

Alberi Binari di Ricerca Binary Search Trees

Damiano Macedonio
Università Ca' Foscari di Venezia

mace@unive.it

Original work Copyright © Alberto Montresor, University of Trento
(<http://www.dit.unitn.it/~montreso/asd/index.shtml>)

Modifications Copyright © 2009, 2010, Moreno Marzolla, Università di Bologna
(<http://www.moreno.marzolla.name/teaching/ASD2010/>)

Modifications Copyright © 2012, 2014 Damiano Macedonio, Università Ca' Foscari di Venezia

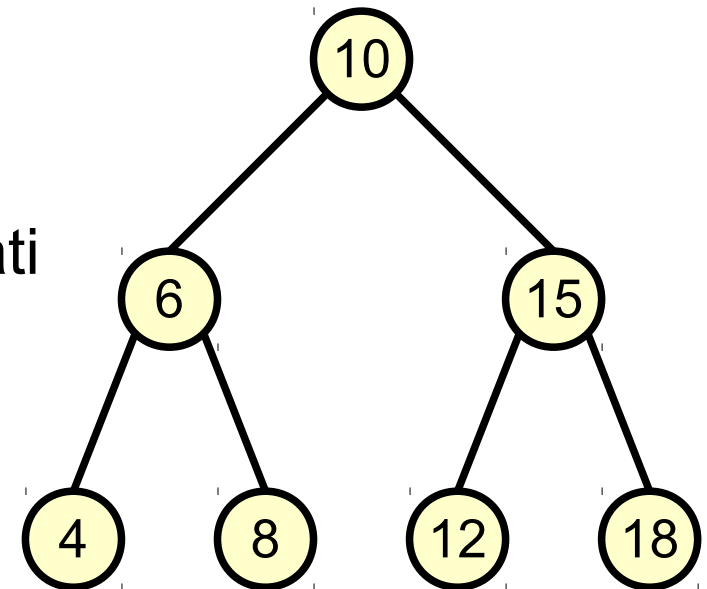
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/> or send a letter to Creative Commons, 543 Howard Street, 5th Floor, San Francisco, California, 94105, USA.

Dizionari

- Dizionario
 - Insieme dinamico che implementa le funzionalità
 - Item search(Key key)
 - void insert(Key key, Item item)
 - void delete(Key key)
- Struttura dati fondamentale dalle infinite applicazioni
 - Esempio: individuare un record in un database conoscendo la chiave di ricerca
- Esempi di implementazione
 - Array ordinato
 - Ricerca $O(\log n)$, inserimento/cancellazione $O(n)$
 - Lista non ordinata
 - Ricerca/cancellazione $O(n)$, inserimento $O(1)$

Alberi binari di ricerca (ABR)

- Idea
 - Portare l'idea di ricerca binaria in un albero
- Definizione
 1. Ogni nodo v contiene un insieme di dati $v.data$ associati ad una chiave $v.key$ presa da un dominio totalmente ordinato (ci possono essere duplicati delle chiavi)
 2. Le chiavi dei nodi del sottoalbero sinistro di v sono $\leq v.key$
 3. Le chiavi dei nodi del sottoalbero destro di v sono $\geq v.key$



Alberi binari di ricerca (ABR)

- Proprietà di ricerca
 - Le proprietà 2. e 3. permettono di realizzare un algoritmo di ricerca dicotomica
- **Domanda:** Proprietà di ordine
 - Come devo visitare l'albero per ottenere la lista ordinata dei valori?
- Dettagli implementativi
 - Ogni nodo deve mantenere
 - Figlio sinistro, destro
 - Padre
 - Chiave
 - Dati satelliti

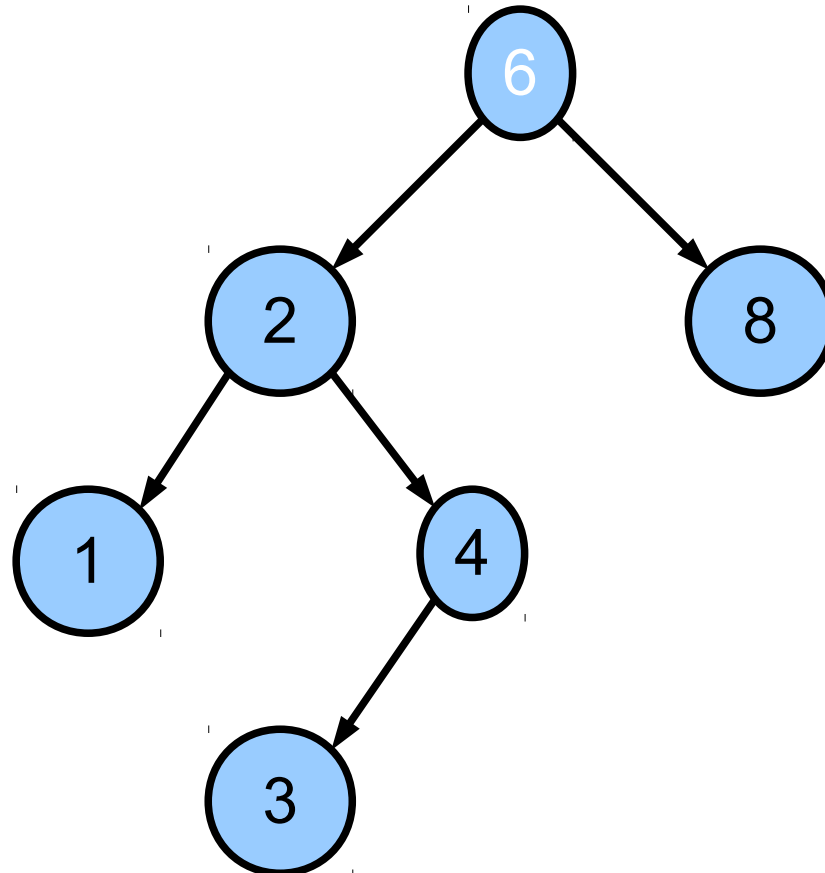


Interfaccia Dizionario

```
public interface Dizionario {  
    /**  
     * Aggiunge al dizionario la coppia (e,k)  
     */  
    public Rif insert(Object e, Comparable k);  
  
    /**  
     * Rimuove dal dizionario l'elemento u  
     */  
    public void delete(Rif u);  
  
    /**  
     * Restituisce l'elemento <code>e</code> con chiave k.  
     * In caso di duplicati, l'elemento restituito  
     * e' scelto arbitrariamente tra quelli con chiave k.  
     */  
    public Object search(Comparable k);  
}
```

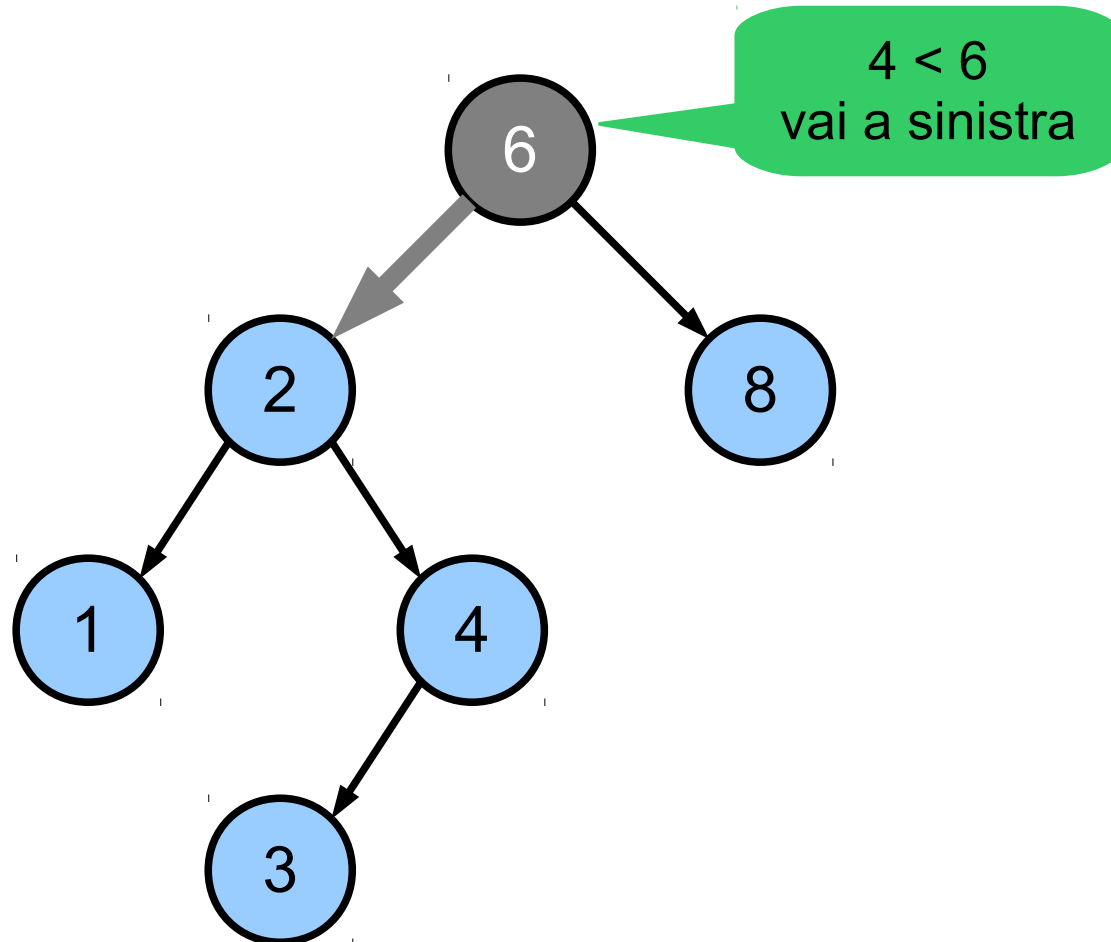
Esempio

ricerca del valore 4



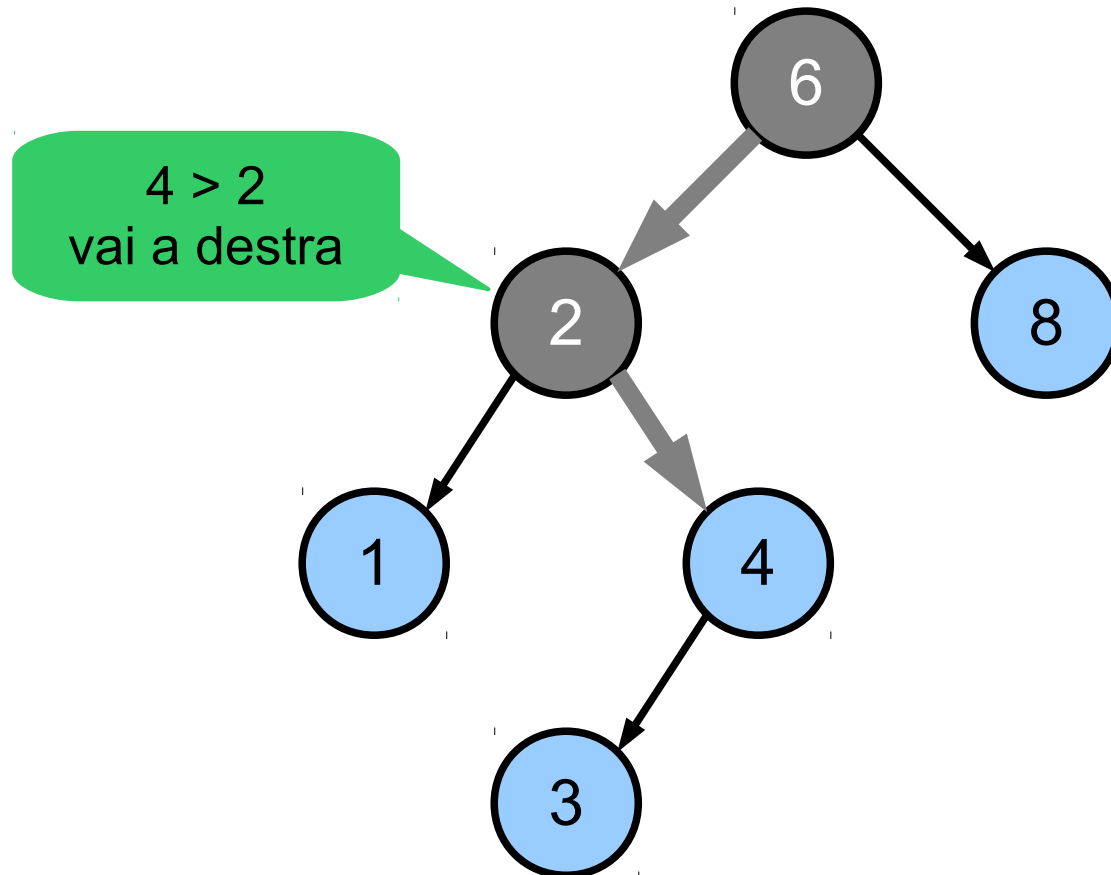
Esempio

ricerca del valore 4



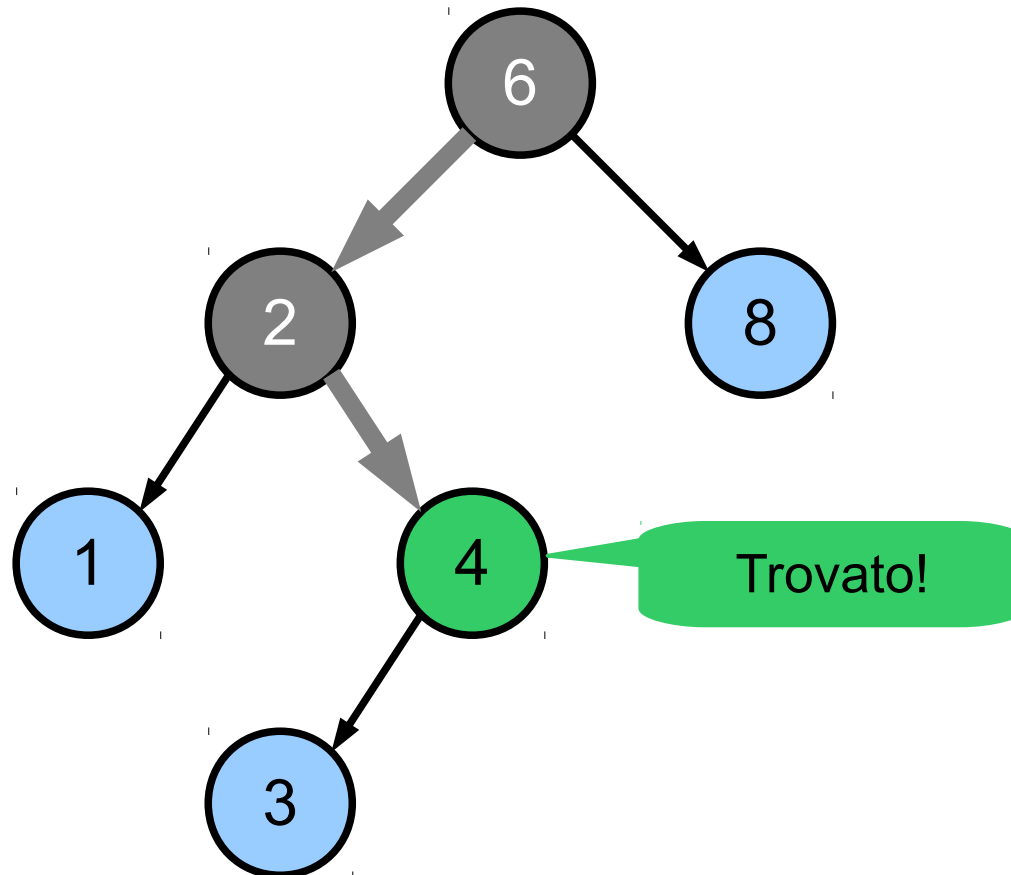
Esempio

ricerca del valore 4



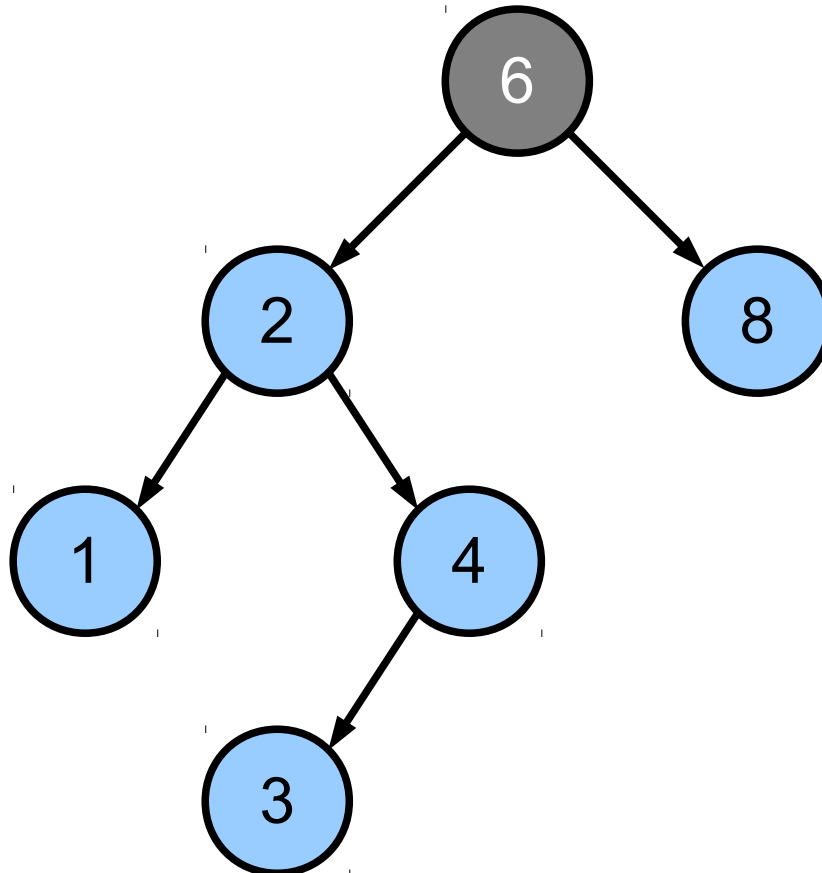
Esempio

ricerca del valore 4



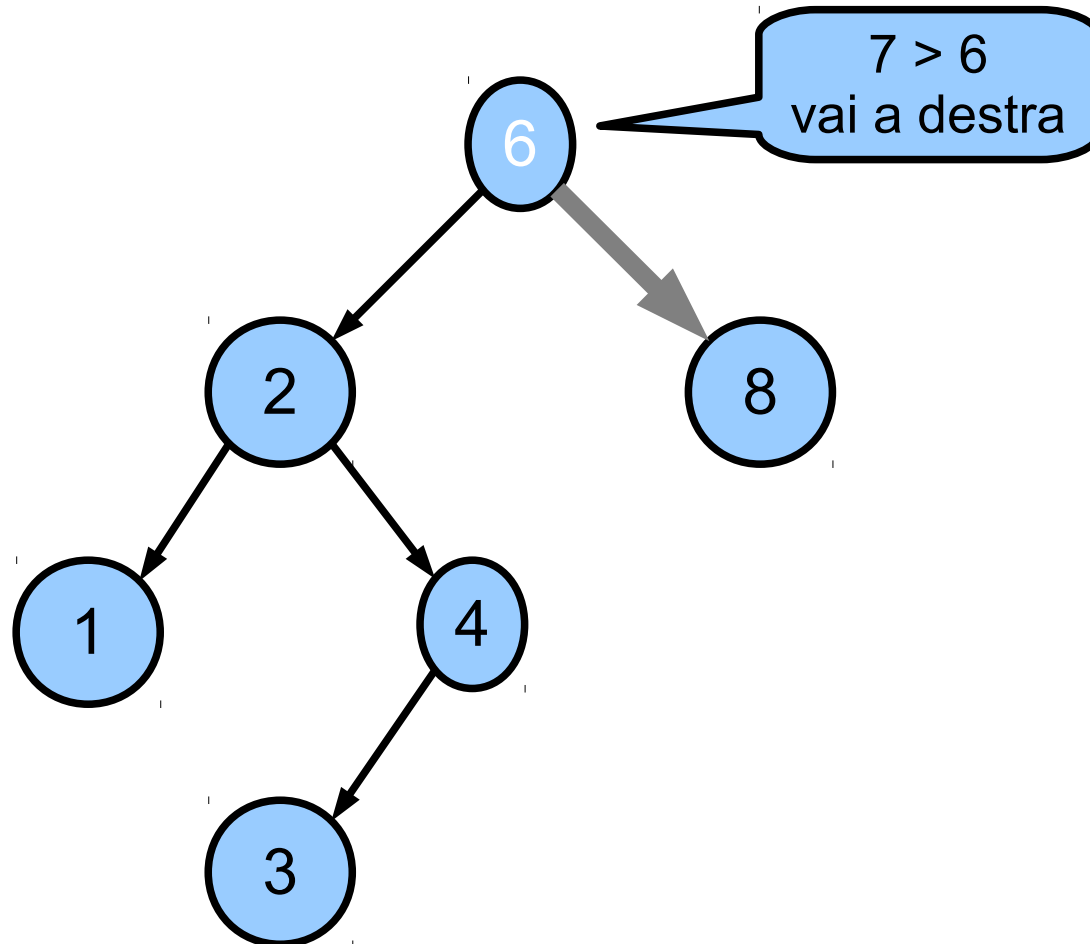
Altro esempio

ricerca del valore 7



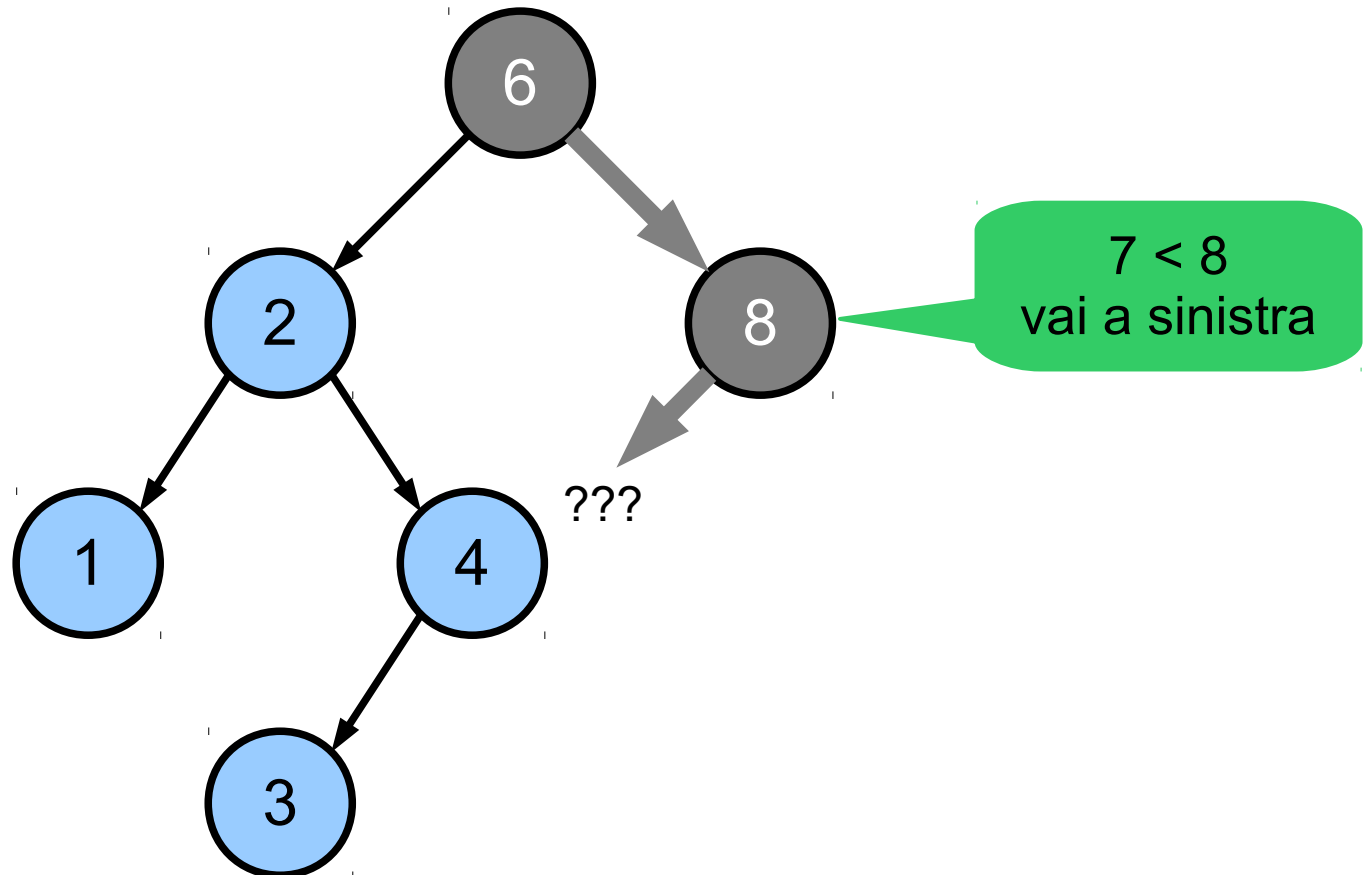
Altro esempio

ricerca del valore 7



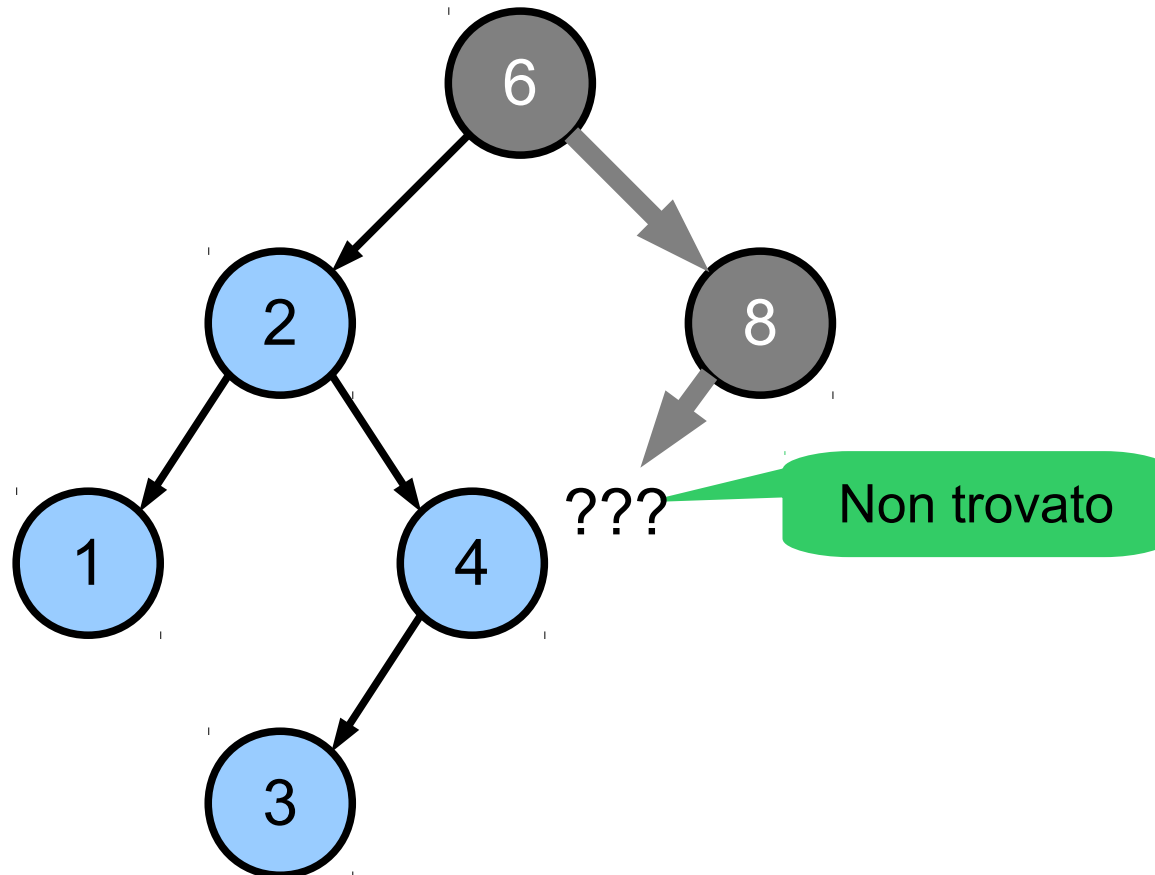
Altro esempio

ricerca del valore 7



Altro esempio

ricerca del valore 7



Ricerca: pseudocodice

```
algorithm search(Nodo T, Key k) → Nodo
  if (T == null || k == T.key) then
    return T;
  elseif (k < T.key) then
    return search(T.left, k)
  else
    return search(T.right, k)
  endif
```

Versione
ricorsiva

Versione
iterativa

```
algorithm search(Nodo T, Key k) → Nodo
  while (T ≠ null) do
    if (k == T.key) then
      return T;
    elseif (k < T.key) then
      T := T.left;
    else
      T := T.right;
    endif
  endwhile
  return null
```

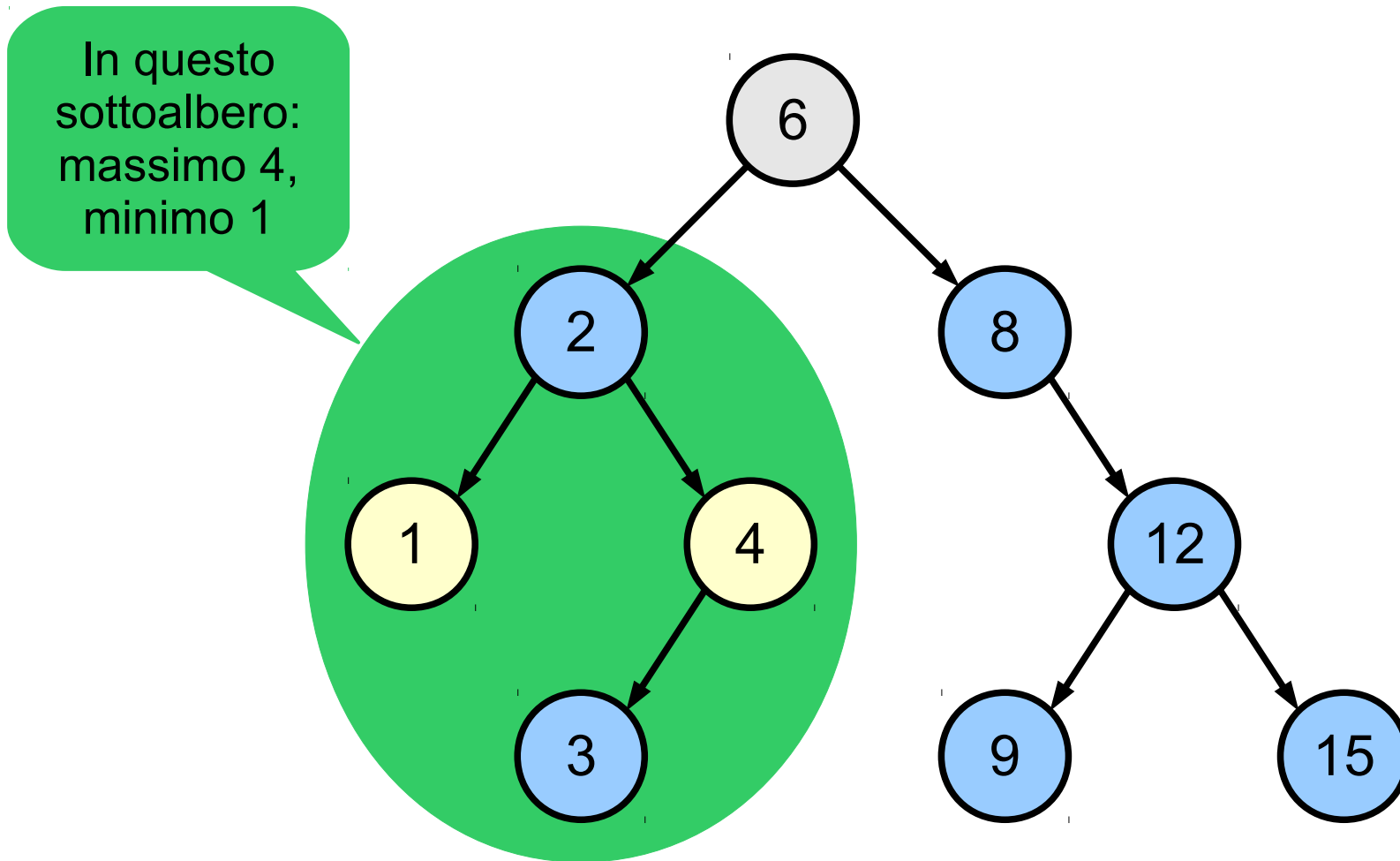
Classe AlberoBR

```
public class AlberoBR implements Dizionario {  
  
    protected class InfoBR implements Rif {  
        protected Object elem;  
        protected Comparable chiave;  
        protected Nodo nodo;  
        protected InfoBR(Object e, Comparable k){  
            elem = e; chiave = k; nodo = null;  
        }  
    }  
  
    // Struttura dati "Albero Binario" in cui  
    // sono memorizzate le informazioni  
    protected AlberoBin alb;  
  
    public AlberoBR() { ... }  
  
    // altre operazioni ...  
}
```

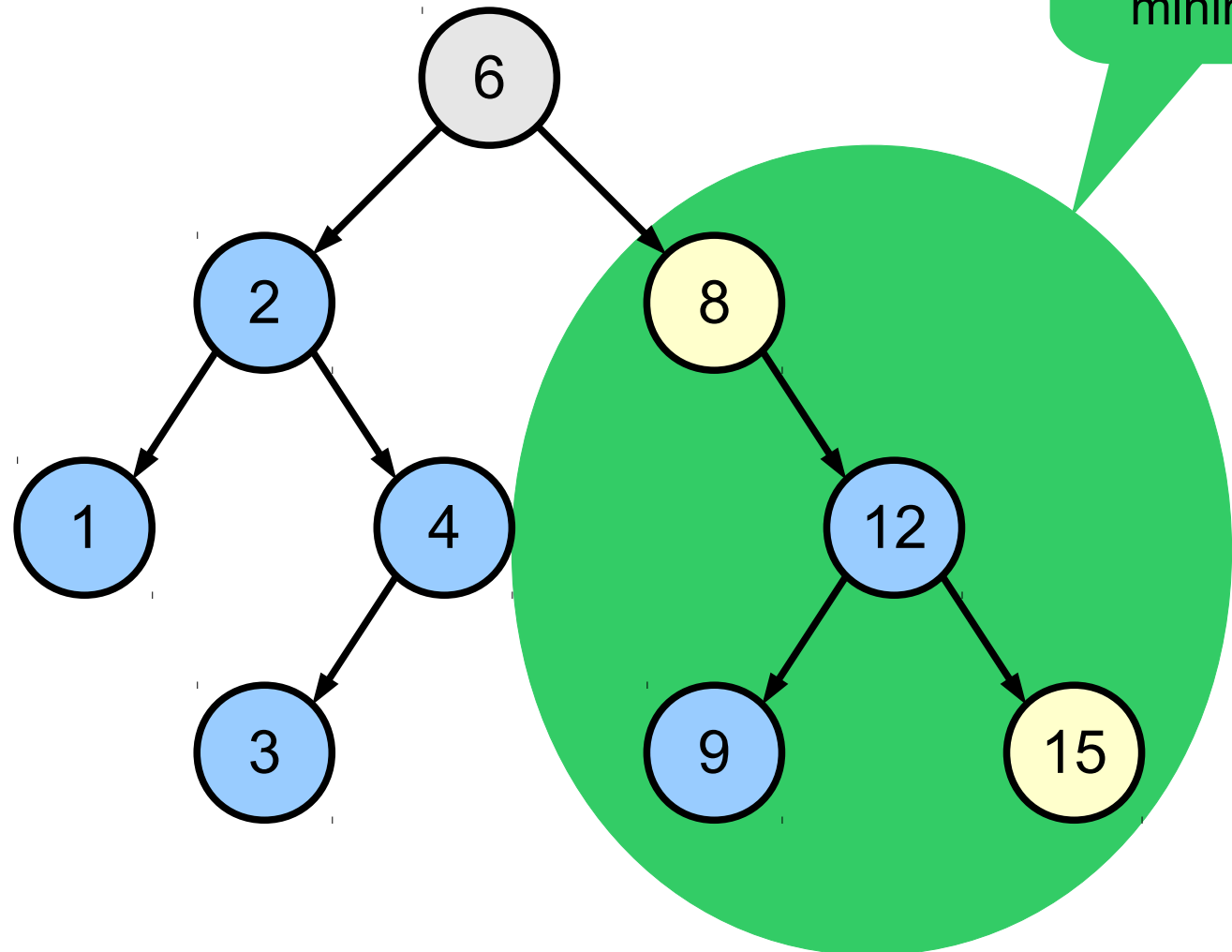

Ricerca: implementazione Java (versione iterativa)

```
public Object search(Comparable k) {
    Nodo v = alb.radice();
    while (v != null) {
        InfoBR i = (InfoBR)alb.info(v);
        if (k.equals(i.chiave))
            return i.elem;
        if (k.compareTo(i.chiave) < 0)
            v = alb.sin(v);
        else
            v = alb.des(v);
    }
    return null;
}
```

Minimo e Massimo



Minimo e Massimo



Ricerca del massimo

- Dato un nodo v :
 - Il valore **massimo** contenuto nell'albero con radice v è quello del nodo “più a destra”
 - Il valore **minimo** contenuto nell'albero con radice v è quello del nodo “più a sinistra”

```
protected Nodo max(Nodo v) {  
    while (v != null &&  
           alb.des(v) != null) {  
        v = alb.des(v);  
    }  
    return v;  
}
```

```
protected Nodo min(Nodo v) {  
    while (v != null &&  
           alb.sin(v) != null) {  
        v = alb.sin(v);  
    }  
    return v;  
}
```

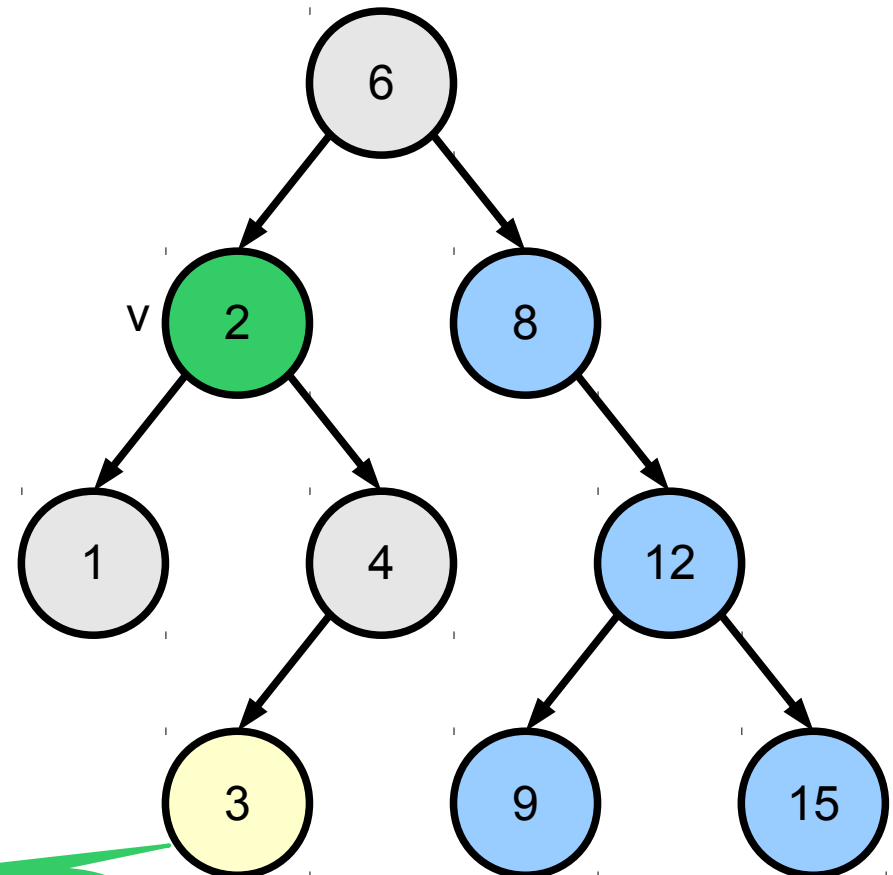
Ricerca del successore

- Definizione

- Il successore di un nodo v è il nodo contenente il più piccolo valore maggiore di v

- Due casi

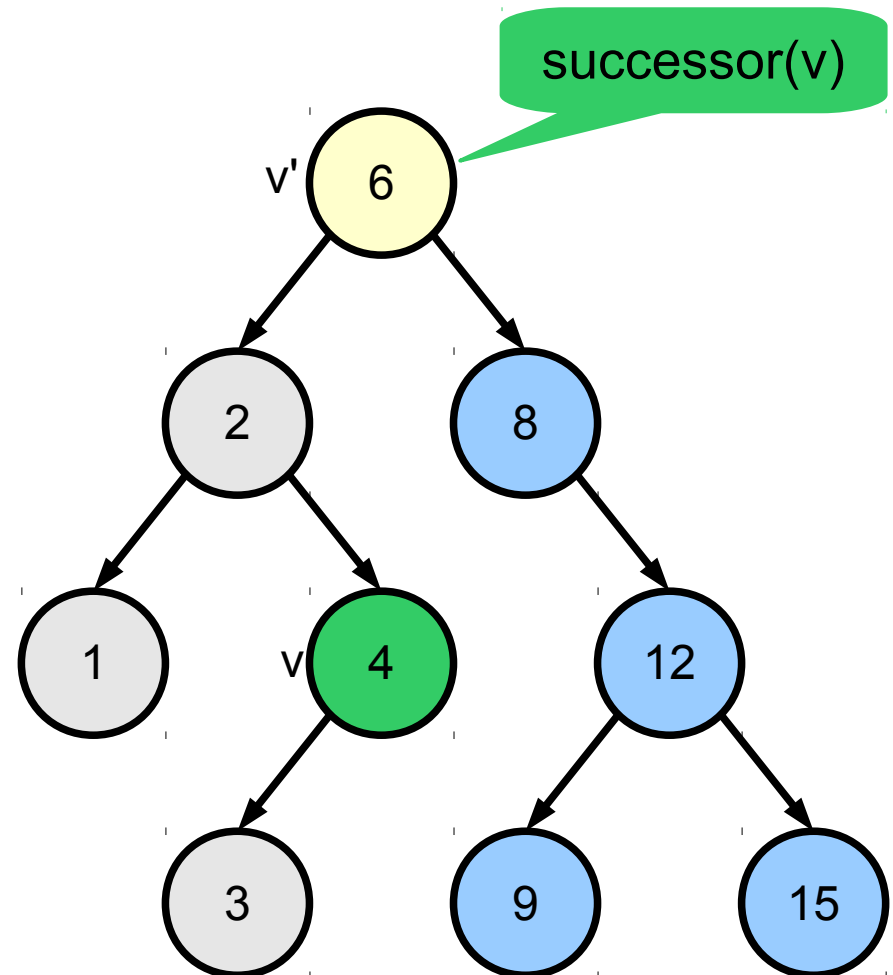
- v ha un figlio destro
- Il successore è il minimo del sottoalbero destro di v
- Esempio:
successore di 2 è 3



successor(v)

Ricerca del successore

- Definizione
 - Il successore di un nodo v è il nodo contenente il più piccolo valore maggiore di v
- Due casi
 - v non ha un figlio destro
 - Il successore è il primo antenato v' tale che v stia nel sottoalbero sinistro di v'
 - Esempio:
successore di 4 è 6

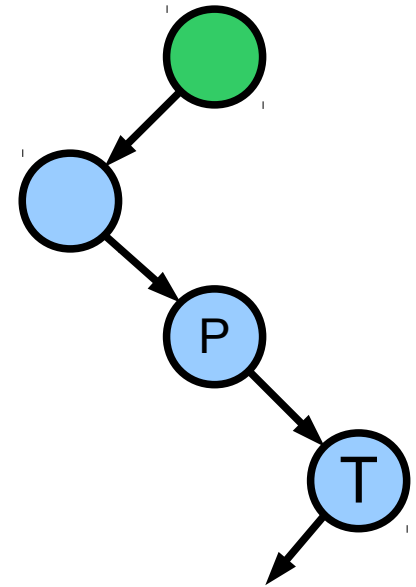


Ricerca del successore Pseudo-codice (iterativo)

Caso 1: c'è
un figlio
destro

Caso 2: non
c'è un figlio
destro

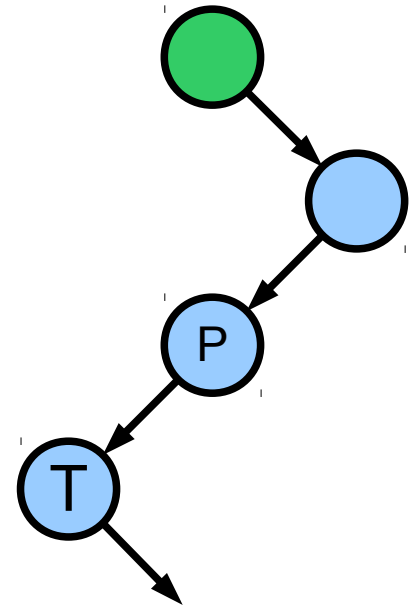
```
algorithm ABR successor(ABR T)
  if (T == null) then
    return null;
  endif
  if (T.right ≠ null) then
    return min(T.right);
  else
    P := T.parent
    while (P ≠ null && T == P.right) do
      T := P;
      P := P.parent;
    endwhile
    return P;
  endif
```



Ricerca del predecessore

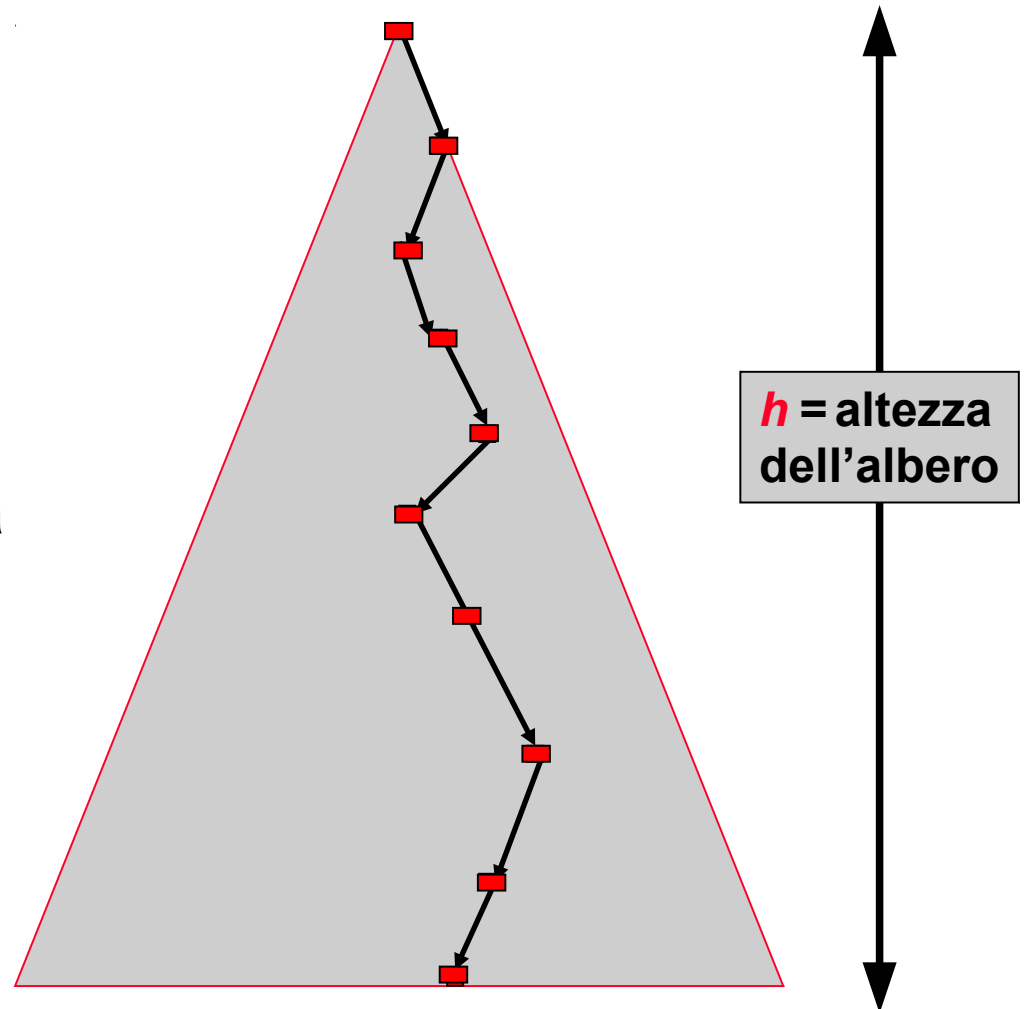
Pseudo-codice (iterativo)

```
algorithm ABR predecessor (ABR T)
  if (T == null) then
    return null;
  endif
  if (T.left ≠ null) then
    return max(T.left);
  else
    P := T.parent;
    while (P ≠ null && T == P.left) do
      T := P;
      P := P.parent;
    endwhile
    return P;
  endif
```



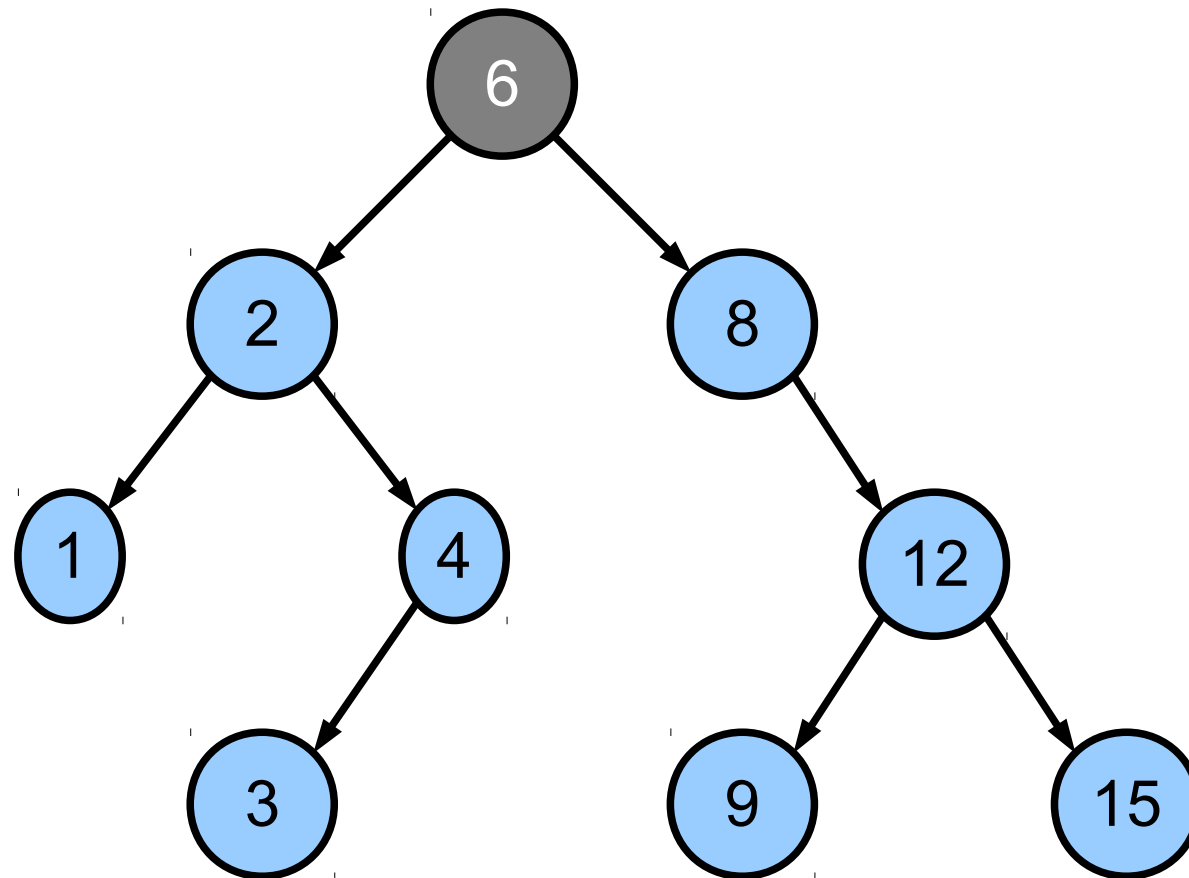
Ricerca: costo computazionale

- In generale
 - Le operazioni di ricerca sono confinate ai nodi posizionati lungo un singolo percorso (path) dalla radice ad una foglia
 - Tempo di ricerca: $O(h)$
- **Domanda**
 - Qual è il caso pessimo?
- **Domanda**
 - Qual è il caso ottimo?



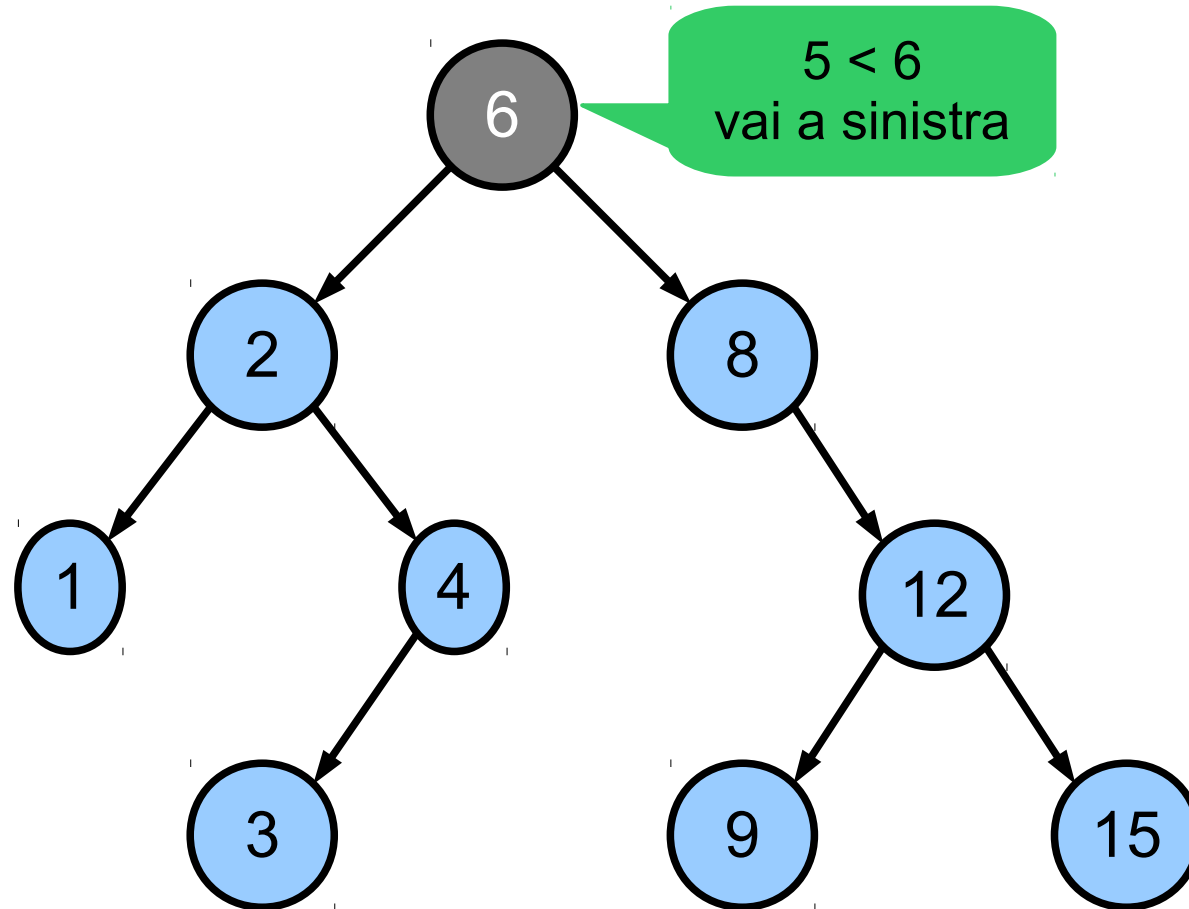
Inserimento

Inseriamo il valore 5



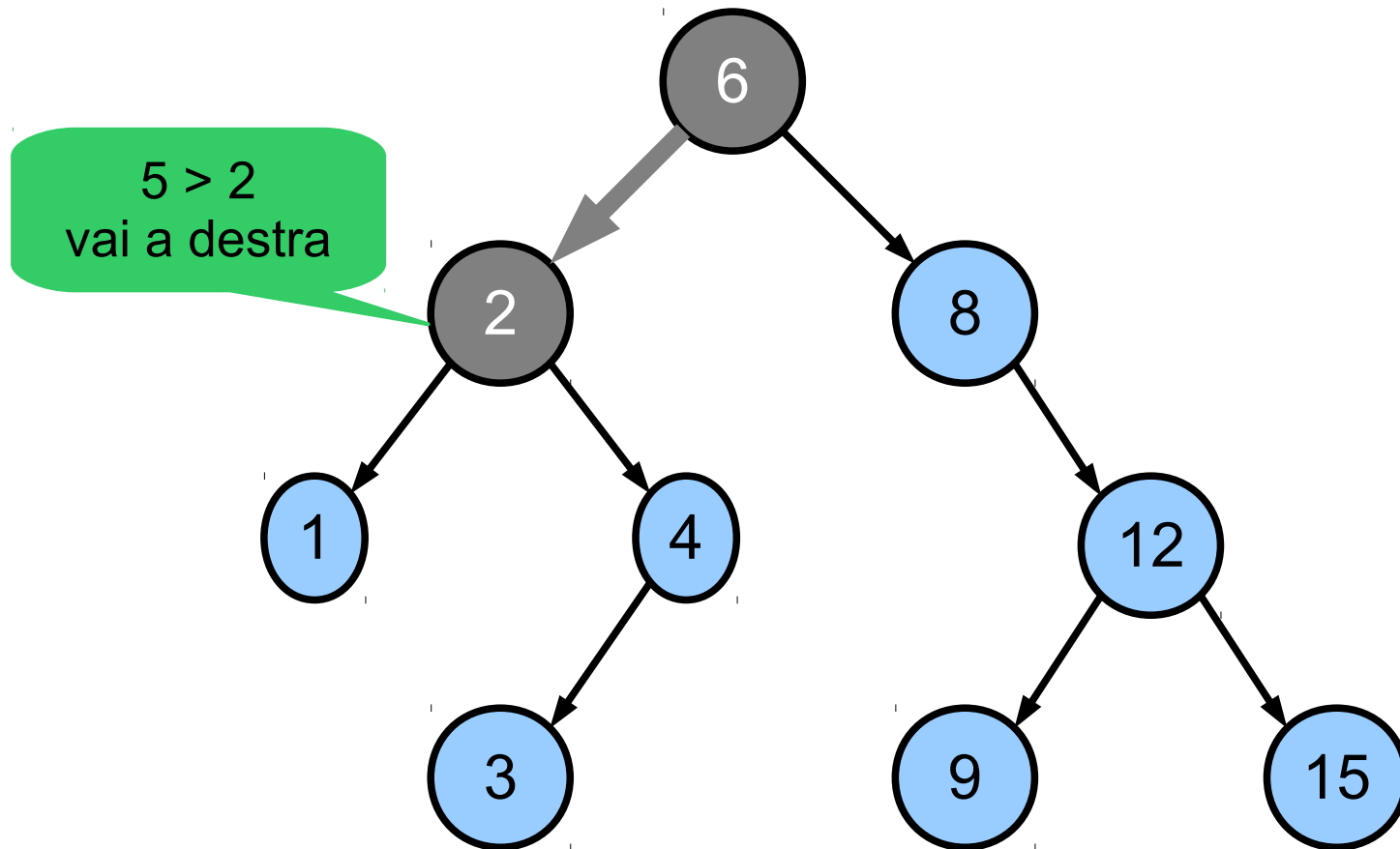
Inserimento

Inseriamo il valore 5



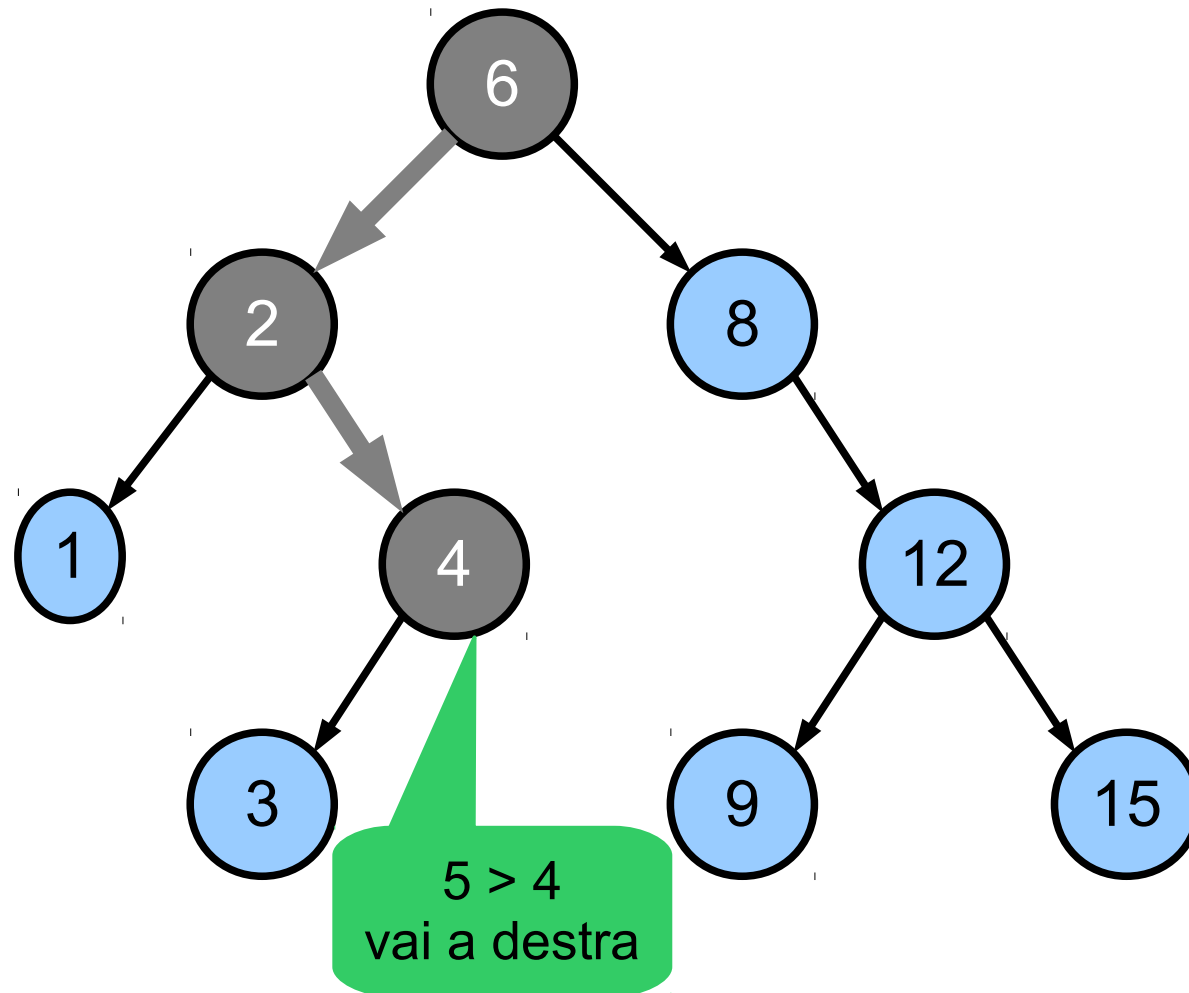
Inserimento

Inseriamo il valore 5



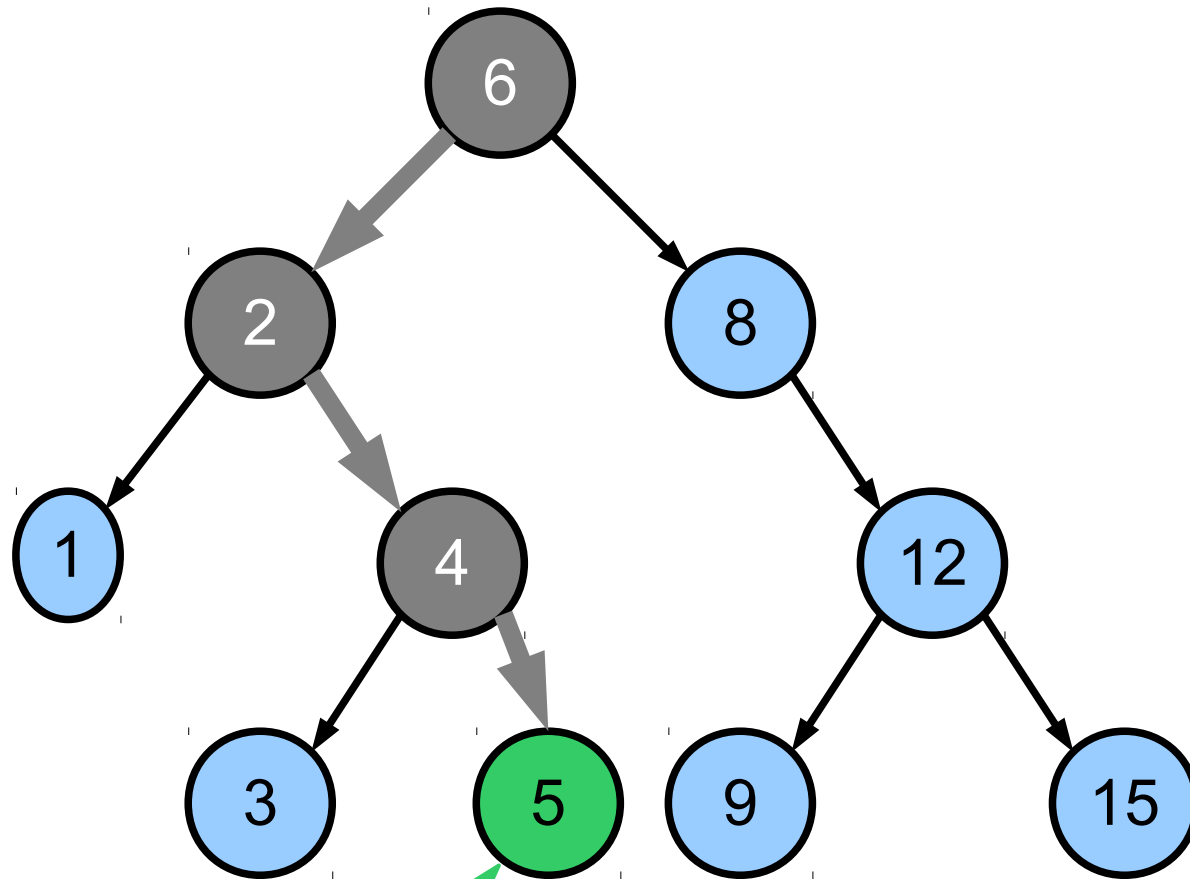
Inserimento

Inseriamo il valore 5



Inserimento

Inseriamo il valore 5



Inserimento
effettivo

Inserimento: pseudo-codice (iterativo)

Algorithm ABR_insert (ABR T, Key k, Data d)

P := nil

```
while (T != null) do  
  P := T  
  if T.key > key then  
    T := T.left  
  else  
    T := T.right  
  endif  
endwhile
```

Ricerca posizione
nuovo nodo

N := new ABR(k,d)

N.parent := P

```
if (P == null) then  
  return N;
```

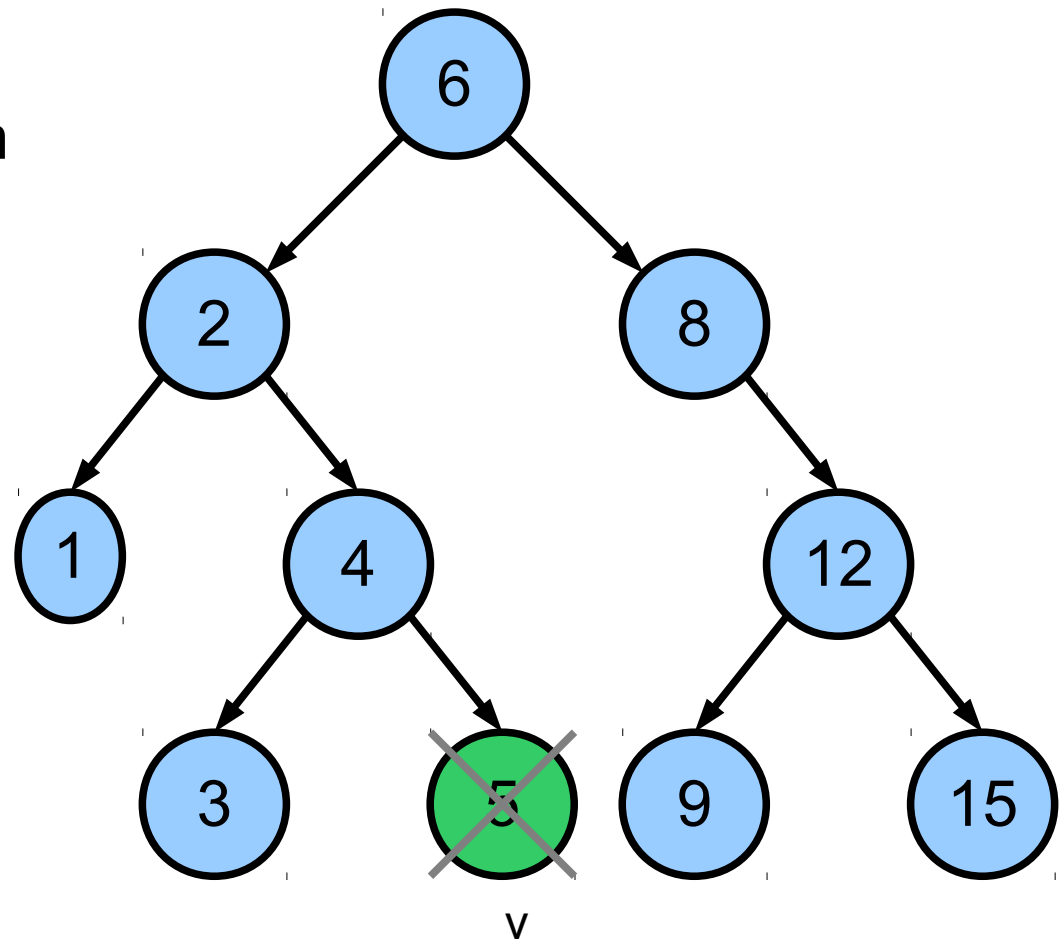
Caso base
(inserimento su albero
vuoto)

```
if (k < P.key) then  
  P.left := N  
else  
  P.right := N
```

Caso generale

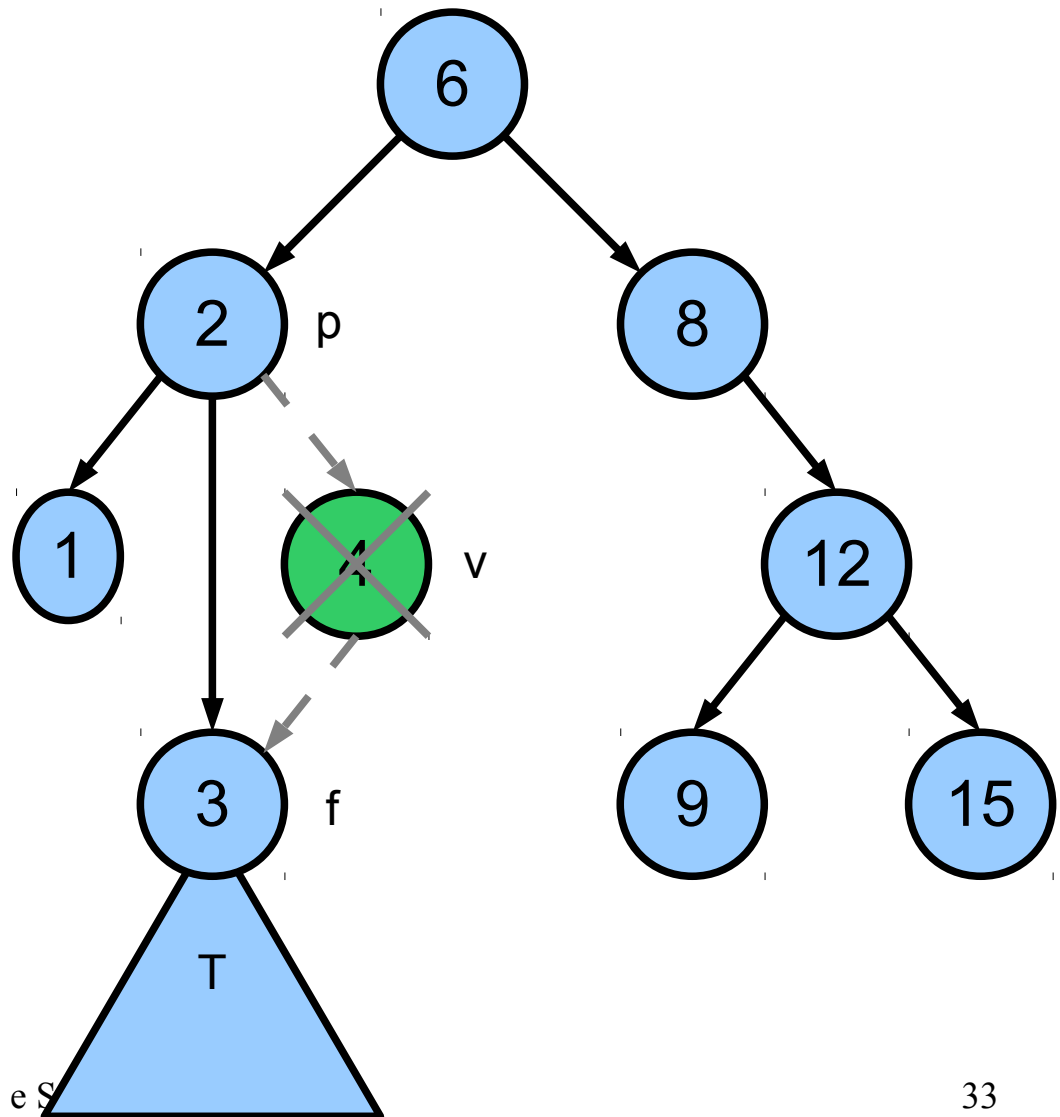
Cancellazione

- Caso 1
 - Il nodo v da eliminare non ha figli
 - Semplicemente si elimina
- Correttezza
 - Eliminare una foglia non altera la proprietà di ordine degli altri nodi



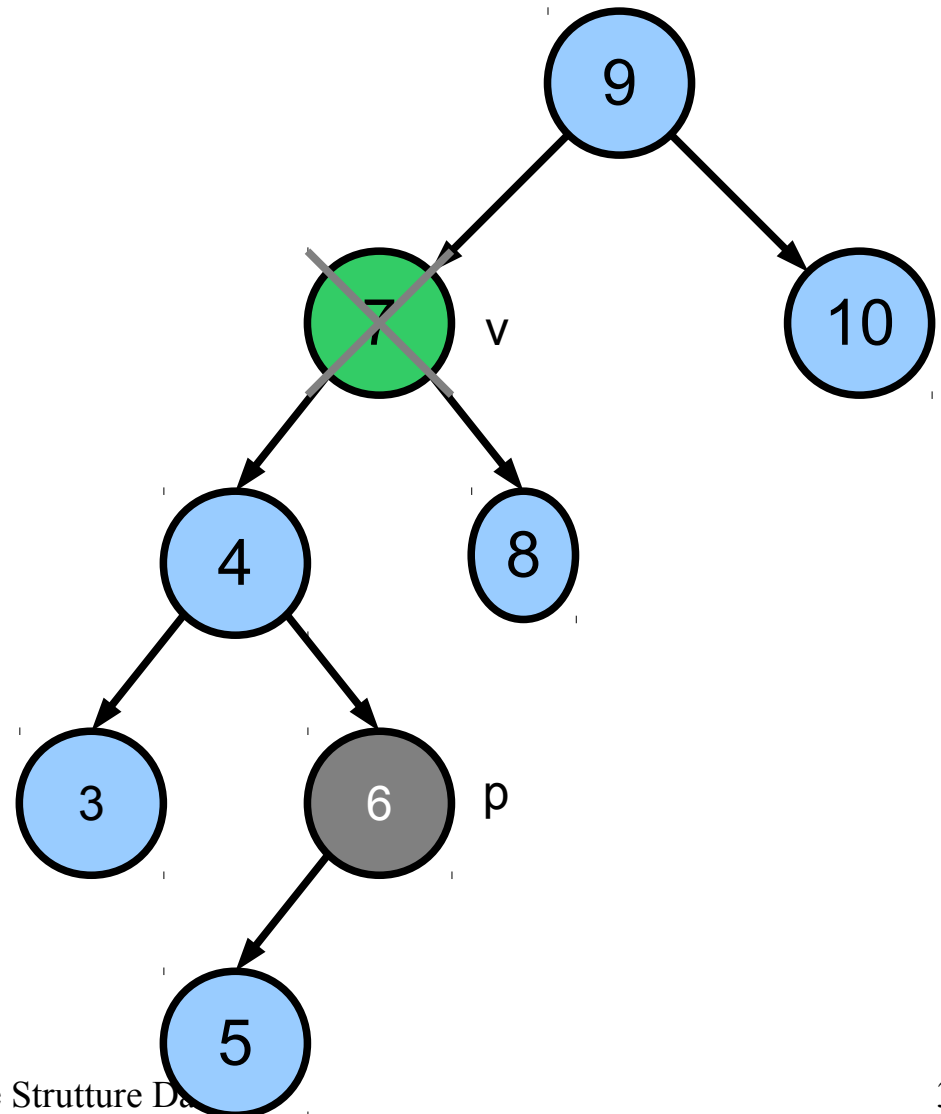
Cancellazione

- Caso 2
 - Il nodo v da eliminare ha un unico figlio f
 - Si elimina v
 - Si attacca f all'ex-padre p di v in sostituzione di v
- Correttezza
 - Per la proprietà di ordine, tutti i valori nelle chiavi in T sono $\geq p$



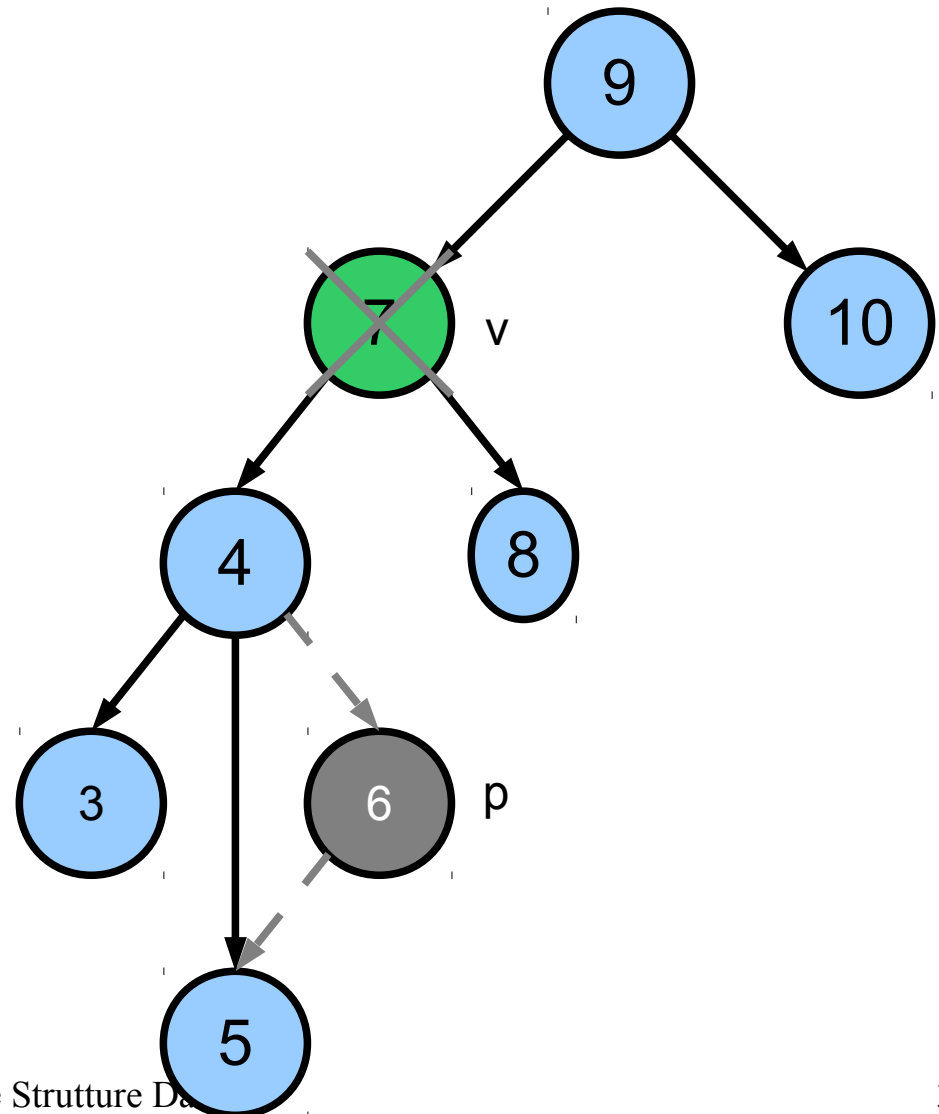
Cancellazione

- Caso 3
 - Il nodo v da eliminare ha due figli
 - Si individua il predecessore p di v
 - Il predecessore non ha figlio destro
 - Perché?



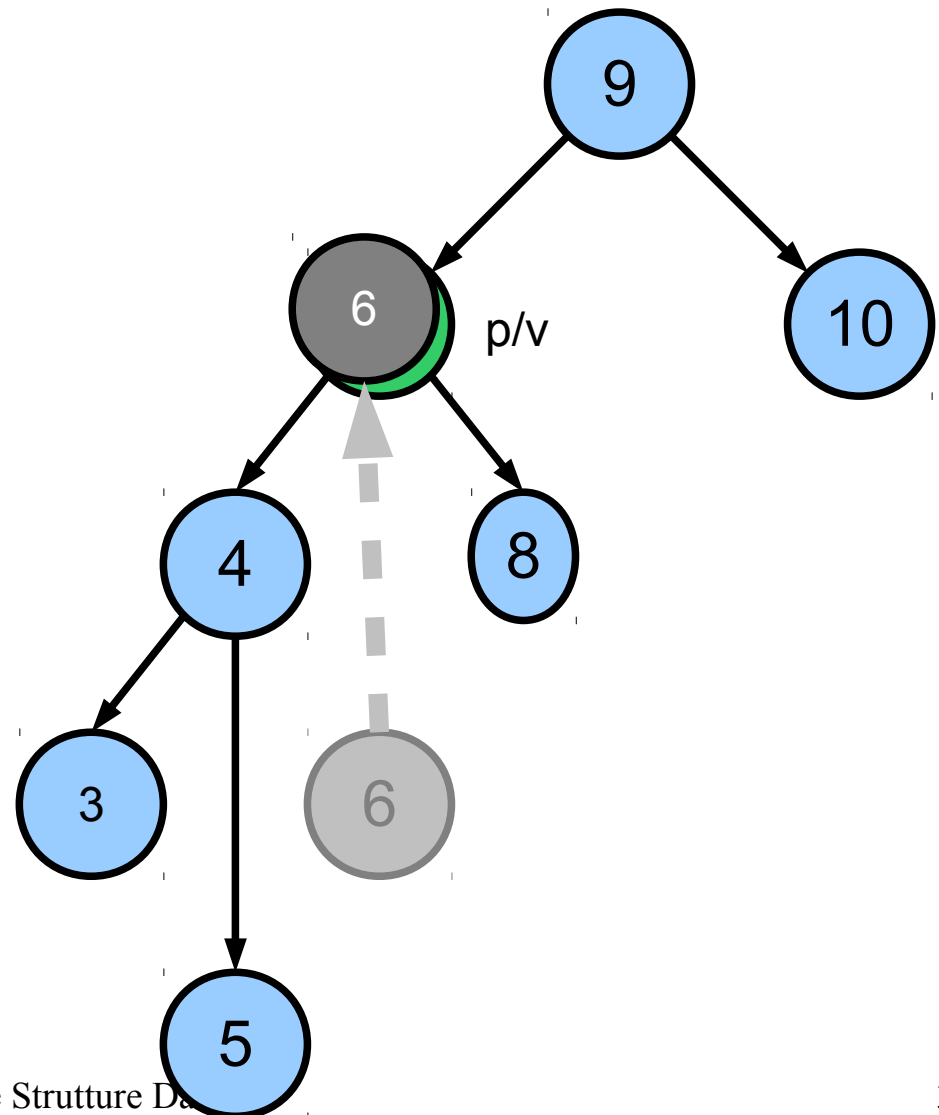
Cancellazione

- Caso 3
 - Il nodo v da eliminare ha due figli
 - Si individua il predecessore p di v
 - Il predecessore non ha figlio destro
 - Si “stacca” il predecessore
 - Si attacca l'eventuale figlio sinistro di p al padre di p



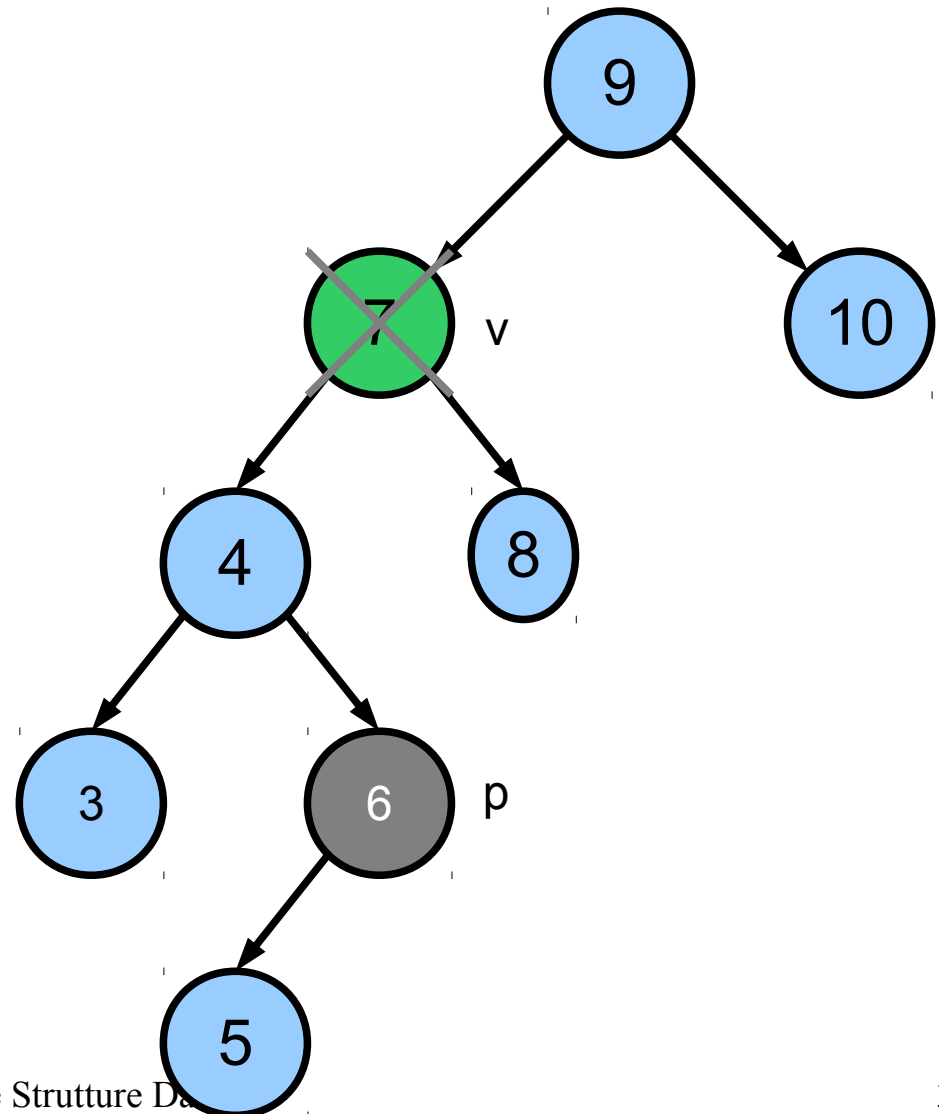
Cancellazione

- Caso 3
 - Il nodo v da eliminare ha due figli
 - Si individua il predecessore p di v
 - Il predecessore non ha figlio destro
 - Si “stacca” il predecessore
 - Si attacca l'eventuale figlio sinistro di p al padre di p
 - Si copia p su v



Cancellazione

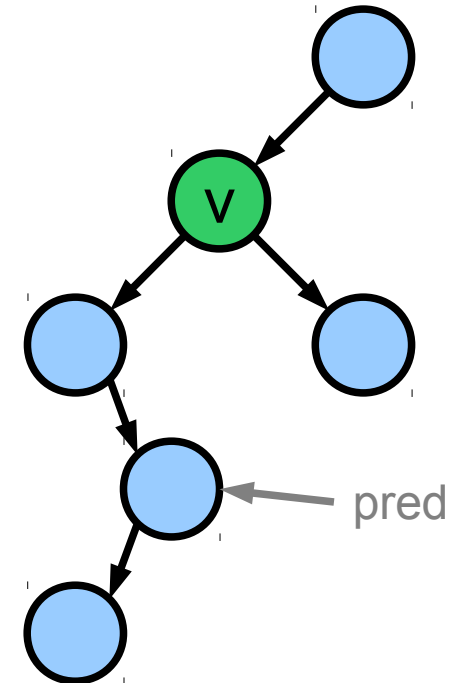
- Caso 3 (correttezza)
- Il predecessore p di v
 - è sicuramente \geq di tutti i nodi del sottoalbero sinistro di v
 - è sicuramente \leq di tutti i nodi del sottoalbero destro di v
- Quindi può essere sostituito a v



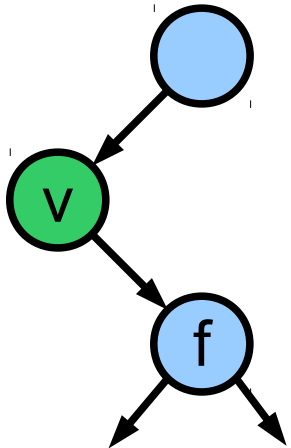
Implementazione Java

```
protected Nodo delete(InfoBR i) {  
    Nodo v = i.nodo;  
    if (alb.grado(v) == 2) {  
        Nodo pred = max(alb.sin(v));  
        scambiaInfo(v, pred);  
        v = pred;  
    }  
    Nodo p = alb.padre(v);  
    contraiNodo(v);  
    return p;  
}
```

Elimina il nodo v
(che può avere
al più un figlio)



Implementazione Java



```
protected void contraiNodo(Nodo v) {  
    Nodo f = null ;  
    if (alb.sin(v) != null)  
        f = alb.sin(v);  
    else  
        if (alb.des(v) != null)  
            f = alb.des(v);  
    if (f == null)  
        alb.pota(v);  
    else {  
        scambiaInfo(v, f);  
        AlberoBin a = alb.pota(f);  
        alb.innestaSin(v, a.pota(a.sin(f)));  
        alb.innestaDes(v, a.pota(a.des(f)));  
    }  
}
```

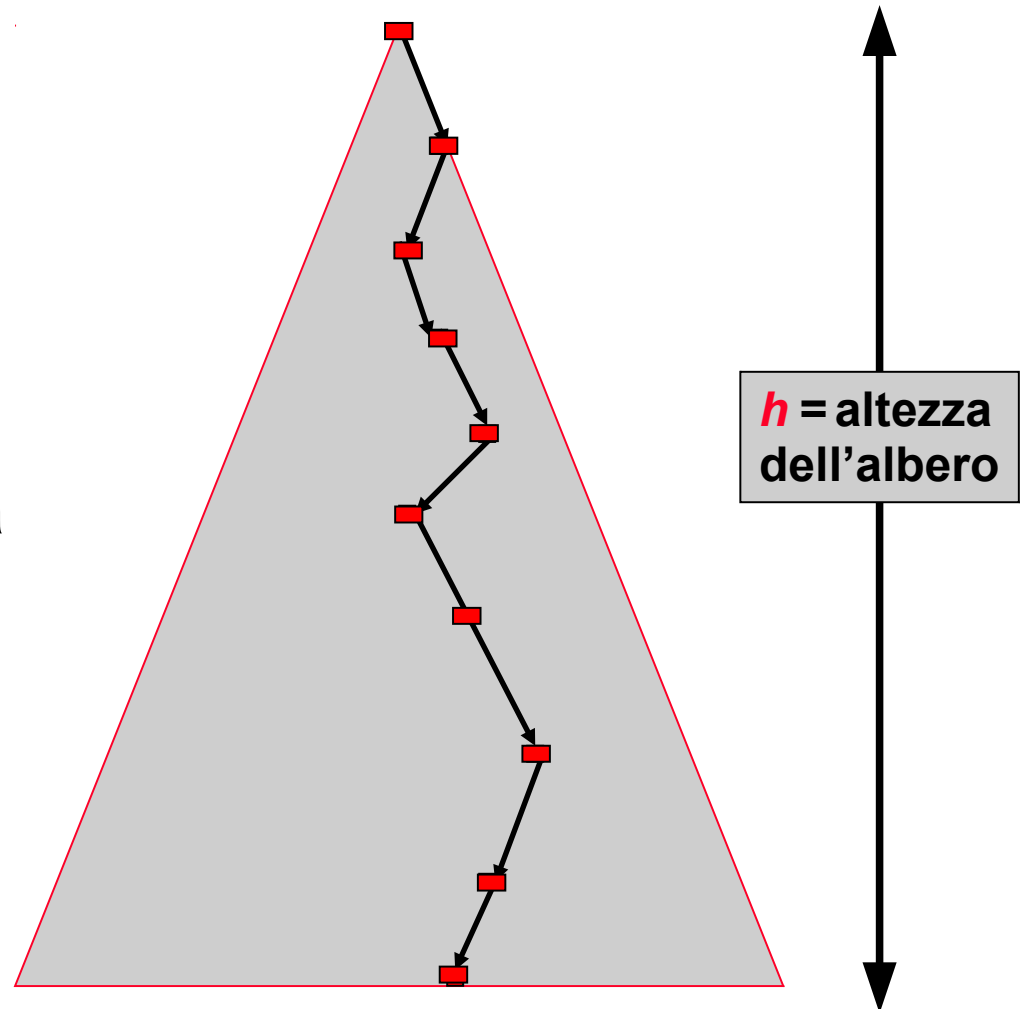
Elimina il nodo v
(che può avere
al più un figlio)

v non ha figli

stacca il
sottoalbero
radicato in f

Modifica: costo computazionale

- In generale
 - Le operazioni di modifica sono confinate ai nodi posizionati lungo un singolo percorso (path) dalla radice ad una foglia
 - Tempo: $O(h)$



Complessità media

- Qual è l'altezza media di un albero di ricerca?
 - Caso generale (inserimenti + cancellazione)
 - Difficile da trattare
 - Caso “semplice”: inserimenti in ordine casuale
 - È possibile dimostrare che l'altezza media è $O(\log n)$
- In generale:
 - Sono necessarie tecniche per mantenere bilanciato l'albero
 - Esempi
 - Alberi AVL (Adelson-Velsky, Landis)
 - Red-Black Tree
 - Splay Tree
 - Non cambiate canale 😊

Esercizi

- **Esercizio**
 - Scrivere un algoritmo non ricorsivo che effettua un attraversamento in-ordine di un ABR
- **Esercizio**
 - Dimostrate che se un nodo in un ABR ha due figli, allora il suo successore non ha un figlio sinistro e il suo predecessore non ha un figlio destro
- **Esercizio**
 - L'attraversamento di un ABR di n nodi può essere implementato trovando l'elemento minimo nell'ABR e poi chiamando $n-1$ volte l'operazione `successor()`.
 - Dimostrate che questo algoritmo viene eseguito in tempo $\Theta(n)$
- **Esercizio**
 - L'operazione di cancellazione da un ABR è commutativa? Nel senso che cancellare prima x e poi y , oppure cancellare prima y e poi x , produce lo stesso ABR?