'altra codifica simile usando le liste di adiacenza. Dimostrare che le due codifiche sono polinomialmente correlate. *(max 7 punti)*

Esercizio 11.2. Dimostrare le seguenti uguaglianze in modo formale:

- $(\log n)^k = O(n^\varepsilon)$ per qualsiasi intero k e qualsiasi $\varepsilon > 0$.
- $(\log n)^{(\log n)} = \Omega(n^k)$ per qualsiasi intero k.

(max 7 punti)

Esercizio 11.3. Dimostrare in modo formale che se si avesse un algoritmo polinomiale in tempo che *computa la lunghezza* del cammino più breve per il problema del COMMESSO VIAGGIATORE, allora è possibile determinare un algoritmo polinomiale in tempo per *fornire* il cammino più breve. *(max 8 punti)*

Esercizio 11.4. Si dimostri che il problema COPERTURA DEI NODI $\leq_{\log}$ INSIEME INDIPENDENTE. Vale il viceversa? Giustificare le risposte. *(max 8 punti)*

12 Appello del 29/06/2004

Esercizio 12.1. Si enunci la tesi del calcolo sequenziale e le due principali conseguenze sullo studio degli algoritmi per la risoluzione dei problemi. *(max 7 punti)*

Esercizio 12.2. Fornire la definizione formale della classe di complessità NL e esibire la relazione esistente tra NL e NP. *(max 7 punti)*

Esercizio 12.3. Determinare la classe di complessità in tempo del seguente problema:
Dato un grafo di dimensione n, esiste una cricca di ordine 50?
Giustificare la risposta. *(max 8 punti)*

Esercizio 12.4. Dimostrare che 2-COLORABILITÀ $\in$ P. *(max 8 punti)*

13 Appello del 13/07/2004

Esercizio 13.1. Si enunci il teorema che lega i tempi di computazione di una MdT a k nastri con una a 1 nastro e si indichi la conseguenza principale sullo studio dei problemi intrattabili. *(max 7 punti)*

Esercizio 13.2. Fornire la definizione formale della classe di complessità L e della classe P, quindi esibire la relazione esistente tra le due classi, giustificandola sinteticamente. *(max 7 punti)*

Esercizio 13.3. Determinare la classe di complessità in tempo del seguente problema:
Dato un grafo di dimensione n, esiste un insieme di indipendenza di dimensione $n/2$?
Giustificare la risposta. *(max 8 punti)*

Esercizio 13.4. Esibire una riduzione $\leq_{\log}$ diretta da 3-COLORING a SAT e determinare quante clausole compongono l'espressione booleana determinata dalla riduzione. *(max 8 punti)*

14 Appello del 07/09/2004

Esercizio 14.1. Si enunci la tesi del calcolo sequenziale e le due principali conseguenze sullo studio degli algoritmi per la risoluzione dei problemi. *(max 7 punti)*

Esercizio 14.2. Dimostrare che se esiste un problema P tale che sia P che P^c sono NP-completi, allora NP = coNP.
Si ricorda P^c è il problema complemento e coNP è la classe dei problemi complemento dei problemi in NP. *(max 7 punti)*

Esercizio 14.3. Un problema di decisione P è detto Karp-riducibile in tempo polinomiale a un problema di decisione P' se esiste un algoritmo polinomiale in tempo R che, data un'istanza $x \in I_P$, la trasforma in un'istanza $y \in I_{P'}$ tale che $x \in L_P \Leftrightarrow y \in L_{P'}$. Dimostrare se la classe NP è chiusa rispetto a questa riduzione. Che relazione esiste tra $\leq_{\log}$ e questa riduzione? *(max 8 punti)*

Esercizio 14.4. Si consideri il problema TAUTOLOGIA:
DESCRIZIONE: Una formula booleana F in DNF (Forma Normale Disgiunta)
QUESITO: Ogni assegnamento di verità su F è un assegnamento che rende vera F?
Si dimostri che TAUTOLOGIA $\in$ coNP. Il problema è coNP-completo? *(max 8 punti)*

Parte IV
Anno accademico 2004/2005

15 Appello del 07/12/2004

Esercizio 15.1. Sia A il linguaggio delle parentesi tonde correttamente accoppiate. Per esempio, (()), (()(()))() sono in A mentre ())(non è in A. Dimostrare che $A \in$ L. *(max 7 punti)*

Esercizio 15.2. Cosa si intende per classe PTAS. Dare un esempio di problema (formalmente definito) che appartiene a questa classe. Non è necessario dare la dimostrazione di appartenenza. *(max 7 punti)*

Esercizio 15.3. Si consideri il problema MASSIMO CAMMINO che consiste nel determinare il cammino di maggior lunghezza in un grafo non pesato tra due nodi dati in input. Se ne dia una definizione formale (nella versione più opportuna) e si dimostri che appartiene alla classe VP. *(max 8 punti)*

Esercizio 15.4. Si dimostri che MASSIMO CAMMINO, nella sua versione opportuna, è NP-completo. *(max 8 punti)*

16 Appello del 31/03/2005

Esercizio 16.1. Si consideri un problema A che richiede al più $f(n)^{\log_2 a}$ quanti di tempo per essere risolto mediante un elaboratore C, dove n è la dimensione dell'istanza. Quali sono le assunzioni si devono fare circa $f(n)$ e a per poter dire che il problema ha complessità polinomiale in tempo? *(max 7 punti)*

Esercizio 16.2. Indicare quali sono i criteri di ragionevolezza che ogni schema di codifica deve soddisfare. Dimostrare qual è il criterio necessario per garantire l'equivalenza polinomiale degli schemi di codifica ragionevoli. *(max 7 punti)*

Esercizio 16.3. Si dia la definizione formale del problema ZAINO(D) e sia descriva come è possibile risolvere il problema con un algoritmo pseudo-polinomiale. Qual è la classe di complessità del problema? *(max 8 punti)*

Esercizio 16.4. Si consideri il problema del RICOPRIMENTO DI VERTICI su grafi privi di triangoli. Si dimostri che il problema è NP-completo. *(max 8 punti)*

17 Appello del 21/06/2005

Esercizio 17.1. Si enunci il teorema dell'accelerazione lineare e si illustri sinteticamente la conseguenza principale di tale teorema nello studio della complessità computazionale. *(max 7 punti)*

Esercizio 17.2. Il problema RAGGIUNGIBILITÀ $\in$ NL. Se si vuole considerare solo computazioni deterministiche, come varia la complessità computazionale del problema rispetto alla risorsa tempo?
Nel novembre 2004, Omer Reingol ha dimostrato che RAGGIUNGIBILITÀ può essere risolto in spazio $O(\log n)$ quando il grafo non è diretto. Perché questo risultato non permette di affermare che RAGGIUNGIBILITÀ $\in$ L?

Esercizio 17.3. Si determini cosa è errato nel seguente ragionamento:

> Si consideri il problema A e il suo miglior algoritmo risolutore noto $\mathcal{A}$. Il tempo di computazione di $\mathcal{A}$ è pari a 2^n, dove n è la dimensione dell'istanza. Quindi non è possibile affermare che $A \in$ P. Se si considera una codifica unaria delle istanze, a maggior ragione non si può affermare $A \in$ P. Quindi non è vero che la notazione unaria non può essere usata per classificare i problemi quando si esegue l'analisi del caso peggiore.

(max 8 punti)

Esercizio 17.4. Si dimostri che il problema RICOPRIMENTO DI VERTICI(D) (VERTEX COVER(D)) è NP-completo esibendo una riduzione diretta dal problema 3-SAT. *(max 8 punti)*

18 Appello del 12/07/2005

Esercizio 18.1. Si enunci il teorema della simulazione di un k-MdT con una MdT e si illustri sinteticamente la conseguenza principale di tale teorema nello studio della complessità computazionale. *(max 7 punti)*

Esercizio 18.2. Si illustrino sinteticamente le due relazioni fondamentali tra le risorse tempo e spazio di una computazione nelle Macchine di Turing deterministiche e non deterministiche. *(max 7 punti)*

Esercizio 18.3. Si dimostri la seguente affermazione, data come esercizio durante il corso: *Qualsiasi problema* $\Pi \in$ NPO *ha la sua versione di decisione nella classe* NP. *(max 8 punti)*

Esercizio 18.4. Si dimostri che il problema del commesso viaggiatore è NP-completo esibendo una riduzione logaritmica in spazio. *(max 8 punti)*

19 Appello del 08/09/2005

Esercizio 19.1. Si dia la definizione di *Tempo di esecuzione per una data dimensione di input* per una k-NMdT e si indichi qual è la conseguenza principale di tale definizione nella definizione delle classi di complessità computazionali in tempo. *(max 7 punti)*

Esercizio 19.2. Si dia la definizione di *verificatore polinomiale* e della classe VP. Sia illustri brevemente la relazione tra la classe VP e la classe NP. *(max 7 punti)*

Esercizio 19.3. Si dimostri che il problema MASSIMO INSIEME DI INDIPENDENZA(D) è in P quando il grado del grafo è al più 2. *(max 8 punti)*

Esercizio 19.4. Sia $U = \{\langle M, x, 1^t \rangle \mid M \text{ è una NMdT che accetta input } x \text{ in al più } t \text{ passi}\}$. Dimostrare che U è NP-completo. *(max 8 punti)*

20 Appello del 22/09/2005

Esercizio 20.1. Si riassumano i principali risultati di equivalenza (o non equivalenza), relativamente all'aspetto computazionale, tra i modelli di calcolo Macchina di Turing Deterministica e Macchina di Turing NON deterministica. *(max 7 punti)*

Esercizio 20.2. Si definisca la classe SPACE$(f(n))$. Se il linguaggio $L \in$ SPACE$(f(n))$, in quali altre classi del tipo TIME$(g(n))$ è presente? Giustificare la risposta. *(max 7 punti)*

Esercizio 20.3. Data una MdT M e due interi n, m, esiste un algoritmo che decide se M utilizza spazio m per qualche input di lunghezza n? Se sì, dare una dimostrazione con analisi di complessità dell'algoritmo. Se no, dare una dimostrazione formale. *(max 8 punti)*

Esercizio 20.4. Il prof. Max Hoax ha annunciato che la soglia di approssimazione per il problema del commesso viaggiatore è 1/3. Che conseguenze si avrebbero se tale risultato fosse confermato? Giustificare la risposta. Esistono dei sotto casi per i quali tale risultato è già stato dimostrato? *(max 8 punti)*

Parte V
Anno accademico 2005/2006

21 Appello del 13/12/2005

Esercizio 21.1. Si enunci la tesi del calcolo sequenziale **in modo formale e preciso** e si indichi brevemente quali sono le due conseguenze principali di questa tesi. *(punteggio max 7 punti)*

Esercizio 21.2. Il prof. Max Hoax ha annunciato che la soglia di approssimazione per il problema del commesso viaggiatore è 1/3. Che conseguenze si avrebbero se tale risultato fosse confermato? Giustificare la risposta. *(max 7 punti)*

Esercizio 21.3. Si dimostri se vale che $\mathsf{SPACE}((\log n)^2) \subseteq \mathsf{P}$. Giustificare la risposta. *(max 8 punti)*

Esercizio 21.4. Si supponga di avere a disposizione un verificatore polinomiale A per il problema RAGGIUNGIBILITÀ. Si costruisca un algoritmo B che determini la soluzione costruttiva usando esclusivamente A e, suggerimento, degli opportuni certificati.
Qual è la complessità in tempo di B?
Suggerimento: un certificato non è solo dato da una soluzione. Si definisca quindi che tipo di certificato può accettare il verificatore... che deve comunque rimanere polinomiale!
(punteggio max 8 punti)

22 Appello del 27/03/2006

Esercizio 22.1. Definire in modo formale una codifica di un grafo diretto pesato con stringhe binarie usando le liste di adiacenza. Definire poi un'altra codifica simile usando la matrice di adiacenza. Dimostrare che le due codifiche sono polinomialmente correlate. *(max 7 punti)*

Esercizio 22.2. Si definisca la classe $\mathsf{NSPACE}(f(n))$. Se il linguaggio $L \in \mathsf{NSPACE}(f(n))$, in quali altre classi del tipo $\mathsf{TIME}(g(n))$ è presente? Giustificare la risposta. *(max 7 punti)*

Esercizio 22.3. Dimostrare in modo formale che se si avesse un algoritmo polinomiale in tempo che *computa la lunghezza* del cammino più breve per il problema del COMMESSO VIAGGIATORE, allora è possibile determinare un algoritmo polinomiale in tempo per *fornire* il cammino più breve. *(max 8 punti)*

Esercizio 22.4. Si consideri il problema 7-CIRCUITO: *Dato un grafo G di n nodi, ammette un circuito di lunghezza 7?*
7-CIRCUITO $\overset{?}{\in}$ NL. Giustificare la risposta. *(max 8 punti)*

23 Appello del 20/06/2006

Esercizio 23.1. Si enunci il teorema dell'accelerazione lineare e si illustri sinteticamente la conseguenza principale di tale teorema nello studio della complessità computazionale. *(max 7 punti)*

Esercizio 23.2. Si dia la definizione formale della classe di complessità EXP e dimostrare la relazione esistente tra EXP e la classe NP. *(max 7 punti)*

Esercizio 23.3. Dato un grafo G e un intero k, il problema del *ricoprimento di cricca* è dato dal determinare se esistono k cricche in G tali che ogni vertice di G sia in almeno una cricca. Dimostrare che il problema è NP-completo. *Suggerimento: si consideri il problema della k-colorabilità. (max 8 punti)*

Esercizio 23.4. Si dimostri qual è il livello di approssimabilità del problema di MINIMO RICOPRIMENTO DI NODI di un grafo non diretto. *(max 8 punti)*

24 Appello del 12/09/2006

Esercizio 24.1. Si enunci il teorema di gerarchia in tempo e si illustri sinteticamente la conseguenza principale di tale teorema nello studio della complessità computazionale. *(max 7 punti)*

Esercizio 24.2. Si dia la definizione formale della classe di complessità L e si dimostri la relazione esistente tra L e la classe P. *(max 7 punti)*

Esercizio 24.3. Si dimostri qual è il livello di approssimabilità del problema di MINIMO RICOPRIMENTO DI NODI. *(max 8 punti)*

Esercizio 24.4. Si dimostri che il seguente problema è NP-completo:
Dato un grafo pesato G (dove i pesi sono interi), e due interi f e g , esiste un modo per contrassegnare f vertici come 'stazioni di servizio' in modo tale ogni altro vertice sia distante al più g da una stazione di servizio?
Suggerimento: si consideri il problema 3SAT! (max 8 punti)

Parte VI
Anno accademico 2009/2010

25 Prova di appello del 13/01/2010

Esercizio 25.1 (*max 7 punti*)**.** Indicare cosa si intende per *principio di invarianza* nell'ambito dell'analisi degli algoritmi e qual è la sua conseguenza immediata.

In complessità il *principio di invarianza* può essere visto come un teorema se si considera uno specifico modello di calcolo. Enunciare il teorema e indicare perché è equivalente al principio di invarianza.

Esercizio 25.2 (*max 7 punti*)**.** Nell'ambito della teoria degli algoritmi, si definisca cosa si intende per *tecnica memoization* e si indichi quali sono i principali vantaggi e svantaggi di questa tecnica.

Nell'ambito della complessità, si definisca la classe $\mathsf{TIME}(f(n))$. Se $x \in \mathsf{TIME}(f(n))$, in quali altre classi $\mathsf{TIME}(g(n))$ è presente? Giustificare la risposta.

Esercizio 25.3 (*max 8 punti*)**.** Si consideri il problema del MINIMO RICOPRIMENTO DI VERTICI.

- Si determini una funzione upper bound e una lower bound per le soluzioni parziali pensando di dover sviluppare un algoritmo branch & bound.
- Si determini inoltre la sua complessità computazionale.

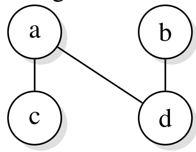
Esercizio 25.4 (*max 8 punti*)**.** Si dimostri che il problema del commesso viaggiatore è NP-completo esibendo una riduzione logaritmica in spazio. Si dia quindi un algoritmo diverso dalla ricerca esaustiva semplice che determini una soluzione ottima.

26 Prova di appello del 20/01/2010

Esercizio 26.1 (*max 7 punti*)**.**
Parte Complessità
Descrivere la differenza tra la versione di decisione e la versione costruttiva di un problema di ottimizzazione. è sempre possibile, dato un algoritmo polinomiale in tempo per la versione di decisione, determinare un algoritmo polinomiale in tempo per la versione costruttiva? Giustificare la risposta.
Parte Algoritmi
Presentare un algoritmo polinomiale in tempo per la versione di decisione di un problema a scelta e, quindi, modificare tale algoritmo per determinare, sempre in tempo polinomiale, la soluzione alla versione costruttiva. *(max 7 punti)*

Esercizio 26.2 (*max 7 punti*)**.**
Parte Complessità
Si definisca cosa si intende per *funzione propria* e se ne dia un esempio con dimostrazione.
Parte Algoritmi
Si definisca cos'è un matroide e cosa si intende per *proprietà della sottostruttura ottima* dello stesso.

Esercizio 26.3 (*max 16 punti*).
Parte Complessità
Si dimostri che il problema MASSIMO INSIEME DI INDIPENDENZA (D) è in P quando il grado del grafo è al più 2 e non contiene cicli. Si determini l'ordine di grandezza dell'algoritmo polinomiale sufficiente per dimostrare l'appartenenza.
Parte Algoritmi
Si proponga uno schema di algoritmo che determini la soluzione esatta del problema MASSIMO INSIEME DI INDIPENDENZA (generale) adottando la tecnica del backtracking. Si disegni l'albero implicito visitato dall'algoritmo per il grafo



27 Appello del 02/02/2010

Esercizio 27.1 (max 7 punti per parte).
Parte Complessità
Si dia la definizione formale della classe di complessità EXP e si dimostri la relazione esistente tra EXP e la classe PSPACE.
Parte Algoritmi
Si definisca cosa si intende per *tecnica memoization* e si indichi quali sono i principali vantaggi e svantaggi di questa tecnica.

Esercizio 27.2 (max 7 punti per parte).
Parte Complessità
Si dimostri in modo esplicito che 2-COLORABILITÀ è in P.
Parte Algoritmi
Si descriva come si può impostare una soluzione Simulated Annealing per il problema MAX-SAT (Massima soddisfacibilità di formule booleane in forma normale congiunta).

Esercizio 27.3 (max 16 punti per parte).
Parte Complessità
Dare una dimostrazione che MASSIMA CRICCA(D) è NP-completo senza ricorrere alla completezza di MASSIMO INSIEME DI INDIPENDENZA(D) o di MINIMO RICOPRIMENTO DI VERTICI(D).
Parte Algoritmi
Determinare un algoritmo esatto per MASSIMA CRICCA basato sul branch & bound scrivendo in modo esplicito le due funzioni bound che l'algoritmo usa. Suggerimento: una soluzione anche non ottima del problema COLORAZIONE è un upper bound.

28 Appello del 16/02/2010

Esercizio 28.1 (max 8 punti per parte).
Parte Complessità
Si dia l'enunciato del teorema di Savitch e si indichi qual è la conseguenza per la classe NSPACE$(f(n))$. Se $f(n)$ è una funzione propria di complessità $O(\log n)$, qual è la conseguenza per la classe NSPACE$(f(n))$.
Parte Algoritmi
Si indichino le fasi con cui si dovrebbe sviluppare un algoritmo di programmazione dinamica.

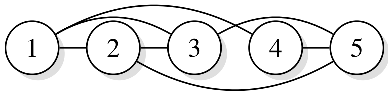
Esercizio 28.2 (max 8 punti per parte).
Parte Complessità
Dare la definizione di riduzione polinomiale in tempo ($\leq_m$) e dimostrare che è una relazione riflessiva. *Suggerimento: è come la riduzione logaritmica in spazio ma pone un vincolo sul tempo anziché sullo spazio.*
Parte Algoritmi
Si consideri il problema COLORABILITÀ(Dato un grafo connesso di n nodi, colorare i nodi con il minor numero possibile

di colori in modo che nessuna coppia di nodi adiacenti abbiano lo stesso colore). Si consideri quindi il seguente algoritmo:

Procedura COL(G)

// $G = (V, E)$ è un grafo di n nodi
$sol = [0, \dots, 0]$;
for $(i = 1; i \leq n; i{+}{+})$ **do**
    $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$;
    for $(j = 1; j \leq i-1; j{+}{+})$ **do**
        if $(\{i, j\} \in E)$ **then**
            $C = C \setminus \{sol[j]\}$;
    $sol[i] = \min\{c \mid c \in C\}$;
return sol

Scrivere la colorazione che si ottiene per il grafo



Risolve il problema? In caso affermativo dare una dimostrazione di correttezza, altrimenti esibire un controesempio.

Esercizio 28.3 (max 16 punti per parte).
Parte Complessità
Dare una dimostrazione che MINIMO RICOPRIMENTO DI VERTICI(D) è NP-completo senza ricorrere alla completezza di MASSIMO INSIEME DI INDIPENDENZA(D) o di MASSIMA CRICCA(D).
Parte Algoritmi
Determinare un algoritmo esatto per la versione di valutazione del problema k-SOTTOSEQUENZA di interi. Un k-sottosequenza di X è una sottosequenza di X in cui compaiono al più k elementi consecutivi di X. Il problema chiede, data una sequenza X di n interi e un intero $k < n$, di determinare una k-sottosequenza di X con somma degli elementi massima possibile. Per esempio, la sequenza $X = [4, 6, -1, 4, 7, 5, 4, 7]$ ammette la 3-sottosequenza di valore 33: $[4, 6, 4, 7, 5, 7]$. *Suggerimento: caratterizzare la versione di valutazione in modo ricorsivo usando due parametri…*

29 Appello del 24/06/2010

Esercizio 29.1 (max 8 punti per parte).
Parte Complessità
Dimostrare che $\mathsf{NTIME}(n) \subset \mathsf{PSPACE}$. Se fosse $\bigcup_{k>0} \mathsf{NTIME}(n^k)$ cosa cambierebbe?
Parte Algoritmi
Si definisca cos'è un matroide e cosa si intende per *proprietà della sottostruttura ottima* dello stesso.

Esercizio 29.2 (max 8 punti per parte).
Parte Complessità
Descrivere l'errore nella seguente dimostrazione *errata* che $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$. *Si consideri un algoritmo per SODDISFACIBILITÀ del tipo: "Su input ϕ, prova tutti i possibili assegnamenti alle variabili. Accetta se almeno un assegnamento soddisfa ϕ". Questo algoritmo chiaramente richiede tempo esponenziale. Perciò SODDISFACIBILITÀ ha complessità esponenziale, quindi SODDISFACIBILITÀ $\notin \mathsf{P}$. Dato che SODDISFACIBILITÀ è in NP, si ottiene che $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$.*
Parte Algoritmi
Descrivere lo schema generale della tecnica del *Simulated annealing*.

Esercizio 29.3 (max 16 punti per parte).
Parte Complessità
Si consideri il problema del MINIMO RICOPRIMENTO DI VERTICI(D) su grafi privi di triangoli. Si dimostri che il problema è NP-completo.
Parte Algoritmi
Progettare un algoritmo di tipo *divide et impera* che, dato un vettore di n interi, trovi un sottovettore (sequenza di elementi consecutivi) con somma dei suoi elementi massima. La complessità deve essere $O(n \log n)$. *Suggerimento: ricordare che il vettore con somma massima può essere a cavallo del punto di divisione.*

30 Appello del 15/07/2010

Esercizio 30.1 (max 8 punti per parte).
Parte Complessità

Dare le definizioni delle classi NP e EXP. Dare un esempio di problema che sta in EXP e che non è stato ancora dimostrato essere in NP.
Parte Algoritmi
Cosa si intende per "algoritmo di Monte Carlo".

Esercizio 30.2 (max 8 punti per parte).
Parte Complessità
Si enunci il teorema di gerarchia in spazio e si dimostri che conseguenza ha sulla catena di relazioni tra le principali classi di complessità.
Parte Algoritmi
Si assuma che il problema di massimizzazione Π sia 3/2-approssimabile. Cosa significa? Data un'istanza I di Π, in quale intervallo (rispetto alla soluzione ottima $m^*(I)$) cade una soluzione approssimata per Π se soddisfa la proprietà di approssimazione del problema stesso?

Esercizio 30.3 (max 16 punti per parte).
Parte Complessità
Si consideri il problema 3-SODDISFACIBILITÀ in cui in ogni clausola può avere dimensione < 3 e, rispetto a tutte le clausole, ogni variabile compare al più 3 volte e ciascun letterale al più 2. Dimostrare che è NP-completo.
Parte Algoritmi
Progettare un algoritmo di tipo programmazione dinamica che, dato una matrice M di $n \times m$ interi, determina il vettore di somma minima $[m_{1,j_1}, m_{2,j_2}, \ldots, m_{n,j_n}]$ dove $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_n \leq m$. Il tempo di computazione deve essere $O(nm^2)$.

31 Appello del 14/09/2010

Esercizio 31.1 (max 8 punti per parte).
Parte Complessità
Si enunci il teorema di Savitch e si illustri brevemente qual è la conseguenza principale di tale teorema.
Parte Algoritmi
Si definisca cosa si intende per problema r-approssimabile.
Due studiosi sostengono che il problema MIN EDGE COLORING è, rispettivamente, $\frac{4}{3}$-approssimabile e $\frac{1}{4}$-approssimabile. Chi ha ragione? Perché?

Esercizio 31.2 (max 8 punti per parte).
Parte Complessità
Si enunci il teorema di gerarchia in tempo e si dimostri che conseguenza ha sulla catena di relazioni tra le principali classi di complessità.
Parte Algoritmi
Si consideri il problema MAX-SAT. Si proponga un'euristica in grado di determinare una soluzione approssimata il cui errore relativo sia al massimo 1/2. Indicare quale tecnica si è adottata e qual è la complessità dell'algoritmo (che deve essere polinomiale al più!).

Esercizio 31.3 (max 16 punti per parte).
Parte Complessità
Il problema del ricoprimento con cricche chiede di verificare se dato un grafo finito e un intero d è possibile partizionare il grafo in d sottografi tali che ciascuno di essi è una cricca. Si dimostri che il problema è NP-completo.
Suggerimento: problema k-colorabilità.
Parte Algoritmi
Alcuni studenti del Corso di Studi in Informatica pensano di essere in grado di laurearsi facendo il minimo sforzo in termini studio. Sia $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ l'insieme degli n esami attivati nel Corso di Studi, dove per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, l'esame e_i vale c_i crediti formativi. Si assuma che ogni esame e_i abbia un coefficiente d_i che rappresenta il grado di difficoltà dell'esame stesso. Gli studenti possono redigere il loro piano di studio individuale scegliendo nella lista degli esami attivati un insieme di esami tali che la somma dei crediti corrispondenti sia almeno P. Progettare un algoritmo che redige un piano di studio regolare con difficoltà minima in $O(nP)$.

32 Appello del 28/09/2010

Esercizio 32.1 (max 8 punti per parte).
Parte Complessità
Quali sono i risultati principali che permettono di dimostrare che $\text{NL} \subset \text{PSPACE}$. Giustificare la risposta.
Parte Algoritmi
Si definisca cosa si intende per *Tabu search* e si dia, in modo schematico, la descrizione dei tipi di proibizioni noti.

Esercizio 32.2 (max 8 punti per parte).
Parte Complessità
Indicare quali delle seguenti relazioni sono errate, giustificando la risposta:

1. SODDISFACIBILITÀ $\leq_{\log}$ CIRCUIT SAT;
2. CIRCUIT VALUE $\leq_{\log}$ $\emptyset$;
3. MASSIMO FLUSSO $\leq_{\log}$ RAGGIUNGIBILITÀ.

Parte Algoritmi
Si consideri il problema MAX-SAT. Si proponga un'euristica in grado di determinare una soluzione approssimata il cui errore relativo sia al massimo 1/2. Indicare quale tecnica si è adottata e qual è la complessità dell'algoritmo (che deve essere polinomiale al più!).

Esercizio 32.3 (max 16 punti per parte).
Parte Complessità
Dimostrare che se esiste un problema P tale che sia P che P^c sono NP-completi, allora NP = coNP.
Si ricorda P^c è il problema complemento e coNP è la classe dei problemi complemento dei problemi in NP.
Parte Algoritmi
In un grafo orientato G un sottoinsieme A degli archi è detto univoco se non contiene 2 o più archi uscenti dallo stesso nodo. Descrivere un algoritmo efficiente che preso in input un grafo G orientato con pesi positivi sugli archi, trovi un insieme univoco A di archi di G di peso **massimo**. Provare la correttezza dell'algoritmo proposto e valutare la complessità.

Parte VII
Anno accademico 2011/2012

33 Compitino metà corso del 01/12/2011

Esercizio 33.1 (max 7 punti).
Scrivere la tesi del calcolo sequenziale e indicare qual è la conseguenza principale circa lo studio dell'intrattabilità di un problema computazionale.

Esercizio 33.2 (max 7 punti).
Dare la definizione della classe EXP e indicare un esempio di problema che appartiene a EXP e non sembra appartenere a una delle sue sottoclassi notevoli (rispetto al tempo).

Esercizio 33.3 (max 8 punti).
Si determini cosa è errato nel seguente ragionamento:

> Si consideri il problema A e il suo miglior algoritmo risolutore noto $\mathcal{A}$. Il tempo di computazione di $\mathcal{A}$ è pari a 2^n, dove n è la dimensione dell'istanza. Quindi non è possibile affermare che $A \in$ P. Se si considera una codifica unaria delle istanze, a maggior ragione non si può affermare $A \in$ P. Quindi non è vero che la notazione unaria non può essere usata per classificare i problemi quando si esegue l'analisi del caso peggiore.

Esercizio 33.4 (max 8 punti).
Si dimostri che i seguenti linguaggi definiti su grafi appartengono alla classe P. Si può assumere che il grafo in input sia descritto mediante matrice di adiacenza o lista di adiacenza a seconda della rappresentazione più utile.

- CONNECTED: insieme di tutti i grafi connessi.
- TRIANGLEFREE: insieme di tutti i grafi privi di triangoli.
- BIPARTITE: insieme di tutti i grafi bipartiti.

34 Compitino fine corso del 23/01/2012

Esercizio 34.1 (max 7 punti).
Quali sono i risultati principali che permettono di dimostrare che NL $\subset$ PSPACE. Giustificare la risposta.

Esercizio 34.2 (max 7 punti).
Si dimostri che qualsiasi problema $\Pi \in$ NPO ha la sua versione di decisione nella classe NP.

Esercizio 34.3 (max 8 punti).
Si dimostri che il problema COMMESSO VIAGGIATORE(D) è NP-completo esibendo una riduzione logaritmica in spazio.

Esercizio 34.4 (max 8 punti).
Si dimostri che per qualsiasi funzione "adeguata" g, il problema COMMESSO VIAGGIATORE non è approssimabile in tempo polinomiale con un indice di prestazione al più $g(x)$, dove x è l'istanza.
Quali sono le condizioni di adeguatezza per g?

Esercizi di recupero del primo compitino

Solo chi intende recuperare una valutazione scarsa del primo compitino o non ha svolto il primo compitino, deve svolgere anche i seguenti 3 esercizi.

Esercizio 34.5 (max 10 punti).
Per ciascuno dei seguenti problemi, dimostrare se appartengono o non appartengono alla classe L.

1. Conversione di rappresentazione di un grafo da liste di adiacenza a matrice di adiacenza.
2. Determinare se un dato pattern $p \in \{0,1\}^*$ è presente in una data stringa $x \in \{0,1\}^*$.
3. Decidere se un grafo è aciclico.

Esercizio 34.6 (max 10 punti).
Dimostrare in modo formale che se la versione di valutazione del problema del COMMESSO VIAGGIATORE è risolvibile in tempo polinomiale, allora anche la versione costruttiva lo sarebbe.

Esercizio 34.7 (max 10 punti).
Dopo aver dato la definizione di verificatore polinomiale, dimostrare che qualsiasi linguaggio $L \in \mathsf{NP}$ ammette diversi verificatori polinomiali.
Due verificatori polinomiali V_1, V_2 sono diversi quando $V_1(x,c) \not\Rightarrow V_2(x,c)$, dove x è un'istanza e c un certificato.

35 Appello del 20/06/2012

Esercizio 35.1 (max 7 punti).
Si dia l'enunciato del teorema di Savitch e si indichi qual è la conseguenza sulla classe $\mathsf{NSPACE}(f(n))$. Se $f(n)$ è una funzione propria di complessità $O(\log n)$, qual è la conseguenza sulla classe $\mathsf{NSPACE}(f(n))$.

Esercizio 35.2 (max 7 punti).
Si dimostri che il problema MASSIMO INSIEME DI INDIPENDENZA(D) è in P quando il grado del grafo è al più 2 e non contiene cicli.

Esercizio 35.3 (max 8 punti).
Per ciascuno dei seguenti problemi, dimostrare se appartengono o non appartengono alla classe L.

1. Conversione di rappresentazione di un grafo da liste di adiacenza a matrice di adiacenza.
2. Determinare se un dato pattern $p \in \{0,1\}^*$ è presente in una data stringa $x \in \{0,1\}^*$.
3. Decidere se un grafo è aciclico.

Esercizio 35.4 (max 8 punti).
Dimostrare in modo formale che se la versione di valutazione del problema del COMMESSO VIAGGIATORE è risolvibile in tempo polinomiale, allora anche la versione costruttiva lo sarebbe.

36 Appello del 23/07/2012

Esercizio 36.1 (max 7 punti).
Si dia la definizione formale della classe di complessità L e si dimostri la relazione esistente tra L e la classe P.

Esercizio 36.2 (max 7 punti).
Discutere brevemente le seguenti affermazioni:

1. Le Macchine di Turing non-deterministiche accettano solo linguaggi ricorsivi.
2. Per ogni Macchina di Turing non-deterministica M esiste una Macchina di Turing deterministica M' che accetta lo stesso linguaggio di M.

3. Per ogni Macchina di Turing non-deterministica polinomiale M esiste una macchina di Turing deterministica M' che accetta lo stesso linguaggio di M in spazio polinomiale.

Esercizio 36.3 (max 8 punti)**.**
Il teorema di traslazione afferma che date le funzioni di complessità proprie $f_1(n), f_2(n) \geq n$ e $g(n) \geq n$, se $\mathsf{DTIME}(f_1(n)) \subseteq \mathsf{DTIME}(f_2(n))$, allora $\mathsf{DTIME}(f_1(g(n))) \subseteq \mathsf{DTIME}(f_2(g(n)))$.
Sfruttando il teorema di traslazione si determini che relazione esiste tra le classi $\mathsf{DTIME}(2^n)$ e $\mathsf{DTIME}(n2^n)$.
Suggerimento: si considerino $g_1 = 2^n$ e $g_2 = 2^n + n$ e si parta dall'ipotesi che $\mathsf{DTIME}(n2^n) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^n)$.

Esercizio 36.4 (max 8 punti)**.**
Dato un grafo $G = (V, E)$ e un insieme di interi positivi I, si definiscono le seguenti due funzioni: funzione di etichettamento dei nodi, $LN : V \to \mathbf{N}$ e funzione di etichettamento degli archi $LE : E \to \mathbf{N}$ che, per dato un arco $e = \{x, y\} \in E$, determina l'etichetta come $LE(e) := \max\{LN(x), LN(y)\}$.

Il problema delle LABELS chiede se, dato un grafo $G = (V, E)$, un insieme di interi positivi I e due interi k e k', esiste una funzione di etichettamento $LN : V \to I$ tale che la somma delle etichette associate ai vertici del grafo sia strettamente minore di k e la somma delle etichette associate agli archi sia maggiore o uguale a k'.

Determinare la complessità computazionale di LABELS.
Suggerimento: si consideri MINIMO RICOPRIMENTO DI VERTICI.

37 Appello del 03/09/2012

Esercizio 37.1 (max 7 punti)**.**
Si dia la definizione formale della classe di complessità NPSPACE e si dimostri la relazione esistente tra NPSPACE e la classe PSPACE.

Esercizio 37.2 (max 7 punti)**.**
Si determini un limite superiore alla complessità computazionale in tempo del problema ACCOPPIAMENTO PERFETTO. La dimostrazione deve essere completa.

Esercizio 37.3 (max 8 punti)**.**
Un quotidiano ha recentemente pubblicato un articolo in cui si afferma che la soglia di approssimazione per il problema del commesso viaggiatore è 1/3. Che conseguenze si avrebbero se tale risultato fosse confermato? Giustificare la risposta. Esistono dei sotto casi per i quali tale risultato è già stato dimostrato?

Esercizio 37.4 (max 10 punti)**.**
Si dimostri la complessità computazionale del seguente problema:

PROBLEMA SCACCHIERA (SC)

DESCRIZIONE:
- una scacchiera S con $n \times n$ caselle;
- un insieme T di m tipi di pezzi (es. alfiere, pedone, cavallo, ecc.);
- per ogni coppia $\langle c, t\rangle$, dove $c = (i, j)$ è una casella della scacchiera e t un tipo di pezzo, la lista $L(c, t)$ delle caselle controllate dal pezzo di tipo t che si trova sulla casella c;
- una lista P di disponibilità di pezzi. Ad esempio: $P = \langle(pedone, 3), (cavallo, 5)\rangle$, oppure $P = \langle(regina, 8)\rangle$ (il famoso problema delle 8 regine).

QUESITO: Esiste una collocazione di tutti i pezzi previsti in P sulla scacchiera in modo che nessun pezzo sia attaccato? In altre parole, esiste un assegnamento dei pezzi alle caselle di S in modo che nessun pezzo sia collocato su una casella controllata da un altro pezzo?

Suggerimento: si consideri MASSIMO INSIEME DI INDIPENDENZA e che l'insieme T può anche essere fatto di un solo tipo...

38 Appello del 19/09/2012

Esercizio 38.1 (max 7 punti)**.**
Si dia l'enunciato del teorema di compressione e si indichi qual è la conseguenza principale nella definizione delle classi di complessità.

Esercizio 38.2 (max 7 punti)**.**
Si dia l'enunciato del teorema di gerarchia in tempo nella versione stretta e si dimostri la conseguenza principale rispetto alle classi P e EXP.

Esercizio 38.3 (max 8 punti)**.**
Si dimostri che per qualsiasi funzione “adeguata” g, il problema COMMESSO VIAGGIATORE non è approssimabile in tempo polinomiale con un indice di prestazione al più $g(x)$, dove x è l'istanza.
Quali sono le condizioni di adeguatezza per g?

Esercizio 38.4 (max 8 punti)**.**
Si determini una riduzione tra i problemi MINIMO RICOPRIMENTO DI VERTICI e MASSIMO TAGLIO.
Suggerimento: una possibile riduzione è data costruendo un grafo per MASSIMO TAGLIO a partire da quello di MINIMO RICOPRIMENTO DI VERTICI aggiungendo solo un nodo v' *e collegandolo a ciascuno nodo* v *di* G *con* $\deg(v) - 1$ *copie di arco. In questo caso vale:* $|\delta_{G'}(U)| = 2|\{e \in E \mid e \text{ è formato da almeno un nodo di } U\}| - |U|$*, dove* $U \subset V$ *e* $\delta(U)$ *è l'insieme degli archi uscenti dai nodi dell'insieme* U *verso nodi non in* U*.*

Parte VIII
Anno accademico 2013/2014

39 Appello del 05/02/2013

Esercizio 39.1 (max 7 punti)**.**
Si dia la definizione formale della classe di complessità coNP e si illustri le relazioni fondamentali con le classi P e NP.

Esercizio 39.2 (max 7 punti)**.**
Dare la definizione formale di problema approssimabile e illustrare un esempio di problema noto appartenente a FPTAS.

Esercizio 39.3 (max 8 punti)**.**
Il teorema di traslazione afferma che date le funzioni di complessità proprie $f_1(n), f_2(n) \geq n$ e $g(n) \geq n$, se $\mathsf{DTIME}(f_1(n)) \subseteq \mathsf{DTIME}(f_2(n))$, allora $\mathsf{DTIME}(f_1(g(n))) \subseteq \mathsf{DTIME}(f_2(g(n)))$.
Sfruttando il teorema di traslazione si determini che relazione esiste tra le classi $\mathsf{DTIME}(2^n)$ e $\mathsf{DTIME}(n2^n)$.
Si può determinare il medesimo risultato usando solo il teorema di gerarchia in tempo? Giustificare la risposta.
Suggerimento: si considerino $g_1 = 2^n$ *e* $g_2 = 2^n + n$ *e si parta dall'ipotesi che* $\mathsf{DTIME}(n2^n) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^n)$.

Esercizio 39.4 (max 8 punti)**.**
Si consideri il problema del MINIMO RICOPRIMENTO DI VERTICI (D) limitato a grafi che non contengono triangoli. Si chiami il sottoproblema VCST(D). Si determini la sua complessità computazionale.
Suggerimento: si considerino gli ennagoni come gadget e si assuma pure, anche se semplifica un po', che eventuali triangoli siano disgiunti.

40 Appello del 26/02/2013

Esercizio 40.1 (max 7 punti)**.**
Si dia la definizione formale della classe di complessità PSPACE e si illustri le relazioni fondamentali con le classi NPSPACE e L.

Esercizio 40.2 (max 7 punti)**.**
Dare la definizione formale di algoritmo r-approssimante e illustrare un esempio di problema che ammette un algoritmo 2-approssimante.

Esercizio 40.3 (max 8 punti)**.**
Si consideri il problema di ottimizzazione LUNGHEZZA MASSIMO CAMMINO che richiede, dato un grafo non orientato e due suoi vertici x e y, determina la lunghezza del massimo cammino semplice che connette x a y. Si consideri poi la sua versione di decisione LUNGHEZZA MASSIMO CAMMINO(D).
Si dimostri che LUNGHEZZA MASSIMO CAMMINO può essere risolto in tempo polinomiale se e solo se LUNGHEZZA MASSIMO CAMMINO(D)$\in$ P.

Esercizio 40.4 (max 8 punti)**.**
Il problema di ISOMORFISMO DI SOTTOGRAFI.
Se ne dia la definizione e si dimostri la sua complessità computazionale.
Suggerimento: si consideri il problema della cricca.

41 Appello del 18/06/2013

Esercizio 41.1 (max 7 punti)**.**
Si dia la definizione formale della classe di complessità coNP e si illustrino le relazioni fondamentali con le classi P e NP.

Esercizio 41.2 (max 7 punti)**.**
Il prof. Max Hoax ha annunciato che la soglia di approssimazione per il problema del commesso viaggiatore è 1/3.
Quali conseguenze si avrebbero se tale risultato fosse confermato? Giustificare la risposta.

Esercizio 41.3 (max 8 punti)**.**
Date le seguenti classi di complessità:

$$\mathsf{EXP}_2 = \bigcup_{k>0} \mathsf{TIME}(2^{n^k})$$
$$\mathsf{EXP}_3 = \bigcup_{k>0} \mathsf{TIME}(3^{n^k})$$

si determini, dimostrandola formalmente, la relazione esistente tra le due classi.

Esercizio 41.4 (max 8 punti)**.**
Dato un grafo G e un intero k, il problema del *ricoprimento di cricca* chiede di determinare se esistono k cricche in G tali che ogni vertice di G sia in almeno una cricca.
Dimostrare che il problema è NP-completo.
Suggerimento: si consideri il problema della k-colorabilità.

42 Appello del 16/07/2013

Esercizio 42.1 (max 7 punti)**.**
Si dia la definizione formale della classe di complessità APX e si illustrino le relazioni fondamentali con le classi NPO e PTAS.

Esercizio 42.2 (max 7 punti)**.**
Si enunci la Tesi di Church-Turing forte e si indichino quali sono le due implicazioni fondamentali.

Esercizio 42.3 (max 8 punti)**.**
Date le seguenti classi di complessità:

$$\mathsf{EXP}_2 = \bigcup_{k>0} \mathsf{TIME}(2^{n^k})$$
$$\mathsf{EXP}_3 = \bigcup_{k>0} \mathsf{TIME}(3^{n^k})$$

si determini, dimostrandola formalmente, la relazione esistente tra le due classi.

Esercizio 42.4 (max 8 punti)**.**
Si determini la complessità computazionale del seguente problema, detto "Problema delle Stazioni":
"Dato un grafo pesato G (dove i pesi sono interi), e due interi f e g , esiste un modo per contrassegnare f vertici come 'stazioni di servizio' in modo tale ogni altro vertice sia distante al più g da una stazione di servizio?"
Suggerimento: si consideri il problema 3-SODDISFACIBILITÀ.

43 Appello del 10/09/2013

Esercizio 43.1 (max 7 punti)**.**
Date le seguenti classi di complessità $\mathsf{EXP}_2 = \bigcup_{k>0} \mathsf{TIME}(2^{n^k})$ e $\mathsf{EXP}_3 = \bigcup_{k>0} \mathsf{TIME}(3^{n^k})$ si determini, dimostrandola formalmente, la relazione esistente tra le due classi.

Esercizio 43.2 (max 7 punti)**.**
Un quotidiano ha recentemente pubblicato un articolo in cui si afferma che la soglia di approssimazione per il problema del commesso viaggiatore è 1/3.
Che conseguenze si avrebbero se tale risultato fosse confermato? Giustificare la risposta.
Esistono dei sotto casi per i quali tale risultato è già stato dimostrato?

Esercizio 43.3 (max 8 punti).
Dimostrare che se un linguaggio L è PSPACE-difficile (un linguaggio L è PSPACE-difficile se $\forall L' \in \mathsf{PSPACE}$, $L' \leq_m^p L$), è anche NP-difficile.
Dimostrare, quindi, che se ogni linguaggio NP-difficile è anche PSPACE-difficile, allora $\mathsf{NP} = \mathsf{PSPACE}$.

Esercizio 43.4 (max 8 punti).
Dimostrare che il linguaggio HALF-CLIQUE= $\{\langle G\rangle \mid G$ ha un cricca di ordine $|G|/2\}$ è NP-completo.
Suggerimento: considerare il problema CLIQUE nella sua versione di decisione, ovvero il parametro D, e costruire un'istanza H di HALF-CLIQUE in modo che possa contenere una cricca di ordine $|H|/2$ se e solo se l'istanza originale ne contiene una di ordine D.

44 Appello del 24/09/2013

Esercizio 44.1 (max 7 punti).
Si dia la definizione formale della classe di complessità EXP e si dimostri la relazione esistente tra EXP e la classe PSPACE.

Esercizio 44.2 (max 7 punti).
Si dia la definizione formale di classe NPO e si dimostri la relazione esistente con la classe NP.

Esercizio 44.3 (max 8 punti).
Si dimostri in modo esplicito che 2-COLORABILITÀ è in P.

Esercizio 44.4 (max 8 punti).
In un grafo diretto $G = (V, E)$, un sottoinsieme di vertici $W \subseteq V$ è detto di *riscontro* (Feedback Vertex Set) se ogni ciclo diretto di G contiene almeno un vertice di W.

PROBLEMA INSIEME DI RISCONTRO(D) (FEEDBACK VERTEX SET)

DESCRIZIONE: un grafo diretto $G = (V, E)$ di dimensione finita e un intero positivo D.

QUESITO: G contiene un insieme di riscontro di ordine D?

Dimostrare che Insieme di Riscontro(D) è NP-completo.
Suggerimento: se si cambia un grafo non diretto G in diretto G' rimpiazzando ciascun arco non orientato con una coppia di archi orientati, qual è la relazione tra un ricoprimento di vertici di G e un insieme di riscontro in G'?

45 Appello del 12/02/2014

Esercizio 45.1 (max 7 punti).
Si enunci il teorema dell'accelerazione lineare e si illustri sinteticamente la conseguenza principale di tale teorema nello studio della complessità computazionale.

Esercizio 45.2 (max 7 punti).
RAGGIUNGIBILITÀ $\in$ NL. Se si vogliono considerare solo computazioni deterministiche, come varia la complessità computazionale del problema rispetto alla risorsa tempo?
Nel novembre 2004, Omer Reingol ha dimostrato che RAGGIUNGIBILITÀ può essere risolto in spazio $O(\log n)$ quando il grafo non è diretto. Perché questo risultato non permette di affermare che RAGGIUNGIBILITÀ $\in$ L?

Esercizio 45.3 (max 8 punti).
Si determini cosa è errato nel seguente ragionamento:

> Si consideri il problema A e il suo miglior algoritmo risolutore noto $\mathcal{A}$. Il tempo di computazione di $\mathcal{A}$ è pari a 2^n, dove n è la dimensione dell'istanza. Quindi non è possibile affermare che $A \in \mathsf{P}$. Se si considera una codifica unaria delle istanze, a maggior ragione non si può affermare $A \in \mathsf{P}$. Quindi non è vero che la notazione unaria non può essere usata per classificare i problemi quando si esegue l'analisi del caso peggiore.

Esercizio 45.4 (max 8 punti).
Si dimostri che il problema MINIMO RICOPRIMENTO DI VERTICI(D) è NP-completo esibendo una riduzione diretta dal problema 3-SODDISFACIBILITÀ.