

Semantica relazionale per la Logica di Base

Damiano Macedonio

Tesi di Laurea
27 marzo 2001

Relatore: Prof. Giovanni Sambin

A Renato, mio padre.

Indice

Introduzione	7
Premessa	7
Tesi	8
1 Logica di Base	11
1.1 Che cos'è la Logica di Base?	11
1.2 Principio di visibilità	12
1.3 Principio di riflessione	12
1.4 Simmetria	15
2 Semantica relazionale	17
2.1 Monoidi con relazione	17
2.2 Validità	24
2.3 Completezza	31
2.4 Estensioni di \mathbf{B}^-	37
3 Semantica relazionale simmetrica	45
3.1 Monoidi simmetrici	45
3.2 Valutazione nei monoidi simmetrici	48
3.3 Completezza per i monoidi simmetrici	49
3.4 Spazio delle fasi	54
3.5 Estensione a ${}^\perp\mathbf{B}$	56
3.6 Verso la Logica Lineare Classica	61
3.7 Riepilogo	68

Introduzione

Premessa

La Logica di Base¹ è un sistema logico sviluppato a partire dal 1996 a Padova, grazie al lavoro di G. Sambin, G. Battilotti e C. Faggian (cfr. [15]). L'intento era quello di trovare un denominatore comune per le logiche estensionali non modali: Classica, Lineare (senza esponenziali), Intuizionista e Quantistica. Tali logiche sono nate come “indebolimento” della Logica Classica; ad esempio la Logica Lineare chiede un maggior controllo delle regole strutturali (indebolimento e contrazione), mentre l'Intuizionista un maggior controllo dei contesti. Mancava, però, un punto di partenza comune, condiviso da tutte queste logiche, da cui “costruire” ciascuna di esse. Il calcolo **B** che si è ottenuto soddisfa questa esigenza.

In altre parole **B** è più debole rispetto alle altre logiche, ma ha la proprietà che le sue regole possono essere estese per ottenere tutti i sistemi logici più forti che abbiamo appena elencato.

Il formalismo usato in **B** è il *calcolo dei sequenti* introdotto negli anni trenta da G. Gentzen (cfr. [6]). I sequenti sono coppie ordinate di liste di formule, che, tipicamente, si presentano con questo aspetto:

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m \vdash \psi_1, \dots, \psi_n.$$

Le formule della prima lista (a sinistra del segno \vdash), dette *antecedenti*, sono da considerarsi come ipotesi, mentre la altre, dette *conseguenti*, sono le tesi. Indicheremo le liste ordinate di formule con lettere greche maiuscole (Γ, Δ, \dots) e le chiameremo *contesti* nel caso appartengano a un sequente. Il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ esprime il fatto che dalla verità di Γ segue la verità di Δ , ma anche, leggendolo da destra a sinistra, che dalla falsità di Δ segue la falsità di Γ .

Le regole del calcolo sono *regole di inferenza*. Esse appaiono nella forma

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \quad \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \dots}{\Theta \vdash \Lambda}.$$

¹In letteratura: *Basic Logic*

In ogni regola si distinguono due parti: la parte che sta sopra il segno di inferenza (i.e. la barra orizzontale), costituita da una lista non ordinata di sequenti, dette *premesse*, e la parte inferiore, costituita da un unico sequente, detto *conclusione*. Le regole vanno lette in questo modo: se tutte le premesse sono derivabili, allora lo è anche la conclusione. Partendo da sequenti derivabili per definizione, detti *assiomi*, e combinando più regole una dopo l'altra si formano le *derivazioni* del calcolo. Induttivamente, diremo che un sequente è *derivabile* nel calcolo se è ottenibile come conclusione di una regola di inferenza in cui tutte le premesse siano derivabili.

Il calcolo \mathbf{B} è stato costruito seguendo il principio di riflessione e il principio di visibilità. Una costante logica rispetta il principio di riflessione se è caratterizzata semanticamente da un'equazione che la associa ad un preciso legame tra asserzioni nel metalinguaggio e, inoltre, se le sue regole di inferenza sono ottenute proprio risolvendo tale equazione. Tutti i connettivi del calcolo di base soddisfano la riflessione.

Il principio di visibilità, oltre al controllo delle regole strutturali di indebolimento e contrazione della Logica Lineare, impone che tutte le formule attive (i.e. quelle composte dalla regola) siano isolate in ogni regola, vedremo meglio quest'idea al capitolo 1.

Tesi

Alla Logica di Base è già stata data un'interpretazione semantica di tipo algebrico, ad opera di A. Mognon [13], secondo la quale si ottengono i teoremi di validità e completezza, non solo per il calcolo \mathbf{B} , ma per tutte le sue estensioni. Mancava ancora una semantica più diretta e intuitiva che non fosse una riscrittura algebrica del calcolo di base, ma piuttosto una struttura di tipo insiemistico, come invece era stato fatto con lo *spazio delle fasi* di Girard, per la Logica Lineare [7], e con le *pretopologie* di Sambin per la Logica Intuizionista [14].

In questa tesi prenderemo in considerazione il nucleo del calcolo \mathbf{B} , che chiameremo \mathbf{B}^- , privo di regole strutturali e comprendente tutte le costanti ed i connettivi di \mathbf{B} ad eccezione delle due implicazioni. Nella prima parte forniremo una semantica completa per tale calcolo \mathbf{B}^- .

Il nostro modello sarà un semplice monoide $(M, \cdot, 1)$ sul quale sia definita una relazione R qualsiasi: essa ci permetterà di definire due operatori sui sottoinsiemi di M , i quali, combinati insieme, daranno due operatori di chiusura su $\mathcal{P}(M)$ (i.e. l'insieme delle parti di M). Chiameremo saturi i sottoinsiemi di M che sono punti fissi per tali operatori di chiusura. Proprio i saturi forniranno l'interpretazione delle formule. L'intuizione per l'interpretazione ci

viene direttamente dal calcolo dei sequenti: il simbolo *comporta* (\vdash), che divide in due il sequente $\Gamma \vdash \Delta$, sarà in pratica rappresentato dalla relazione R . Infatti, per la completezza, il modello sintattico avrà come elementi le liste di formule e il \vdash giocherà il ruolo della relazione. Sfrutteremo i due operatori che ci porge la relazione in M per creare due tipi di sottoinsiemi: i *sinistri*, che ci forniranno tutti i possibili antecedenti di una formula, e i *destri*, che ci daranno tutti i possibili conseguenti. Alla fine otterremo una definizione di validità per ogni sequente del calcolo. Il teorema di completezza che ricaveremo non riguarderà solo sequenti con un'unica formula sia a sinistra che a destra, come accade usualmente, ma ci dirà quando un qualsiasi sequente $\Gamma \vdash \Delta$ sia o no derivabile nel calcolo \mathbf{B}^- . Potremo facilmente estendere la semantica anche quando si consideri il calcolo \mathbf{B}^- con le regole strutturali di indebolimento, contrazione e scambio: basterà richiedere alcune proprietà per la relazione.

Nella seconda parte della tesi scopriremo che è possibile restringere la classe dei modelli semantici di \mathbf{B}^- : otterremo la completezza anche rispetto ai monoidi con una relazione simmetrica. Il prezzo da pagare consisterà nel cambiare la relazione del modello sintattico, perdendo così la distinzione semantica tra antecedenti e conseguenti.

La nuova semantica simmetrica determinerà un unico operatore sui sottoinsiemi di M , lo indicheremo con $(\cdot)^-$. Tale operatore ci fornirà ancora un operatore di chiusura su $\mathcal{P}(M)$ ed anzi, proprio sui saturi si comporterà come un'involuzione. Per ogni saturo A di $\mathcal{P}(M)$: A^- sarà un saturo e A^{--} indicherà ancora A . La presenza di tale involuzione ci permetterà di espandere il linguaggio su cui è definito il calcolo \mathbf{B}^- : potremo introdurre anche sulle formule una negazione involutiva, $(\cdot)^\perp$ (simile a quella introdotta da Girard per la Logica Lineare Classica), duplicando le formule atomiche, prendendo p e p^\perp ed estendendo per induzione a tutti i connettivi. Il nuovo calcolo sarà indicato con ${}^\perp\mathbf{B}$. Nel monoide, per avere la valutazione della negazione di una formula, ci basterà applicare proprio l'operatore $(\cdot)^-$ alla valutazione della formula stessa.

La presenza dell'involuzione $(\cdot)^\perp$ sulle formule ci permetterà di espandere il calcolo ${}^\perp\mathbf{B}$ in modo da ottenere tutte le estensioni simmetriche di \mathbf{B} , in particolare Ortologica Lineare e Lineare Classica (proposizionale e senza esponenziali). Ci basterà semplicemente aggiungere delle regole strutturali che coinvolgono l'involuzione sintattica $(\cdot)^\perp$, senza modificare le regole per le costanti o i connettivi. In parallelo, potremo espandere la semantica di ${}^\perp\mathbf{B}$ in modo da ottenere una semantica completa per ognuna delle sue estensioni. Sarà sufficiente richiedere delle nuove proprietà alla relazione R .

Per quanto riguarda le estensioni non simmetriche del calcolo \mathbf{B} , la ricerca rimane ancora aperta. La semantica offerta dai monoidi con una relazio-

ne simmetrica potrebbe non essere più sufficiente per dare la completezza. Le estensioni non simmetriche di \mathbf{B} , infatti, richiedono una trattazione sostanzialmente diversa per la parte sinistra e la parte destra di un sequente. Ad esempio, la Logica Lineare Intuizionista si ottiene da \mathbf{B} liberalizzando i contesti a sinistra (i.e. ammettendo il principio di visibilità solo a destra del sequente), mentre la Logica Intuizionista si ottiene da \mathbf{B} liberalizzando i contesti a sinistra e aggiungendo le regole strutturali di indebolimento e contrazione. La presenza di due operatori su $\mathcal{P}(M)$, che “spostano” i sottoinsiemi da destra a sinistra e viceversa, ci fa intendere che la strada dei monoidi con una relazione *arbitraria* potrebbe essere quella giusta da seguire.

Capitolo 1

Logica di Base

1.1 Che cos'è la Logica di Base?

Fino alla fine del diciannovesimo secolo dal punto di vista matematico si considerava *una unica* logica: la Logica Classica. Ad essa era attribuito valore assoluto. A partire dalla rivoluzione di Brouwer, che introdusse la Logica Intuizionista, è stato sviluppato un gran numero di logiche. Ognuna di esse intendeva catturare alcune distinzioni che potevano essere osservate in una specifica interpretazione, ma che la logica classica non distingueva. Escludendo le logiche che considerano le modalità, tutte le nuove logiche possono essere raggruppate sotto tre grandi categorie: Logica Intuizionista (senza il principio della doppia negazione), Logica Quantistica (senza la proprietà distributiva tra la congiunzione e la disgiunzione) e la Logica Lineare (con un rigido controllo delle regole strutturali).

Tutte queste nuove logiche rappresentano un *indebolimento* dell'originale Logica Classica: le loro regole permettono di dimostrare meno teoremi del sistema classico. Questo è sintomo del raffinamento apportato alle regole stesse, che in tal modo distinguono un maggior numero di casi.

Anche se tutte queste logiche sono state derivate dalla Logica Classica, esse sono state considerate come incompatibili tra loro. La Logica di Base è stata introdotta (cfr. [15]) proprio per dare un fondamento comune a tutte queste logiche. Il calcolo \mathbf{B} è il segmento comune a tutte queste logiche: esso può essere esteso in modo da ottenerle tutte.

La nostra semantica interpreta il segmento principale di \mathbf{B} : il calcolo senza le due implicazioni e alcuna regola strutturale. Chiameremo \mathbf{B}^- questo sistema ristretto.

Il linguaggio \mathcal{L} della Logica di Base \mathbf{B}^- contiene due simboli \otimes e \wp per i connettivi moltiplicativi, due \oplus e $\&$ per i connettivi additivi, e infine \top , \perp ,

1 e 0 per le costanti. Indicheremo inoltre: con p, q, \dots le formule atomiche, con $\varphi, \psi, \mu \dots$ le formule (ottenute componendo le formule atomiche con i connettivi), infine con $\Gamma, \Delta, \Sigma, \dots$ i contesti nel calcolo con i sequenti (i.e. liste finite di formule).

Come la Logica di Base, anche il segmento \mathbf{B}^- può essere sviluppato seguendo due principi fondamentali: il principio di visibilità ed il principio di riflessione.

1.2 Principio di visibilità

Come abbiamo accennato nell'introduzione, le regole per i connettivi e le costanti sono sviluppate utilizzando il calcolo dei sequenti introdotto da Gentzen (cfr. [6]). La visibilità è l'aspetto peculiare della Logica di Base: le regole di introduzione dei connettivi coinvolgono solo formule *isolate*, ovvero *solamente* le formule attive (i.e. quelle direttamente coinvolte dalle regole) sono visibili ed accanto a loro non compare alcun contesto. Chiariamo con un esempio. Nella Logica Intuizionista la disgiunzione è usualmente introdotta a sinistra secondo la seguente regola¹:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \oplus \psi \vdash \Delta}$$

Questa regola non permette il controllo sulla formula introdotta per il fatto che accanto a $\varphi \oplus \psi$ compare il contesto Γ . Nel caso della Logica di Base, allora, la disgiunzione è introdotta con la regola:

$$\frac{\varphi \vdash \Delta \quad \psi \vdash \Delta}{\varphi \oplus \psi \vdash \Delta}$$

dove tutte le formule attive sono isolate. Tutte le regole introdotte per il calcolo \mathbf{B}^- sono espresse in modo da soddisfare a questa proprietà.

1.3 Principio di riflessione

L'idea comune per definire la *verità* di una proposizione composta come $\varphi \& \psi$ è di pensare che $\varphi \& \psi$ è *vera* se e solo se φ è *vera* e ψ è *vera*. In altri termini, un connettivo \circ tra due proposizioni, come ad esempio $\&$, riflette a livello di linguaggio oggetto (i.e. il linguaggio che usa il sistema logico) una *connessione* tra due asserzioni nel metalinguaggio (i.e. il linguaggio che

¹In questo caso le formule attive sono φ, ψ e $\varphi \oplus \psi$.

noi utilizziamo per parlare del sistema logico). L'equivalenza semantica, che chiamiamo *equazione definitoria*, è quindi:

$$\varphi \circ \psi \text{ vera se e solo se } \varphi \text{ vera "meta-connessa" a } \psi \text{ vera.}$$

La proposizione $\varphi \circ \psi$ è semanticamente definita come quella proposizione che, quando risulta *vera*, si comporta esattamente come l'asserzione φ *vera* "meta-connessa a" ψ *vera*. Le regole di inferenza per \circ si ottengono esplicitamente *risolvendo* l'equazione definitoria. In tal caso diremo che \circ è stato introdotto in accordo col principio di riflessione.

Tutti i connettivi e le costanti logiche di \mathbf{B}^- sono introdotti in accordo con il principio di riflessione. Tutte le regole di inferenza sono giustificate risolvendo una particolare equazione definitoria che coinvolge il simbolo logico introdotto. Le equazioni definitorie sono introdotte e risolte in [15], qui richiamiamo solo quelle che interessano \mathbf{B}^- . La definizione della semantica si fonderà proprio su tali equazioni definitorie, che per questo è bene ricordare.

Definizione 1.1. (Equazioni definitorie) *Per i connettivi e le costanti del linguaggio \mathcal{L} poniamo:*

- \otimes . Per ogni Δ , $\psi \otimes \varphi \vdash \Delta$ sse $\psi, \varphi \vdash \Delta$
- \wp . Per ogni Γ , $\Gamma \vdash \varphi \wp \psi$ sse $\Gamma \vdash \varphi, \psi$
- \oplus . Per ogni Δ , $\psi \oplus \varphi \vdash \Delta$ sse $\psi \vdash \Delta$ e $\varphi \vdash \Delta$
- $\&$. Per ogni Γ , $\Gamma \vdash \varphi \& \psi$ sse $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$
- 1. Per ogni Δ , $1 \vdash \Delta$ sse $\vdash \Delta$
- \perp . Per ogni Γ , $\Gamma \vdash \perp$ sse $\Gamma \vdash$
- 0. Per ogni Δ , $\varphi \vdash \Delta$ e $0 \vdash \Delta$ sse $\varphi \vdash \Delta$
- \top . Per ogni Γ , $\Gamma \vdash \psi$ e $\Gamma \vdash \top$ sse $\Gamma \vdash \top$

Seguendo l'idea riportata in [15], si possono risolvere queste equazioni trovando le regole per il calcolo che riportiamo in tabella 1.1. Sottolineiamo ancora il fatto che, una volta risolte, le equazioni definitorie diventano dei teoremi verificati per ogni connettivo introdotto con le regole ottenute. Si osservi, infine, che il calcolo non presenta nessuna regola strutturale, nemmeno quella di scambio ammessa in \mathbf{B} . La semantica che forniremo sarà poi estendibile a qualsiasi sistema derivato da \mathbf{B}^- aggiungendo una o più regole strutturali scelte tra: scambio, indebolimento e contrazione.

L'ordine delle regole riportate nella tabella 1.1 non è casuale, ma è dato in modo da evidenziare la principale proprietà del calcolo \mathbf{B}^- : la simmetria.

Assiomi

$$\varphi \vdash \varphi$$

Regole operazionali

Moltiplicativi

$$\frac{\psi, \varphi \vdash \Delta}{\psi \otimes \varphi \vdash \Delta} \otimes L$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wp \psi} \wp R$$

$$\frac{\psi \vdash \Delta_1 \quad \varphi \vdash \Delta_2}{\psi \wp \varphi \vdash \Delta_1, \Delta_2} \wp L$$

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \varphi \quad \Gamma_1 \vdash \psi}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \varphi \otimes \psi} \otimes R$$

$$\frac{\vdash \Delta}{1 \vdash \Delta} 1L$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \perp} \perp R$$

$$\perp \vdash \quad \perp L$$

$$\vdash 1 \quad 1R$$

Additivi

$$\frac{\psi \vdash \Delta \quad \varphi \vdash \Delta}{\psi \oplus \varphi \vdash \Delta} \oplus L$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi} \& R$$

$$\frac{\psi \vdash \Delta}{\psi \& \varphi \vdash \Delta} \& L \quad \frac{\varphi \vdash \Delta}{\psi \& \varphi \vdash \Delta} \& L$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \oplus \psi} \oplus R \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \oplus \psi} \oplus R$$

$$0 \vdash \Delta \quad 0L$$

$$\Gamma \vdash \top \quad \top R$$

Regole di taglio

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2 \vdash \Delta} cutL$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_2, \varphi, \Delta_1 \quad \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta_2, \Delta, \Delta_1} cutR$$

Tabella 1.1: calcolo dei sequenti per la logica di base \mathbf{B}^- .

1.4 Simmetria

Se si guarda il calcolo \mathbf{B}^- come riportato in tabella 1.1, le regole possono essere lette in coppie simmetriche; infatti gli assiomi $\varphi \vdash \varphi$ si considerano simmetrici a sé stessi e ogni regola della colonna di destra è esattamente la corrispondente regola della colonna di sinistra, basta leggerla da destra a sinistra, scambiando Γ con Δ e ammettendo le seguenti coppie di corrispondenti nella relazione di simmetria: $\psi \otimes \varphi$ con $\varphi \wp \psi$, 1 con \perp , $\psi \oplus \varphi$ con $\varphi \& \psi$, 0 con \top . Si ottiene così una simmetria assiale rispetto all'asse verticale della pagina e ha dunque senso dire che una regola è *simmetrica* di un'altra.

La simmetria può essere vista anche formalmente, direttamente con il calcolo \mathbf{B}^- . Per ogni formula μ del linguaggio \mathcal{L} , la formula simmetrica μ^s è definita per induzione sulla struttura di μ come segue²:

- I. $p^s \equiv p$ per ogni variabile proposizionale p ;
- II. $1^s \equiv \perp$, $\perp^s \equiv 1$; $0^s \equiv \top$, $\top^s \equiv 0$;
- III. $(\varphi \circ \psi)^s \equiv \psi^s \circ^s \varphi^s$, dove il simmetrico \circ^s di ogni connettivo \circ è definito dalle posizioni:

$$\begin{array}{ll} \otimes^s \equiv \wp & \wp^s \equiv \otimes \\ \oplus^s \equiv \& & \&^s \equiv \oplus \end{array}$$

Conseguenza immediata della definizione è la seguente proprietà.

Proposizione 1.1. *Per ogni formula φ del linguaggio \mathcal{L} , φ^{ss} coincide con φ stessa.*

Si noti che l'equivalenza di φ^{ss} con φ è proprio un'identità tra formule, viste come stringhe di simboli, non si coinvolgono le regole del calcolo.

Come per una singola formula, possiamo definire anche il simmetrico di un contesto $\Gamma = \varphi_1, \dots, \varphi_n$ (i.e. una lista di formule) ponendo $\Gamma^s \equiv \varphi_n^s, \dots, \varphi_1^s$. Ovviamente, se Γ è il contesto vuoto il suo simmetrico è proprio il contesto vuoto. Possiamo quindi dire che il sequente $\Delta^s \vdash \Gamma^s$ è il simmetrico del sequente $\Gamma \vdash \Delta$, in tal modo la proposizione 1.1 si può immediatamente estendere ai sequenti.

Ora anche la simmetria delle regole può essere definita formalmente. La simmetrica di una regola J si definisce come la regola J^s che porta dal simmetrico delle premesse di J al simmetrico delle conclusioni di J . Per esempio

²Da ora e per tutta la Tesi, \equiv sarà inteso come il segno per una equazione definitoria; quando una definizione sarà data per la prima volta il definendo sarà a sinistra ed il definente a destra.

la regola simmetrica di $\otimes L$ è $\wp R$, dal momento che per definizione vale $(\psi \otimes \varphi)^s \equiv \varphi^s \wp \psi^s$. Con abuso di linguaggio possiamo dire che J fa la stessa cosa di J^s , ma dall'altra parte del sequente. Ovviamente J^{ss} è proprio J .

Sfruttando la simmetria, possiamo dimostrare il seguente teorema (cfr. [15]):

Teorema 1.1. *Per ogni contesto Γ, Δ , nel linguaggio \mathcal{L} : il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{B}^- se e solo se lo è anche il sequente $\Delta^s \vdash \Gamma^s$.*

Dimostrazione. Data una prova di $\Gamma \vdash \Delta$, si può derivare $\Delta^s \vdash \Gamma^s$ tramite la prova simmetrica che si ottiene dagli stessi assiomi scambiando ogni regola con la sua simmetrica. \square

Questo teorema ci sarà molto utile nella seconda parte della tesi, quando estenderemo il calcolo \mathbf{B}^- alle Logiche simmetriche: Ortologica Lineare e Lineare Classica. Proprio la simmetria del calcolo ci permetterà di trovare per \mathbf{B}^- un modello sintattico in cui la relazione sia simmetrica. Con tale modello otterremo un teorema di validità e completezza per \mathbf{B}^- nei monoidi $(M, \cdot, 1)$ in cui sia definita una relazione simmetrica.

Capitolo 2

Semantica relazionale

2.1 Monoidi con relazione

I monoidi con relazione sono i modelli con i quali interpreteremo il sistema \mathbf{B}^- . Faremo corrispondere alle formule del linguaggio \mathcal{L} in sottoinsiemi del monoide che siano saturi rispetto un particolare operatore. Tale operatore sarà definito per mezzo di una relazione binaria sul monoide. Intuitivamente si può pensare al monoide come all'insieme di tutti i contesti che si possono formare nel linguaggio \mathcal{L} e alla relazione come al simbolo di comporta (\vdash) tra due contesti.

Come abbiamo già detto nell'introduzione, in un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ possiamo individuare due parti distinte: Γ , la parte sinistra, o antecedente, e Δ , la parte destra, o conseguente. Fissata una formula φ possiamo quindi chiederci quali possano essere tutti i suoi possibili antecedenti o tutti i suoi possibili conseguenti. La relazione del monoide ci fornirà due operatori su $\mathcal{P}(M)$: un operatore sinistro, che descriverà gli antecedenti di una formula, e un operatore destro, che descriverà i conseguenti di una formula. La loro combinazione darà un operatore di chiusura. Vediamo formalmente la definizione del nostro modello.

Definizione 2.1. $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$ è un monoide con relazione se

- M è un insieme;
- $\cdot : M \times M \longrightarrow M$ è una operazione binaria tale che
 - $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ per ogni $x, y, z \in M$ (associatività),
 - 1 è elemento neutro, cioè $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ per ogni $x \in M$;
- R è una relazione binaria di M in sé stesso.

Questo è quanto ci serve per costruire il nostro apparato di valutazione. Consideriamo adesso la relazione R e vediamo come essa fornisca i due operatori cercati. Teniamo presente che R deve riflettere nel monoide la relazione \vdash tra i contesti di \mathbf{B}^- .

Dato un elemento z in M possiamo individuare tutti gli elementi di M che sono in relazione con esso, o meglio, visto che la relazione non è a priori riflessiva, possiamo cercare tutti gli elementi di M che possono essere messi a sinistra (come gli antecedenti in un sequente) nella relazione con z o, anche, possiamo cercare tutti gli elementi di M che possono essere messi a destra (come i conseguenti in un sequente) nella relazione con z . Definiamo quindi due operatori $(\cdot)^\leftarrow$ e $(\cdot)^\rightarrow$ sugli elementi $z \in M$, ponendo:

$$\begin{aligned} z^\leftarrow &\equiv \{x \in M : x R z\} && \text{elementi a sinistra di } z \text{ nella relazione} \\ z^\rightarrow &\equiv \{y \in M : z R y\} && \text{elementi a destra di } z \text{ nella relazione.} \end{aligned}$$

Se x fosse una formula, come accade nel modello sintattico, x^\leftarrow rappresenterebbe proprio l'insieme degli antecedenti di x , mentre x^\rightarrow quello dei suoi conseguenti. Possiamo estendere questa idea anche ai sottoinsiemi di M : dato $A \subseteq M$ possiamo chiederci quali siano gli elementi di M che sono in relazione, a sinistra (come antecedenti) o a destra (come conseguenti), con tutti gli elementi di A . Definiamo quindi due operatori, $(\cdot)^\leftarrow$ e $(\cdot)^\rightarrow$ di tipo $\mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M)$. La composizione, in qualsiasi verso, di questi due operatori ci darà proprio gli operatori di chiusura con i quali definiremo i saturi di $\mathcal{P}(M)$ nei quali valuteremo le formule di \mathcal{L} .

Definizione 2.2. *Se $A \subseteq M$ poniamo¹*

$$\begin{aligned} A^\leftarrow &\equiv \{x \in M : x R z \text{ per ogni } z \in A\}; \\ A^\rightarrow &\equiv \{y \in M : z R y \text{ per ogni } z \in A\}. \end{aligned}$$

Si noti che la definizione non crea ambiguità con quanto visto prima per gli elementi, infatti è immediato verificare che per ogni elemento $z \in M$:

$$\{z\}^\leftarrow = z^\leftarrow \qquad \{z\}^\rightarrow = z^\rightarrow.$$

Inoltre una equivalenza importante che discende direttamente dalle definizioni e che riguarda i sottoinsiemi di M è la seguente. Prendiamo $A \subseteq M$,

¹Per uniformità di notazioni con [9] e [16], indicheremo con ϵ l'appartenenza ai sottoinsiemi. Questa notazione è stata introdotta e giustificata in [17], in particolare per ogni insieme M , $A \subseteq M$ significa che A è una funzione proposizionale su M e $x \in A$ significa che $x \in M$ e $A(x)$ è vera. Tutte le operazioni che faremo con i sottoinsiemi saranno coerenti con le idee di [17].

allora

$$\begin{aligned}
A^{\leftarrow} &\equiv \{x \in M : x R z \text{ per ogni } z \in A\} \\
&= \{x \in M : x \in z^{\leftarrow} \text{ per ogni } z \in A\} \\
&= \bigcap_{z \in A} z^{\leftarrow} = \bigcap_{z \in A} \{z\}^{\leftarrow}; \tag{2.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{\rightarrow} &\equiv \{y \in M : z R y \text{ per ogni } z \in A\} \\
&= \{y \in M : y \in z^{\rightarrow} \text{ per ogni } z \in A\} \\
&= \bigcap_{z \in A} z^{\rightarrow} = \bigcap_{z \in A} \{z\}^{\rightarrow}. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

La proprietà più importante di questi due operatori è che essi inducono una connessione di Galois (cfr. [2]) sulla struttura $(\mathcal{P}(M), \mathcal{P}(M), \subseteq, \subseteq, (\cdot)^{\leftarrow}, (\cdot)^{\rightarrow})$. Tale proprietà è quanto ci serve per definire i due operatori di chiusura per la semantica.

Proposizione 2.1. *Per ogni $A, B \subseteq M$ vale:*

$$A \subseteq B^{\leftarrow} \quad \text{sse} \quad B \subseteq A^{\rightarrow}.$$

Dimostrazione. Si verifica dalla definizione dei due operatori:

$$\begin{aligned}
A \subseteq B^{\leftarrow} &\quad \text{sse} \quad (\forall x \in A) (x \in B^{\leftarrow}) \\
&\quad \text{sse} \quad (\forall x \in A) (\forall y \in B) (x R y) \\
&\quad \text{sse} \quad (\forall y \in B) (\forall x \in A) (x R y) \\
&\quad \text{sse} \quad (\forall y \in B) (y \in A^{\rightarrow}) \\
&\quad \text{sse} \quad B \subseteq A^{\rightarrow}.
\end{aligned}$$

□

Vediamo una equivalenza che ci sarà molto utile nelle dimostrazioni future, anzi la sfrutteremo subito proprio per definire gli operatori di chiusura su $\mathcal{P}(M)$.

Lemma 2.1. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- a. *Per ogni $A, B \subseteq M$ vale $A \subseteq B^{\leftarrow}$ sse $B \subseteq A^{\rightarrow}$ (i.e. proposizione 2.1).*
- b. *I. Per ogni $A, B \subseteq M$ vale² $A \subseteq A^{\rightarrow\leftarrow}$ e $B \subseteq B^{\leftarrow\rightarrow}$ (i.e. $(\cdot)^{\rightarrow\leftarrow}$ e $(\cdot)^{\leftarrow\rightarrow}$ sono estensivi);*

²Quando scriviamo $A^{\rightarrow\leftarrow}$ e $B^{\leftarrow\rightarrow}$ intendiamo $(A^{\rightarrow})^{\leftarrow}$ e $(B^{\leftarrow})^{\rightarrow}$. In generale, quando ci saranno più operatori ad esponente, li intenderemo applicati nell'ordine da sinistra a destra, ad esempio con $A^{\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow}$ intenderemo $((A^{\leftarrow})^{\rightarrow})^{\leftarrow})^{\rightarrow}$, e così via.

- II. per ogni $A_1, A_2 \subseteq M$: se $A_1 \subseteq A_2$ allora $A_2^{\rightarrow} \subseteq A_1^{\rightarrow}$ (i.e. $(\cdot)^{\rightarrow}$ è antimonotono).
 per ogni $B_1, B_2 \subseteq M$: se $B_1 \subseteq B_2$ allora $B_2^{\leftarrow} \subseteq B_1^{\leftarrow}$ (i.e. $(\cdot)^{\leftarrow}$ è antimonotono).

Dimostrazione.

- *a.* implica *b.I.*: da $A^{\rightarrow} \subseteq A^{\rightarrow}$ si ha $A \subseteq A^{\rightarrow\leftarrow}$ sostituendo B con A^{\rightarrow} in *a.*; il caso di $(\cdot)^{\leftarrow\rightarrow}$ è analogo.
- *a.* implica *b.II.*: assumiamo che $A_1 \subseteq A_2$ allora $A_1 \subseteq A_2^{\rightarrow\leftarrow}$ (per *(b.I)* applicato ad A_2 e la transitività di \subseteq) e quindi $A_2^{\rightarrow} \subseteq A_1^{\rightarrow}$ (per *a.* con $B = A_2^{\rightarrow}$); il caso di $(\cdot)^{\leftarrow}$ è analogo.
- *b.I-II.* implica *a.*: assumiamo che $A \subseteq B^{\leftarrow}$ allora $B^{\leftarrow\rightarrow} \subseteq A^{\rightarrow}$ (per *b.II.*) che porta a $B \subseteq A^{\rightarrow}$ (per *b.I.* e la transitività di \subseteq); l'inverso è provato simmetricamente.

□

Finalmente possiamo vedere che gli operatori $(\cdot)^{\rightarrow}$ e $(\cdot)^{\leftarrow}$ inducono in modo naturale due operatori di chiusura su $\mathcal{P}(M)$.

Proposizione 2.2. *Le funzioni*

$$\begin{aligned} (\cdot)^{\leftarrow\rightarrow} &: \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M) \\ (\cdot)^{\rightarrow\leftarrow} &: \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M) \end{aligned}$$

sono operatori di chiusura su $\mathcal{P}(M)$.

Dimostrazione. Per vedere che $(\cdot)^{\rightarrow\leftarrow}$ è un operatore di chiusura dobbiamo verificare che vale

$$A_1 \subseteq A_2^{\rightarrow\leftarrow} \quad \text{sse} \quad A_1^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq A_2^{\rightarrow\leftarrow} \quad \text{per ogni } A_1, A_2 \subseteq M.$$

Assumiamo che $A_1 \subseteq A_2^{\rightarrow\leftarrow}$, allora $A_2^{\rightarrow} \subseteq A_1^{\rightarrow}$, per la proposizione 2.1 con $B = A_2^{\rightarrow}$, e quindi $A_1^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq A_2^{\rightarrow\leftarrow}$, per l'antimonotonia di $(\cdot)^{\leftarrow}$ (lemma 2.1.*b.II*). Viceversa assumiamo che $A_1^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq A_2^{\rightarrow\leftarrow}$ allora $A_1 \subseteq A_2^{\rightarrow\leftarrow}$ per il lemma 2.1.*b.I* e la transitività di \subseteq . Il caso di $(\cdot)^{\leftarrow\rightarrow}$ si può trattare in maniera simmetrica. □

Usando il risultato appena illustrato possiamo definire uno speciale gruppo di elementi in $\mathcal{P}(M)$: i sottoinsiemi saturi di M , proprio i candidati a fornire la valutazione delle formule di \mathcal{L} . Ci serviremo della seguente definizione.

Definizione 2.3. Saturi.

- $A \subseteq M$ è saturo sinistro sse $A = A^{\rightarrow\leftarrow}$.
- $B \subseteq M$ è saturo destro sse $B = B^{\leftarrow\rightarrow}$.

Possiamo inoltre definire $Sat^{\leftarrow}(M)$ e $Sat^{\rightarrow}(M)$ come la collezione dei sottoinsiemi di M che sono saturi sinistri e saturi destri rispettivamente.

La giustificazione all'aggettivo "sinistro" e "destro" deriva dal fatto che i sottoinsiemi A di M tali che $A = A^{\rightarrow\leftarrow}$ sono tutti e soli quelli che sono immagine tramite $(\cdot)^{\leftarrow}$ di qualche sottoinsieme di M , mentre i $B \subseteq M$ tali che $B = B^{\leftarrow\rightarrow}$ sono tutti e soli i sottoinsiemi di M che sono immagine tramite $(\cdot)^{\rightarrow}$ ancora di qualche sottoinsieme di M . Questo si vede dalla caratterizzazione dei saturi che daremo dopo una piccola premessa.

Lemma 2.2. Per ogni $A, B \subseteq M$ vale $A^{\rightarrow\leftarrow\rightarrow} = A^{\rightarrow}$ e $B^{\leftarrow\rightarrow\leftarrow} = B^{\leftarrow}$.

Dimostrazione. Mostriamo che $B^{\leftarrow\rightarrow\leftarrow} = B^{\leftarrow}$; questo è verificato per il fatto che $B^{\leftarrow} \subseteq B^{\leftarrow\rightarrow\leftarrow}$, grazie al lemma 2.1.b.I, e $B^{\leftarrow\rightarrow\leftarrow} \subseteq B^{\leftarrow}$ per il lemma 2.1.b.I (i.e. $B \subseteq B^{\leftarrow\rightarrow}$) e l'antimonotonia di $(\cdot)^{\leftarrow}$ (lemma 2.1.b.II). Possiamo provare che $A^{\rightarrow\leftarrow\rightarrow} = A^{\rightarrow}$ in modo simmetrico. \square

Proposizione 2.3. Caratterizzazione dei saturi.

- a. $A \subseteq M$ è saturo sinistro sse $A = B^{\leftarrow}$ per qualche $B \subseteq M$.
- b. $B \subseteq M$ è saturo destro sse $B = A^{\rightarrow}$ per qualche $A \subseteq M$.

Dimostrazione. a. Se A è saturo sinistro allora $A = A^{\rightarrow\leftarrow}$, per definizione, e quindi possiamo prendere $A^{\rightarrow} \subseteq M$ per verificare l'implicazione. Viceversa, dobbiamo provare che B^{\leftarrow} è saturo sinistro per ogni $B \subseteq M$, cioè $B^{\leftarrow} = B^{\leftarrow\rightarrow\leftarrow}$ e questo è verificato nel lemma 2.2. Possiamo provare il caso b. in modo simmetrico. \square

Abbiamo quindi trovato due grandi classi all'interno di $\mathcal{P}(M)$: una classe sinistra (saturi sinistri) e una classe destra (saturi destri). Questi due tipi di sottoinsiemi si prestano in modo naturale ad interpretare l'uno la parte sinistra di un sequente, l'altro la parte destra. Per ogni formula, o addirittura per ogni contesto, potremmo dare una coppia di valutazioni:

- una valutazione nei saturi sinistri, che ci fornisce il sottoinsieme di tutti gli elementi di M che possono essere visti come antecedenti della formula, o del contesto;
- una valutazione nei saturi destri, che ci parla invece dei possibili conseguenti della formula, o del contesto.

Per rispettare questa dualità sinistra-destra non saremo costretti a portare avanti una doppia valutazione per ogni formula. Infatti basta scegliere se considerare gli antecedenti (saturo sinistri) o i conseguenti (saturo destri), perché ogni saturo sinistro individua uno e uno solo saturo destro: i due operatori $(\cdot)^\leftarrow$ e $(\cdot)^\rightarrow$ formano, infatti, una biezione tra saturo sinistri e destri. Sceglieremo quindi di considerare gli antecedenti di una formula, o un contesto, prendendo una valutazione sui saturo sinistri; quando ci servirà avere i conseguenti non dovremo fare altro che passare al corrispondente saturo destro applicando semplicemente $(\cdot)^\rightarrow$, per tornare indietro basterà ancora applicare l'operatore $(\cdot)^\leftarrow$.

Vediamo formalmente che, se ristretti sui saturo, i due operatori $(\cdot)^\leftarrow$ e $(\cdot)^\rightarrow$ formano una biezione.

Proposizione 2.4. *I due operatori*

$$\text{Sat}^\leftarrow(M) \begin{array}{c} \xrightarrow{(\cdot)^\rightarrow} \\ \xleftarrow{(\cdot)^\leftarrow} \end{array} \text{Sat}^\rightarrow(M)$$

sono due biezioni, una l'inversa dell'altra. Inoltre vale:

- a. Per ogni A_1, A_2 saturo sinistro: $A_1 \subseteq A_2$ sse $A_2^\rightarrow \subseteq A_1^\rightarrow$.
- b. Per ogni B_1, B_2 saturo destro: $B_1 \subseteq B_2$ sse $B_2^\leftarrow \subseteq B_1^\leftarrow$.
- c. M è il massimo dei saturo sinistri; M^\rightarrow è il minimo dei saturo destri.
- d. M è il massimo dei saturo destri; M^\leftarrow è il minimo dei saturo sinistri.

Dimostrazione. Vediamo per $(\cdot)^\rightarrow$. Essa è suriettiva perché ogni saturo destro è del tipo A^\rightarrow con $A \subseteq M$ (cfr. proposizione 2.3), basta quindi prendere $A^{\rightarrow\leftarrow}$. Inoltre è iniettiva perché dati due saturo sinistri A_1, A_2 , se $A_1^\rightarrow = A_2^\rightarrow$ allora $A_1^{\rightarrow\leftarrow} = A_2^{\rightarrow\leftarrow}$ e quindi $A_1 = A_2$ essendo $A_1 = A_1^{\rightarrow\leftarrow}$ e $A_2 = A_2^{\rightarrow\leftarrow}$ per definizione di $\text{Sat}^\leftarrow(M)$. Infine $(\cdot)^\leftarrow$ è la sua inversa perché $A = A^{\rightarrow\leftarrow}$ per ogni A saturo sinistro. I punti a. e b. sono facilmente verificabili pensando all'antimonotonia delle due funzioni. I punti c. e d. sono immediata conseguenza di a. e b. pensando al fatto che M è il massimo dei suoi sottoinsiemi ed è sia saturo destro che sinistro, trattandosi di operatori di chiusura. \square

Consideriamo in particolare il sottoinsieme vuoto di M , che indicheremo con il simbolo \emptyset . Esso è il minimo dei sottoinsiemi di M , quindi la sua saturazione deve essere il minimo dei saturo, visto che abbiamo a che fare con operatori di chiusura. I punti c. e d. della precedente proposizione ci dicono quindi che $\emptyset^{\rightarrow\leftarrow} = M^\leftarrow$ e $\emptyset^{\leftarrow\rightarrow} = M^\rightarrow$ e che $M = \emptyset^\leftarrow$ ed $M = \emptyset^\rightarrow$.

Nella semantica interpreteremo il segno di comporta (\vdash) di un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ come l'inclusione tra la valutazione sinistra di Γ e la valutazione destra di Δ . I punti *a.* e *b.* della proposizione 2.4 ci dicono che per avere la relazione tra le rispettive valutazioni destre basterà applicare $(\cdot)^\rightarrow$ e considerare l'inclusione inversa.

Il fatto di poter passare da saturi sinistri a saturi destri e viceversa è molto importante anche grazie alla prossima proposizione 2.5. Essa ci dice, in pratica, che possiamo pensare all'intersezione tra saturi sinistri come all'unione dei corrispondenti saturi destri e, viceversa, all'intersezione tra saturi destri come all'unione tra i corrispondenti saturi sinistri. Quando andremo a considerare le valutazioni potremo passare da una intersezione ad una unione o viceversa, a seconda di cosa ci farà più comodo.

Lemma 2.3. *Per ogni $A \subseteq M$ saturo sinistro e ogni $B \subseteq M$ saturo destro, vale:*

$$B^\leftarrow \subseteq A \quad \text{sse} \quad A^\rightarrow \subseteq B$$

Dimostrazione. Siano A saturo sinistro e B saturo destro. Assumiamo che $B^\leftarrow \subseteq A$, allora $A^\rightarrow \subseteq B^{\leftarrow\rightarrow}$ per il lemma 2.1.b.II, ma $B = B^{\leftarrow\rightarrow}$ e quindi $A^\rightarrow \subseteq B$. Il viceversa è analogo. \square

Proposizione 2.5. Corrispondenza tra unione e intersezione

- a. I. Se A_1, A_2 sono saturi sinistri allora $A_1 \cap A_2 = (A_1^\rightarrow \cup A_2^\rightarrow)^\leftarrow$.
II. Se B_1, B_2 sono saturi destri allora $B_1 \cap B_2 = (B_1^\leftarrow \cup B_2^\leftarrow)^\rightarrow$.
- b. I. Se A_1, A_2 sono saturi sinistri allora $(A_1 \cup A_2)^\rightarrow = A_1^\rightarrow \cap A_2^\rightarrow$.
II. Se B_1, B_2 sono saturi destri allora $(B_1 \cup B_2)^\leftarrow = B_1^\leftarrow \cap B_2^\leftarrow$.
- c. I. Se A_1, A_2 sono saturi sinistri allora $(A_1 \cup A_2)^{\rightarrow\leftarrow} = (A_1^\rightarrow \cap A_2^\rightarrow)^\leftarrow$.
II. Se B_1, B_2 sono saturi destri allora $(B_1 \cup B_2)^{\leftarrow\rightarrow} = (B_1^\leftarrow \cap B_2^\leftarrow)^\rightarrow$.

Dimostrazione.

- a. Vediamo il caso I. Presi A_1, A_2 saturi sinistri; $A_1 = A_1^{\rightarrow\leftarrow} = \bigcap_{y \in A_1^\rightarrow} \{y\}^\leftarrow$
e $A_2 = A_2^{\rightarrow\leftarrow} = \bigcap_{y \in A_2^\rightarrow} \{y\}^\leftarrow$ per la proprietà (2.1) e quindi $A_1 \cap A_2 = \bigcap_{y \in A_1^\rightarrow} \{y\}^\leftarrow \cap \bigcap_{y \in A_2^\rightarrow} \{y\}^\leftarrow = \bigcap_{y \in A_1^\rightarrow \cup A_2^\rightarrow} \{y\}^\leftarrow = (A_1^\rightarrow \cup A_2^\rightarrow)^\leftarrow$. Il caso II. è simmetrico.

- b. Vediamo il caso I. Presi A_1, A_2 saturi sinistri; da $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ segue $(A_1 \cup A_2)^\rightarrow \subseteq A_1^\rightarrow$ (lemma 2.1.b.1), analogamente $(A_1 \cup A_2)^\rightarrow \subseteq A_2^\rightarrow$ e quindi $(A_1 \cup A_2)^\rightarrow \subseteq A_1^\rightarrow \cap A_2^\rightarrow$. Viceversa applicando $(\cdot)^\leftarrow$ al risultato appena trovato si ha $(A_1^\rightarrow \cap A_2^\rightarrow)^\leftarrow \subseteq (A_1 \cup A_2)^\rightarrow^\leftarrow$; applicando il lemma 2.3 con $B = A_1^\rightarrow \cap A_2^\rightarrow$ e $A = (A_1 \cup A_2)^\rightarrow^\leftarrow$ si può ottenere $(A_1 \cup A_2)^\rightarrow^\leftarrow \subseteq A_1^\rightarrow \cap A_2^\rightarrow$ e si conclude per il lemma 2.2. Il caso II. è simmetrico.
- c. Basta applicare $(\cdot)^\leftarrow$ e $(\cdot)^\rightarrow$ al punto b.

□

Il punto a. ci dice in particolare che le intersezioni tra saturi sinistri o saturi destri danno ancora saturi sinistri o destri.

2.2 Validità

Consideriamo \mathcal{M} monoide con relazione. Come abbiamo già detto, interpreteremo ogni formula φ pensando a tutti i suoi possibili antecedenti e quindi la valuteremo in un saturo sinistro. Il compito della relazione R nel monoide è già chiaro: comportarsi con gli elementi del monoide come il segno \vdash si comporta con i contesti. Ma qual è invece il compito dell'operazione \cdot del monoide? Tale operazione rappresenterà la *virgola* all'interno di un contesto.

Considereremo la virgola tra le formule di un sequente come il prodotto tra i sottoinsiemi che le interpretano. Se il contesto si troverà a sinistra, la virgola sarà il prodotto dei saturi sinistri associati alle formule che lo compongono; se invece il contesto si troverà a destra la virgola sarà il prodotto dei saturi destri (individuati in modo univoco per la proposizione 2.4) associati alle stesse formule.

Definiamo il prodotto tra sottoinsiemi di M in maniera usuale; presi $A, B \subseteq M$ poniamo:

$$A \cdot B \equiv \{ x \cdot y : x \in A, y \in B \}$$

Appare ora giustificata la richiesta sull'operazione \cdot in M : essa deve essere associativa perché associativa è la virgola tra sequenti nel calcolo \mathbf{B}^- , infatti un contesto Γ è una lista finita di formule, separate appunto da virgole, e non importa l'ordine con cui sono state composte. Sottolineiamo, infine una proprietà fondamentale e facilmente verificabile del prodotto tra sottoinsiemi: per ogni $A_1, A_2, B_1, B_2 \subseteq M$ vale

$$\text{se } A_1 \subseteq B_1 \text{ e } A_2 \subseteq B_2 \text{ allora } A_1 \cdot A_2 \subseteq B_1 \cdot B_2. \quad (2.3)$$

Per interpretare ogni formula del linguaggio \mathcal{L} in \mathcal{M} ci serviamo della funzione

$$V(\cdot) : Frm \longrightarrow Sat^{\leftarrow}(M)$$

che chiamiamo *valutazione delle formule*. Definiamo $V(\cdot)$ in maniera induttiva: noto come opera $V(\cdot)$ sulle formule atomiche, le costanti ed i connettivi si conosce la valutazione di qualunque formula scritta ne linguaggio della logica \mathbf{B}^- . Per interpretare i connettivi l'idea principale è di sfruttare le possibili operazioni sui sottoinsiemi di M : intersezione, unione e prodotto.

Come è ormai standard interpreteremo la congiunzione ($\&$) e la disgiunzione (\oplus) rispettivamente come intersezione e unione tra saturi sinistri. Ricordando la proposizione 2.5, possiamo anche scambiare i ruoli e dire che la congiunzione ($\&$) e la disgiunzione (\oplus) sono rappresentabili rispettivamente anche come unione e intersezione di saturi destri. Sfrutteremo l'una o l'altra interpretazione a seconda di quale ci farà più comodo nelle dimostrazioni.

Per quanto riguarda i connettivi \otimes e \wp , le decisioni sono già state prese! Abbiamo infatti deciso che l'operazione del monoide interpreta la virgola in un sequente. Dalle equazioni definitorie si vede subito che il connettivo \otimes interpreta nel calcolo la *virgola a sinistra* tra due formule, mentre il connettivo \wp interpreta nel calcolo la *virgola a destra* tra due formule. Appare quindi chiaro che le valutazioni del \otimes e del \wp dovranno ricondursi, come casi particolari, alla più generale interpretazione della virgola in un contesto sinistro o destro rispettivamente: saranno i casi in cui il contesto sinistro, o destro, contiene esattamente due formule. Il \otimes sarà quindi il prodotto tra due saturi sinistri e il \wp quello tra due saturi destri. Ovviamente dovremo saturare dove necessario, in modo da rispettare la condizione che $V(\cdot)$ sia un saturo sinistro per ogni formula.

Definizione 2.4. Valutazione delle formule. *Se p è una formula atomica scegliamo $V(p)$ in $Sat^{\leftarrow}(M)$; per le costanti ed i connettivi poniamo:*

$$\begin{aligned} V(\top) &\equiv M & V(0) &\equiv \emptyset^{\rightarrow\leftarrow} \\ V(1) &\equiv \{1\}^{\rightarrow\leftarrow} & V(\perp) &\equiv \{1\}^{\leftarrow} \\ V(\varphi \& \psi) &\equiv V(\varphi) \cap V(\psi) & V(\psi \oplus \varphi) &\equiv (V(\psi) \cup V(\varphi))^{\rightarrow\leftarrow} \\ V(\psi \otimes \varphi) &\equiv (V(\psi) \cdot V(\varphi))^{\rightarrow\leftarrow} & V(\varphi \wp \psi) &\equiv (V(\varphi)^{\rightarrow} \cdot V(\psi)^{\rightarrow})^{\leftarrow} \end{aligned}$$

Si noti che questa è una buona definizione, ovvero il secondo membro di ogni uguaglianza è effettivamente un saturo sinistro: basta ricordare che intersezione di saturi è saturo e considerare le proposizioni 2.3 e 2.4.c. Inoltre lo stesso M è un saturo sinistro essendo $(\cdot)^{\rightarrow\leftarrow}$ un operatore di chiusura. Inoltre, come abbiamo osservato a pagina 22, $V(0) = \emptyset^{\rightarrow\leftarrow} = M^{\leftarrow}$ e questo fatto ci sarà utile nelle dimostrazioni. Infine osserviamo che l'idea della dualità tra

intersezione e unione è stata rispettata, infatti il $\&$ e il \oplus possono essere visti, dalla parte dei saturi destri, come unione e intersezione rispettivamente. Ricordando la proposizione 2.5 si ha:

$$\begin{aligned} V(\varphi \& \psi)^\rightarrow &= (V(\varphi) \cap V(\psi))^\rightarrow \\ &= (V(\varphi)^\rightarrow \cup V(\psi)^\rightarrow)^\leftarrow\leftarrow; \\ V(\psi \oplus \varphi)^\rightarrow &= (V(\psi) \cup V(\varphi))^\rightarrow \\ &= (V(\psi)^\rightarrow \cap V(\varphi)^\rightarrow)^\leftarrow\leftarrow = V(\psi)^\rightarrow \cap V(\varphi)^\rightarrow. \end{aligned}$$

Dalla valutazione $V(\cdot)$ delle formule possiamo passare finalmente alla valutazione per i contesti estesi. Ogni contesto deve avere due valutazioni a seconda che si trovi a sinistra o a destra in un sequente, si pensi ad esempio a $\Gamma \vdash \Delta$. La valutazione sinistra coinvolge il prodotto di saturi sinistri, mentre la valutazione destra coinvolge il prodotto di saturi destri.

Definizione 2.5. Valutazione dei contesti. *Dati due contesti, ovvero due liste finite e ordinate di formule Γ e Δ anche vuote, poniamo:*

$$\begin{aligned} \text{se } \Gamma = \varphi_1, \dots, \varphi_m \text{ (con } m \geq 0) \quad V_{\text{sx}}(\Gamma) &\equiv (\{1\} \cdot V(\varphi_1) \cdot \dots \cdot V(\varphi_m))^\rightarrow\leftarrow\leftarrow; \\ \text{se } \Delta = \psi_1, \dots, \psi_n \text{ (con } n \geq 0) \quad V_{\text{dx}}(\Delta) &\equiv (\{1\} \cdot V(\psi_1)^\rightarrow \cdot \dots \cdot V(\psi_n)^\rightarrow)^\leftarrow. \end{aligned}$$

Alcune osservazioni sulla definizione. Innanzitutto possiamo dire che non vi è ambiguità grazie al fatto che l'operazione \cdot del monoide è associativa. Inoltre, qualunque sia il contesto considerato, sia $V_{\text{sx}}(\cdot)$ che $V_{\text{dx}}(\cdot)$ sono dei sottoinsiemi saturi sinistri di M .

Il fatto che in entrambi i prodotti compaia il sottoinsieme $\{1\}$ è un accorgimento che ci permette di valutare anche i contesti vuoti. Infatti, nel caso di un contesto vuoto otteniamo:

$$V_{\text{sx}}([\]) = \{1\}^\rightarrow\leftarrow\leftarrow \qquad V_{\text{dx}}([\]) = \{1\}^\leftarrow$$

e questo è coerente con la valutazione delle costanti 1 e \perp del linguaggio \mathcal{L} . Infatti, le equazioni definitorie ci dicono che la costante 1 rappresenta il contesto vuoto a sinistra e la costante \perp il contesto vuoto a destra; con queste definizioni abbiamo portato questa equivalenza anche a livello semantico: la valutazione di 1 coincide con la valutazione del vuoto a sinistra, la valutazione di \perp coincide con la valutazione del vuoto a destra.

Nel caso, invece, che il contesto contenga almeno una formula la presenza di $\{1\}$ nel prodotto non è influente, infatti $\{1\}$ si comporta da elemento neutro per il prodotto tra sottoinsiemi: per ogni $A \subseteq M$, $\{1\} \cdot A = A \cdot \{1\} = A$.

In particolare, se il contesto contiene una sola formula (i.e. $\Gamma = \Delta = \varphi$) le due valutazioni, sinistra e destra, coincidono con la valutazione della formula stessa: $V_{\text{sx}}(\Gamma) = V_{\text{dx}}(\Delta) = V(\varphi)$, basta ricordare che $V(\varphi)$ è saturo sinistro.

Se invece, il contesto è formato da due formule, $\Sigma = \varphi, \psi$, la valutazione sinistra (che valuta la virgola sinistra) coincide con la valutazione del \otimes che, come abbiamo già osservato, corrisponde proprio alla virgola a sinistra tra due formule; mentre la valutazione a destra (che valuta la virgola a destra) coincide con la valutazione del \wp che, simmetricamente, corrisponde alla virgola a destra tra due formule. Abbiamo rispettato quanto abbiamo anticipato introducendo la valutazione dei moltiplicativi \otimes e \wp .

Siamo finalmente in grado di stabilire quando un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ sia valido in un monoide con relazione. Il simbolo \vdash verrà interpretato come l'inclusione tra i saturi che sono individuati dai due contesti che compongono il sequente. Abbiamo scelto di dare l'inclusione tra i saturi sinistri, sarebbe stato equivalente dare l'inclusione tra i corrispondenti saturi destri: bastava cambiare il verso della inclusione stessa.

Definizione 2.6. Validità di un sequente. *Sia \mathcal{M} un monoide con relazione e siano fissati i valori della valutazione $V(\cdot)$ sulle formule atomiche. Diremo che il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è valido in \mathcal{M} se*

$$V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta).$$

Ora abbiamo tutto ciò che ci serve per enunciare e dimostrare il seguente

Teorema 2.1. di Validità. *Sia dato \mathcal{M} monoide con relazione e si fissino ad arbitrio i valori della funzione $V(\cdot)$ sulle formule atomiche. Se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{B}^- allora $\Gamma \vdash \Delta$ è valido in \mathcal{M} .*

Dimostrazione. Innanzitutto per non appesantire la dimostrazione, considerato un contesto $\Sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ con $n \geq 0$, possiamo definire:

$$\begin{aligned} V[\Sigma] &\equiv \{1\} \cdot V(\sigma_1) \cdot \dots \cdot V(\sigma_n); \\ V^\rightarrow[\Sigma] &\equiv \{1\} \cdot V(\sigma_1)^\rightarrow \cdot \dots \cdot V(\sigma_n)^\rightarrow. \end{aligned}$$

Un'osservazione che ci sarà utile in seguito è la seguente:

$$V[\Sigma_1] \cdot V[\Sigma_2] = V[\Sigma_1, \Sigma_2]; \quad V^\rightarrow[\Sigma_1] \cdot V^\rightarrow[\Sigma_2] = V^\rightarrow[\Sigma_1, \Sigma_2];$$

e inoltre, presi due contesti Γ, Δ :

$$V_{\text{sx}}(\Gamma) = (V[\Gamma])^\rightarrow{}^\leftarrow{}; \quad V_{\text{dx}}(\Delta) = (V^\rightarrow[\Delta])^\leftarrow{}.$$

Per dimostrare il teorema ci basta provare che gli assiomi del calcolo \mathbf{B}^- sono validi in \mathcal{M} e che tutte le regole di \mathbf{B}^- preservano la validità. Procediamo con ordine.

- Assiomi: $V_{\text{sx}}(\varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi)$, cioè $V(\varphi) \subseteq V(\varphi)$ è verificato per quanto abbiamo osservato subito dopo la definizione 2.5.

- $\otimes L$ (\otimes -formazione):
$$\frac{V_{\text{sx}}(\psi, \varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V_{\text{sx}}(\psi \otimes \varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}$$
 è verificata perché $V_{\text{sx}}(\psi, \varphi) \equiv (\{1\} \cdot V(\psi) \cdot V(\varphi))^{\rightarrow\leftarrow} = V(\psi \otimes \varphi)$.

- $\wp R$ (\wp -formazione):
$$\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi, \psi)}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi \wp \psi)}$$
 è verificata perché $V_{\text{dx}}(\varphi, \psi) = (\{1\} \cdot V(\varphi)^{\rightarrow} \cdot V(\psi)^{\rightarrow})^{\leftarrow} = V(\varphi \wp \psi)$.

- $\otimes R$ (\otimes -riflessione):
$$\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma_2) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi) \quad V_{\text{sx}}(\Gamma_1) \subseteq V_{\text{dx}}(\psi)}{V_{\text{sx}}(\Gamma_2, \Gamma_1) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi \otimes \psi)}$$

per verificarla basta sfruttare il lemma 2.1.b.I-II e la proprietà (2.3) del prodotto tra sottoinsiemi:

$$\frac{\frac{\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma_2) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi)}{(V[\Gamma_2])^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq V(\varphi)}}{V[\Gamma_2] \subseteq V(\varphi)} \quad \frac{\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma_1) \subseteq V_{\text{dx}}(\psi)}{(V[\Gamma_1])^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq V(\psi)}}{V[\Gamma_1] \subseteq V(\psi)}}{\frac{(V[\Gamma_2] \cdot V[\Gamma_1]) \subseteq V(\varphi) \cdot V(\psi)}{(V[\Gamma_2] \cdot V[\Gamma_1])^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq (V(\varphi) \cdot V(\psi))^{\rightarrow\leftarrow}}}}{V_{\text{sx}}(\Gamma_2, \Gamma_1) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi \otimes \psi)}$$

- $\wp L$ (\wp -riflessione):
$$\frac{V_{\text{sx}}(\psi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta_1) \quad V_{\text{sx}}(\varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta_2)}{V_{\text{sx}}(\psi \wp \varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta_1, \Delta_2)}$$

si verifica in modo simmetrico a $\otimes R$ passando dalla parte dei sottoinsiemi saturi destri, ricordando ancora il lemma 2.1.b.I-II e la proprietà (2.3) del prodotto tra sottoinsiemi; vediamo in dettaglio:

$$\frac{\frac{\frac{V_{\text{sx}}(\psi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta_1)}{V(\psi) \subseteq (V^{\rightarrow}[\Delta_1])^{\leftarrow}}}{V(\psi)^{\rightarrow} \supseteq (V^{\rightarrow}[\Delta_1])^{\leftarrow\rightarrow}} \quad \frac{\frac{V_{\text{sx}}(\varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta_2)}{V(\varphi) \subseteq (V^{\rightarrow}[\Delta_2])^{\leftarrow}}}{V(\varphi)^{\rightarrow} \supseteq (V^{\rightarrow}[\Delta_2])^{\leftarrow\rightarrow}}}{\frac{V(\psi)^{\rightarrow} \supseteq V^{\rightarrow}[\Delta_1] \quad V(\varphi)^{\rightarrow} \supseteq V^{\rightarrow}[\Delta_2]}{V(\psi)^{\rightarrow} \cdot V(\varphi)^{\rightarrow} \supseteq V^{\rightarrow}[\Delta_1] \cdot V^{\rightarrow}[\Delta_2]}}{\frac{(V(\psi)^{\rightarrow} \cdot V(\varphi)^{\rightarrow})^{\leftarrow} \subseteq (V^{\rightarrow}[\Delta_1] \cdot V^{\rightarrow}[\Delta_2])^{\leftarrow}}{V_{\text{sx}}(\psi \wp \varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta_1, \Delta_2)}}$$

- $1L$ (1-formazione):
$$\frac{V_{\text{sx}}([\]) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V_{\text{sx}}(1) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}$$
 è verificata grazie al fatto che $V_{\text{sx}}([\]) \equiv \{1\}^{\rightarrow\leftarrow} \equiv V(1)$.

- $\perp R$ (\perp -formazione):
$$\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}([\])}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\perp)}$$

è verificata grazie al fatto che $V_{\text{dx}}([\]) \equiv \{1\}^{\leftarrow} \equiv V(\perp)$.

- $\perp L$ (\perp -riflessione):
$$V_{\text{sx}}(\perp) \subseteq V_{\text{dx}}([\])$$

vedi $\perp R$.

- $1R$ (1-riflessione):
$$V_{\text{sx}}([\]) \subseteq V_{\text{dx}}(1)$$

vedi $1L$.

- $\& R$ ($\&$ -formazione):
$$\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi) \quad V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\psi)}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi \& \psi)}$$

si verifica facilmente con le proprietà dell'intersezione tra sottoinsiemi:

$$\frac{\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi) \quad V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\psi)}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V(\varphi) \cap V(\psi)}}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi \& \psi)}$$

- $\oplus L$ (\oplus -formazione):
$$\frac{V_{\text{sx}}(\psi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta) \quad V_{\text{sx}}(\varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V_{\text{sx}}(\psi \oplus \varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}$$

si può facilmente verificare con le proprietà dell'unione tra sottoinsiemi³:

$$\frac{\frac{\frac{V_{\text{sx}}(\psi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta) \quad V_{\text{sx}}(\varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V(\psi) \cup V(\varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}}{(V(\psi) \cup V(\varphi))^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}}{V_{\text{sx}}(\psi \oplus \varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}$$

- $\& L$ ($\&$ -riflessione):
$$\frac{V_{\text{sx}}(\psi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V_{\text{sx}}(\psi \& \varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)} \quad \frac{V_{\text{sx}}(\varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V_{\text{sx}}(\psi \& \varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}$$

sono immediate, basta osservare che $V(\psi \& \varphi)$ è contenuta sia in $V(\psi)$ che in $V(\varphi)$.

³Per sottolineare la simmetria con $\&$ e il fatto che consideriamo il \oplus come intersezione tra saturi destri, sfruttando la proposizione 2.5.c.1 si può verificare anche:

$$\frac{\frac{\frac{V_{\text{sx}}(\psi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V(\psi)^{\rightarrow} \supseteq V_{\text{dx}}(\Delta)^{\rightarrow}} \quad \frac{V_{\text{sx}}(\varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V(\varphi)^{\rightarrow} \supseteq V_{\text{dx}}(\Delta)^{\rightarrow}}}{V(\psi)^{\rightarrow} \cap V(\varphi)^{\rightarrow} \supseteq V_{\text{dx}}(\Delta)^{\rightarrow}}}{(V(\psi)^{\rightarrow} \cap V(\varphi)^{\rightarrow})^{\leftarrow} \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)^{\leftarrow}}{V_{\text{sx}}(\psi \oplus \varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}$$

- $\oplus R$ (\oplus -riflessione):
$$\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi)}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi \oplus \psi)} \quad \frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\psi)}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi \oplus \psi)}$$
 sono immediate, basta osservare che⁴ $V(\varphi)$ e $V(\psi)$ sono entrambe contenute in $V(\varphi \oplus \psi)$.

- $\top R$ (\top -formazione): $V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\top)$
è verificata perché $V_{\text{dx}}(\top) = V(\top) = M$ è il massimo dei saturi sinistri.

- $0L$ (0 -formazione): $V_{\text{sx}}(0) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)$
è verificata perché $V_{\text{sx}}(0) = v(0) = \emptyset \rightarrow \leftarrow$ è il minimo dei saturi sinistri.

- $cutL$:
$$\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi) \quad V_{\text{sx}}(\Gamma_1, \varphi, \Gamma_2) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V_{\text{sx}}(\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}$$

si verifica in maniera analoga a $\otimes L$, basta sfruttare il lemma 2.1.b.I-II e la proprietà (2.3) del prodotto tra sottoinsiemi:

$$\frac{\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\varphi)}{(V[\Gamma]) \rightarrow \leftarrow \subseteq V(\varphi)} \quad \frac{V_{\text{sx}}(\Gamma_1, \varphi, \Gamma_2) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{(V[\Gamma_1] \cdot V(\varphi) \cdot V[\Gamma_2]) \rightarrow \leftarrow \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}}{V[\Gamma] \subseteq V(\varphi) \quad V[\Gamma_1] \cdot V(\varphi) \cdot V[\Gamma_2] \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)} \quad \frac{V[\Gamma_1] \cdot V[\Gamma] \cdot V[\Gamma_2] \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{(V[\Gamma_1] \cdot V[\Gamma] \cdot V[\Gamma_2]) \rightarrow \leftarrow \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}}{V_{\text{sx}}(\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}$$

- $cutR$:
$$\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta_2, \varphi, \Delta_1) \quad V_{\text{sx}}(\varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta_2, \Delta, \Delta_1)}$$

anche questo si dimostra in modo simmetrico a $cutL$, passando dalla parte dei saturi destri e sfruttando il lemma 2.1.b.I-II e la proprietà (2.3) del prodotto tra sottoinsiemi:

$$\frac{\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta_2, \varphi, \Delta_1)}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq (V \rightarrow [\Delta_2] \cdot V(\varphi) \rightarrow \cdot V \rightarrow [\Delta_1]) \leftarrow} \quad \frac{V_{\text{sx}}(\varphi) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V(\varphi) \subseteq (V \rightarrow [\Delta]) \leftarrow}}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \rightarrow \supseteq (V \rightarrow [\Delta_2] \cdot V(\varphi) \rightarrow \cdot V \rightarrow [\Delta_1]) \leftarrow \rightarrow} \quad \frac{V(\varphi) \rightarrow \supseteq (V \rightarrow [\Delta]) \leftarrow \rightarrow}{V(\varphi) \rightarrow \supseteq V \rightarrow [\Delta]}}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \rightarrow \supseteq V \rightarrow [\Delta_2] \cdot V(\varphi) \rightarrow \cdot V \rightarrow [\Delta_1]} \quad \frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \rightarrow \supseteq V \rightarrow [\Delta_2] \cdot V \rightarrow [\Delta] \cdot V \rightarrow [\Delta_1]}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq (V \rightarrow [\Delta_2] \cdot V \rightarrow [\Delta] \cdot V \rightarrow [\Delta_1]) \leftarrow}}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta_2, \Delta, \Delta_1)}$$

□

⁴Anche questo caso è dimostrabile sfruttando la simmetria con $\&$ pensando all'intersezione tra saturi destri.

2.3 Completezza

La dimostrazione del teorema di completezza si basa sulla costruzione di un particolare monoide, che chiameremo *modello sintattico*, in cui possano essere interpretate le formule di \mathcal{L} in modo che per ogni sequente il fatto di essere valido in tale modello coincida col fatto di essere derivabile in \mathbf{B}^- . Il modello che cerchiamo è in pratica già stato definito: è stata la nostra idea guida nella definizione della semantica. Se per ogni formula vogliamo considerare i possibili antecedenti, o i possibili conseguenti, dobbiamo lavorare con i contesti, ovvero con le liste delle formule generabili da \mathcal{L} . La relazione sarà invece la derivabilità in \mathbf{B}^- . Vediamolo formalmente.

Definizione 2.7. Modello sintattico. *Definiamo modello sintattico il monoide con relazione $\mathbb{F} \equiv (Frm^*, \circ, [], \vdash_{\mathbf{B}^-})$, dove:*

- Frm^* è l'insieme di tutte le liste finite e ordinate che si possono formare con le formule di \mathbf{B}^- (lista vuota compresa).
- \circ è l'operazione di concatenazione tra due liste; i.e. se Γ_1 e Γ_2 sono liste, allora $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \equiv \Gamma_1, \Gamma_2$.
- $[]$ è la lista vuota.
- la relazione $\vdash_{\mathbf{B}^-}$ è la derivabilità in \mathbf{B}^- ; i.e. $\Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta$ sse $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{B}^- .

Si può facilmente verificare che \mathbb{F} è effettivamente un monoide con relazione; infatti la concatenazione tra due liste ordinate è un'operazione banalmente associativa, inoltre $[]$ è proprio il suo elemento neutro: infatti per ogni lista Γ finita e ordinata di formule vale $\Gamma, [] = [], \Gamma = \Gamma$.

Anche in \mathbb{F} , allora, possiamo definire i due operatori $(\cdot)^\leftarrow$ e $(\cdot)^\rightarrow$; vediamo come lavorano sui sottoinsiemi di Frm^* :

$$\mathcal{P}(Frm^*) \begin{array}{c} \xrightarrow{(\cdot)^\rightarrow} \\ \xleftarrow{(\cdot)^\leftarrow} \end{array} \mathcal{P}(Frm^*)$$

Consideriamo una lista di formule Σ , la definizione 2.2 ci dice che:

$$\{\Sigma\}^\rightarrow = \{\Delta \in Frm^* : \Sigma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta\} \quad \text{conseguenti di } \Sigma; \quad (2.4)$$

$$\{\Sigma\}^\leftarrow = \{\Gamma \in Frm^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Sigma\} \quad \text{antecedenti di } \Sigma. \quad (2.5)$$

Considerando in generale $A, B \subseteq Frm^*$, si ottiene:

$$A^\rightarrow = \{\Delta \in Frm^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta \text{ per ogni } \Gamma \in A\}; \quad (2.6)$$

$$B^\leftarrow = \{\Gamma \in Frm^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta \text{ per ogni } \Delta \in B\}. \quad (2.7)$$

Finalmente possiamo formalizzare quanto abbiamo anticipato: considerata una formula φ , la sua saturazione sinistra è formata da tutti e soli i suoi antecedenti, mentre la sua saturazione destra è costituita da tutti e soli i suoi conseguenti.

Lemma 2.4. *Per ogni formula φ di \mathbf{B}^- vale:*

$$a. \{\varphi\}^{\rightarrow\leftarrow} = \{\varphi\}^{\leftarrow};$$

$$b. \{\varphi\}^{\leftarrow\rightarrow} = \{\varphi\}^{\rightarrow}.$$

Dimostrazione. Vediamo con ordine i due casi.

Caso *a.*

$$\begin{aligned} \Gamma \in \{\varphi\}^{\rightarrow\leftarrow} & \text{ sse } \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta \text{ per ogni } \Delta \in \{\varphi\}^{\rightarrow} \\ & \text{ sse } \frac{\varphi \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta} \text{ per ogni } \Delta \\ & \text{ sse } \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \varphi \text{ (un verso vale perché } \varphi \vdash \varphi, \text{ l'altro usa un } cut) \\ & \text{ sse } \Gamma \in \{\varphi\}^{\leftarrow} \end{aligned}$$

Caso *b.*

$$\begin{aligned} \Delta \in \{\varphi\}^{\leftarrow\rightarrow} & \text{ sse } \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta \text{ per ogni } \Gamma \in \{\varphi\}^{\leftarrow} \\ & \text{ sse } \frac{\Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \varphi}{\Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta} \text{ per ogni } \Gamma \\ & \text{ sse } \varphi \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta \text{ (un verso vale perché } \varphi \vdash \varphi, \text{ l'altro usa un } cut) \\ & \text{ sse } \Delta \in \{\varphi\}^{\rightarrow}. \end{aligned}$$

□

Durante la dimostrazione del lemma, al penultimo passaggio di ogni punto, abbiamo sfruttato due equivalenze molto importanti nel calcolo \mathbf{B}^- . Esse si possono derivare come casi particolari di una proprietà più generale del calcolo, vediamola insieme visto che ci sarà utile in seguito.

Lemma 2.5. *Grazie agli assiomi e alle regole di taglio, nel calcolo \mathbf{B}^- si verificano le seguenti equivalenze:*

a. per ogni Δ ed $m \geq 1$ sono equivalenti:

- I. $\varphi_1, \dots, \varphi_m \vdash \Delta$;
- II. $\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \dots \Gamma_m \vdash \varphi_m}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m \vdash \Delta}$ per ogni $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$.

b. per ogni Γ ed $n \geq 1$ sono equivalenti:

- I. $\Gamma \vdash \psi_1, \dots, \psi_n$;
- II. $\frac{\psi_1 \vdash \Delta_1 \ \dots \ \psi_n \vdash \Delta_n}{\Gamma \vdash \Delta_1, \dots, \Delta_n}$ per ogni $\Delta_1, \dots, \Delta_n$.

Dimostrazione. a. Se vale I. allora posso concludere II. usando m tagli a sinistra:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \quad \varphi_1, \dots, \varphi_m \vdash \Delta}{\Gamma_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \vdash \Delta} \text{ cutL}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\Gamma_m \vdash \varphi_m \quad \Gamma_1, \dots, \Gamma_{m-1}, \varphi_m \vdash \Delta}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m \vdash \Delta} \text{ cutL}$$

Viceversa, se vale II. si banalizzano le ipotesi con gli assiomi $\varphi_i \vdash \varphi_i$ ($i = 1, \dots, m$) e si ottiene I. Il caso b. è simmetrico: un verso si dimostra usando n tagli a destra, l'altro banalizzando ancora le ipotesi considerando gli assiomi $\psi_i \vdash \psi_i$ ($i = 1, \dots, n$). \square

Nel caso di contesti con due formule, questa equivalenza coinvolge anche i connettivi moltiplicativi \otimes e \wp , considerando direttamente le loro equazioni definitorie.

Lemma 2.6. Segmento moltiplicativo. *Considerando il segmento moltiplicativo di \mathbf{B}^- , si possono vedere i seguenti gruppi di equivalenze.*

a. Per ogni Δ sono equivalenti:

- I. $\psi \otimes \varphi \vdash \Delta$;
- II. $\psi, \varphi \vdash \Delta$;
- III. $\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \quad \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}$ per ogni Γ_1, Γ_2 .

b. per ogni Γ sono equivalenti:

- I. $\Gamma \vdash \varphi \wp \psi$;
- II. $\Gamma \vdash \varphi, \psi$;
- III. $\frac{\varphi \vdash \Delta_1 \quad \psi \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}$ per ogni Δ_1, Δ_2 .

Dimostrazione. a. La prima equivalenza (I. sse II.) è proprio l'equazione definitoria per il \otimes . La seconda (II. sse III.) è un caso particolare del precedente lemma 2.5 con $m = 2$. Il caso b. è analogo. \square

Passiamo ora alla valutazione delle formule di \mathcal{L} in \mathbb{F} . Valuteremo ogni formula atomica nel sottoinsieme di \mathbb{F} formato da tutti e soli i suoi antecedenti, che, come abbiamo visto nel lemma 2.4, è un saturo sinistro. Tale scelta verrà rispettata per qualsiasi formula di \mathcal{L} , ovvero ogni la valutazione di ogni formula sarà il saturo sinistro formato dai suoi antecedenti. Ovviamente il saturo destro associato ad ogni formula sarà proprio il sottoinsieme formato da tutti e soli i suoi conseguenti. Vediamolo in dettaglio.

Lemma 2.7. di valutazione canonica per le formule in \mathbb{F} . *Se si valuta \mathbf{B}^- in \mathbb{F} scegliendo $V(p) \equiv \{p\}^\leftarrow$ per ogni formula atomica p , allora per ogni formula φ di \mathbf{B}^- vale:*

$$V(\varphi) = \{\varphi\}^\leftarrow.$$

Dimostrazione. Innanzi tutto, grazie al precedente lemma 2.4, possiamo facilmente osservare che per ogni formula φ di \mathcal{L} vale la seguente equivalenza:

$$V(\varphi) = \{\varphi\}^\leftarrow \quad \text{sse} \quad V(\varphi)^\rightarrow = \{\varphi\}^\rightarrow. \quad (2.8)$$

Grazie a questo fatto, nella dimostrazione del lemma potremo verificare l'una o l'altra identità a seconda di quella che ci sarà più comoda.

Per dimostrare il lemma procediamo per induzione sulla struttura delle formule. Il passo base è verificato per ipotesi sulle formule atomiche, vediamo sulle costanti.

Caso $\varphi = \top$. $V(\top) \equiv Frm^* = \{\Gamma \in Frm^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \top\} = \{\top\}^\leftarrow$ secondo l'equazione definitoria di \top .

Caso $\varphi = 0$. $V(0)^\rightarrow \equiv \emptyset^\rightarrow = (Frm^*)^{\leftarrow\rightarrow} = Frm^* = \{\Delta \in Frm^* : 0 \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta\} = \{0\}^\rightarrow$ secondo l'equazione definitoria di 0 .

Caso $\varphi = \perp$. $V(\perp) \equiv \{[\]\}^\leftarrow = \{\Gamma \in Frm^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \perp\} = \{\Gamma \in Frm^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \perp\} = \{\perp\}^\leftarrow$ secondo l'equazione definitoria di \perp .

Caso $\varphi = 1$. $V(1)^\rightarrow \equiv \{[\]\}^{\leftarrow\rightarrow} = \{\Delta \in Frm^* : \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta\} = \{\Delta \in Frm^* : 1 \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta\} = \{1\}^\rightarrow$ secondo l'equazione definitoria di 1 .

Vediamo il passo induttivo, verificando i connettivi.

Caso $\varphi \wp \psi$.

$$\begin{aligned} V(\varphi \wp \psi) &\equiv (V(\varphi)^\rightarrow \circ V(\psi)^\rightarrow)^\leftarrow \\ &= \{\Delta_1, \Delta_2 : \Delta_1 \in V(\varphi)^\rightarrow \text{ e } \Delta_2 \in V(\psi)^\rightarrow\}^\leftarrow \\ &= \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta_1, \Delta_2 \text{ per ogni } \Delta_1 \in V(\varphi)^\rightarrow \text{ e } \Delta_2 \in V(\psi)^\rightarrow\} \\ &\quad \text{per definizione di } (\cdot)^\leftarrow \\ &= \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta_1, \Delta_2 \text{ per ogni } \Delta_1, \Delta_2 \text{ t.c. } \varphi \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta_1 \text{ e } \psi \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta_2\} \\ &\quad \text{per ipotesi induttiva} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \varphi \wp \psi\} \\
&\quad \text{per il lemma 2.6.b} \\
&= \{\varphi \wp \psi\}^{\leftarrow} \quad \text{per (2.5)}.
\end{aligned}$$

Caso $\psi \otimes \varphi$.

$$\begin{aligned}
V(\psi \otimes \varphi)^{\rightarrow} &\equiv (V(\psi) \circ V(\varphi))^{\rightarrow \leftarrow \rightarrow} \\
&= \{\Gamma_1, \Gamma_2 : \Gamma_1 \in V(\psi) \text{ e } \Gamma_2 \in V(\varphi)\}^{\rightarrow} \\
&= \{\Delta : \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta \text{ per ogni } \Gamma_1 \in V(\psi) \text{ e } \Gamma_2 \in V(\varphi)\} \\
&\quad \text{per definizione di } (\cdot)^{\rightarrow} \\
&= \{\Delta : \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta \text{ per ogni } \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ t.c. } \Gamma_1 \vdash_{\mathbf{B}^-} \psi \text{ e } \Gamma_2 \vdash_{\mathbf{B}^-} \varphi\} \\
&\quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \{\Delta : \psi \otimes \varphi \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta\} \\
&\quad \text{per il lemma 2.6.a} \\
&= \{\psi \otimes \varphi\}^{\rightarrow} \quad \text{per la propriet\`a (2.4)}.
\end{aligned}$$

Caso $\varphi \& \psi$.

$$\begin{aligned}
V(\varphi \& \psi) &\equiv V(\varphi) \cap V(\psi) \\
&= \{\Gamma : \Gamma \in V(\varphi) \text{ e } \Gamma \in V(\psi)\} \\
&= \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \varphi \text{ e } \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \psi\} \\
&\quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \varphi \& \psi\} \\
&\quad \text{secondo l'equazione definitoria di } \& \\
&= \{\varphi \& \psi\}^{\leftarrow} \quad \text{per la propriet\`a (2.5)}.
\end{aligned}$$

Caso $\psi \oplus \varphi$.

$$\begin{aligned}
V(\psi \oplus \varphi)^{\rightarrow} &\equiv (V(\varphi) \cup V(\psi))^{\rightarrow \leftarrow \rightarrow} \\
&= V(\varphi)^{\rightarrow} \cap V(\psi)^{\rightarrow} \\
&\quad \text{per le proposizioni 2.3 e 2.5.b.1} \\
&= \{\Delta : \Delta \in V(\psi)^{\rightarrow} \text{ e } \Delta \in V(\varphi)^{\rightarrow}\} \\
&= \{\Delta : \psi \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta \text{ e } \varphi \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta\} \\
&\quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \{\Delta : \psi \oplus \varphi \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta\} \\
&\quad \text{secondo l'equazione definitoria di } \oplus \\
&= \{\psi \oplus \varphi\}^{\rightarrow} \quad \text{per la propriet\`a (2.4)}.
\end{aligned}$$

□

In particolare si noti che il saturo destro associato ad ogni formula φ , ottenibile considerando $V(\varphi)^\rightarrow$, è proprio il sottoinsieme formato dai conseguenti di φ : tutte le nostre intuizioni sono rispettate.

Veniamo, infine, alla valutazione dei contesti: l'ultimo passo per arrivare al teorema di completezza. La valutazione di un contesto sinistro sarà la chiusura del singoletto contenente il contesto stesso, mentre la valutazione di un contesto destro sarà proprio il sottoinsieme di \mathbb{F} costituito da tutti e soli gli antecedenti del contesto.

Lemma 2.8. di valutazione canonica per i contesti. *Se si valuta \mathbf{B}^- in \mathbb{F} scegliendo $V(p) \equiv \{p\}^\leftarrow$ per ogni formula atomica p , allora per ogni contesto Σ vale:*

$$V_{\text{sx}}(\Sigma) = \{\Sigma\}^{\rightarrow\leftarrow} \quad e \quad V_{\text{dx}}(\Sigma) = \{\Sigma\}^\leftarrow.$$

Dimostrazione. Nel caso che $\Sigma = []$ il lemma è verificato secondo la definizione 2.5 ricordando che l'unità del modello sintattico è proprio il contesto vuoto, se invece $\Sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_m$ con $m \geq 1$ allora:

$$\begin{aligned} V_{\text{sx}}(\Sigma) &\equiv (\{[]\} \circ V(\sigma_1) \circ \dots \circ V(\sigma_m))^{\rightarrow\leftarrow} \\ &= \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m : \Gamma_1 \in V(\sigma_1), \dots, \Gamma_m \in V(\sigma_m)\}^{\rightarrow\leftarrow} \\ &= \{\Delta : \Gamma_1, \dots, \Gamma_m \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta \text{ per ogni } \Gamma_1 \in V(\sigma_1), \dots, \Gamma_m \in V(\sigma_m)\}^\leftarrow \\ &\quad \text{per definizione di } (\cdot)^\rightarrow \\ &= \{\Delta : \Gamma_1, \dots, \Gamma_m \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta \text{ per ogni } \Gamma_1 \vdash_{\mathbf{B}^-} \sigma_1, \dots, \Gamma_m \vdash_{\mathbf{B}^-} \sigma_m\}^\leftarrow \\ &\quad \text{per il lemma 2.7} \\ &= \{\Delta : \Sigma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta\}^\leftarrow \\ &\quad \text{per lemma 2.5.a} \\ &= \{\Sigma\}^{\rightarrow\leftarrow} \quad \text{per definizione di } (\cdot)^\rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{dx}}(\Sigma) &\equiv (\{[]\} \circ V(\sigma_1)^\rightarrow \circ \dots \circ V(\sigma_m)^\rightarrow)^\leftarrow \\ &= \{\Delta_1, \dots, \Delta_m : \Delta_1 \in V(\sigma_1)^\rightarrow, \dots, \Delta_m \in V(\sigma_m)^\rightarrow\}^\leftarrow \\ &= \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta_1, \dots, \Delta_m \text{ per ogni } \Delta_1 \in V(\sigma_1)^\rightarrow, \dots, \Delta_m \in V(\sigma_m)^\rightarrow\}^\leftarrow \\ &\quad \text{per definizione di } (\cdot)^\leftarrow \\ &= \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta_1, \dots, \Delta_m \text{ per ogni } \sigma_1 \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta_1, \dots, \sigma_m \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta_m\}^\leftarrow \\ &\quad \text{per il lemma 2.7} \\ &= \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Sigma\}^\leftarrow \\ &\quad \text{per il lemma 2.5.b} \\ &= \{\Sigma\}^\leftarrow \quad \text{per definizione di } (\cdot)^\leftarrow \end{aligned}$$

□

Tutte queste premesse ci portano finalmente al seguente

Teorema 2.2. di Completezza. *Il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{B}^- se e solo se $\Gamma \vdash \Delta$ è valido in ogni monoide con relazione, comunque si scelga la valutazione $V(\cdot)$ sulle formule atomiche.*

Dimostrazione. Un verso è dato dal teorema 2.1 di validità. Viceversa, sia $\Gamma \vdash \Delta$ valido in ogni monoide con relazione comunque si scelga la valutazione $V(\cdot)$ sulle formule atomiche; in particolare vale $V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)$ nel modello sintattico \mathbb{F} ponendo $V(p) \equiv \{p\}^{\leftarrow}$ per ogni formula atomica p , secondo il lemma 2.8 questo significa che $\{\Gamma\}^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq \{\Delta\}^{\leftarrow}$, ma $(\cdot)^{\rightarrow\leftarrow}$ è un operatore di chiusura, quindi $\Gamma \in \{\Gamma\}^{\rightarrow\leftarrow}$: possiamo concludere che $\Gamma \in \{\Delta\}^{\leftarrow}$ e infine $\Gamma \vdash_{\mathbf{B}^-} \Delta$, come volevasi dimostrare. \square

2.4 Estensioni di \mathbf{B}^-

Come è mostrato in [15], possiamo estendere il calcolo \mathbf{B}^- aggiungendo regole strutturali che agiscono sui contesti di un sequente. Possiamo ottenere diverse logiche di base strutturate semplicemente richiedendo che siano valide su \mathbf{B}^- alcune tra le seguenti regole: scambio (e : exchange), contrazione (c : contraction) e indebolimento (w : weakening). Vediamole in dettaglio

$$\text{Scambio:} \quad \frac{\Gamma_1, \Sigma, \Pi, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Pi, \Sigma, \Gamma_2 \vdash \Delta} eL \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \Pi, \Sigma, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Sigma, \Pi, \Delta_2} eR$$

$$\text{Contrazione:} \quad \frac{\Gamma_1, \Sigma, \Sigma, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Sigma, \Gamma_2 \vdash \Delta} cL \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \Sigma, \Sigma, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Sigma, \Delta_2} cR$$

$$\text{Indebolimento:} \quad \frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Sigma, \Gamma_2 \vdash \Delta} wL \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Sigma, \Delta_2} wR$$

Quando estenderemo \mathbf{B}^- indicheremo le regole aggiunte al calcolo segnando come indice di \mathbf{B}^- le rispettive lettere e , c , w che le individuano. Ad esempio \mathbf{B}_e^- è il calcolo commutativo, mentre \mathbf{B}_{ew}^- è il calcolo \mathbf{B}^- con le regole scambio e indebolimento.

Per trovare delle semantiche complete anche per queste logiche possiamo ancora considerare i monoidi con relazione $\mathcal{M} \equiv (M, \cdot, 1, R)$, ma dobbiamo richiedere ulteriori proprietà sulla relazione o sul prodotto. Ognuna di queste proprietà individua una estensione, (e) (c) (w), del calcolo, vediamole tutte insieme:

(e) L'operazione \cdot è commutativa, cioè $x \cdot y = y \cdot x$ per ogni $x \in M$.

(c) Per la relazione R e l'operazione \cdot valgono:

$$\frac{(x_1 \cdot z \cdot z \cdot x_2) R y}{(x_1 \cdot z \cdot x_2) R y} (c_1) \qquad \frac{x R (y_1 \cdot z \cdot z \cdot y_2)}{x R (y_1 \cdot z \cdot y_2)} (c_2)$$

(w) Per la relazione R e l'operazione \cdot valgono:

$$\frac{(x_1 \cdot x_2) R y}{(x_1 \cdot z \cdot x_2) R y} (w_1) \qquad \frac{x R (y_1 \cdot y_2)}{x R (y_1 \cdot z \cdot y_2)} (w_2)$$

Anche in questo caso, aggiungendo come indice di \mathcal{M} le lettere e , c e w indicheremo i monoidi con relazione \mathcal{M} nei quali valgano le proprietà (e), (c) e (w) rispettivamente. Ad esempio \mathcal{M}_e indica un monoide commutativo con relazione, mentre \mathcal{M}_{ec} indica un monoide con relazione in cui \cdot è un'operazione commutativa ed è verificata (c).

Ognuna delle proprietà sul monoide si riflette sulla semantica, rendendo valida una delle proprietà che possiamo aggiungere al calcolo \mathbf{B}^- . Con i prossimi quattro lemmi scorreremo le varie proprietà e vedremo le varie equivalenze, a livello semantico, con le varie regole di \mathbf{B}^- esteso. Tra parentesi scriveremo qual è la regola che la proprietà trattata riflette a livello semantico.

Lemma 2.9. (contrazione a sinistra) *In un monoide con relazione $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$, sono equivalenti:*

- a. Proprietà (c₁).
- b. Per ogni $a, b, c \in M$: $\{b \cdot a \cdot a \cdot c\}^\rightarrow \subseteq \{b \cdot a \cdot c\}^\rightarrow$.
- c. Per ogni $A, B, C \subseteq M$: $(B \cdot A \cdot A \cdot C)^\rightarrow \subseteq (B \cdot A \cdot C)^\rightarrow$.
- d. Per ogni $A, B, C \subseteq M$: $(B \cdot A \cdot C)^\rightarrow \subseteq (B \cdot A \cdot A \cdot C)^\rightarrow$.

Dimostrazione. b. non è altro che la riscrittura della proprietà (c₁) ricordando la definizione dell'operatore $(\cdot)^\rightarrow$. Da b. si ottiene c. ricordando la proprietà (2.2) e l'antimonotonia di $(\cdot)^\rightarrow$ in questo modo:

$$\begin{aligned} (B \cdot A \cdot A \cdot C)^\rightarrow &= \bigcap_{\substack{b \in B \\ a_1, a_2 \in A \\ c \in C}} \{b \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot c\}^\rightarrow \\ &\subseteq \bigcap_{\substack{b \in B \\ a \in A \\ c \in C}} \{b \cdot a \cdot a \cdot c\}^\rightarrow \subseteq \bigcap_{\substack{b \in B \\ a \in A \\ c \in C}} \{b \cdot a \cdot c\}^\rightarrow = (B \cdot A \cdot C)^\rightarrow. \end{aligned}$$

Il punto d . si ottiene da c . applicando $(\cdot)^\leftarrow$ e ricordando il lemma 2.1.II. Infine, il punto b . si ottiene da d . applicando $(\cdot)^\leftarrow$ con $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$ e ricordando ancora i lemmi 2.1.II e 2.2. \square

Lemma 2.10. (contrazione a destra) *In un monoide con relazione $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$, sono equivalenti:*

- a. Proprietà (c_2) .
- b. Per ogni $a, b, c \in M$: $\{b \cdot a \cdot a \cdot c\}^\leftarrow \subseteq \{b \cdot a \cdot c\}^\leftarrow$.
- c. Per ogni $A, B, C \subseteq M$: $(B \cdot A \cdot A \cdot C)^\leftarrow \subseteq (B \cdot A \cdot C)^\leftarrow$.
- d. Per ogni $A, B, C \subseteq M$: $(B \cdot A \cdot C)^{\leftrightarrow} \subseteq (B \cdot A \cdot A \cdot C)^{\leftrightarrow}$.

Dimostrazione. Analoga alla precedente. \square

Lemma 2.11. (indebolimento a sinistra) *In un monoide con relazione $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$ sono equivalenti:*

- a. Proprietà (w_1) .
- b. Per ogni $a, b, c \in M$: $\{b \cdot c\}^\rightarrow \subseteq \{b \cdot a \cdot c\}^\rightarrow$.
- c. Per ogni $A, B, C \subseteq M$: $(B \cdot C)^\rightarrow \subseteq (B \cdot A \cdot C)^\rightarrow$.
- d. Per ogni $A, B, C \subseteq M$: $(B \cdot A \cdot C)^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq (B \cdot C)^{\rightarrow\leftarrow}$.

Dimostrazione. b . è ancora la riscrittura della proprietà (w_1) ricordando la definizione dell'operatore $(\cdot)^\rightarrow$. Da b . si ottiene c . ricordando la proprietà (2.2) e l'antimonotonia di $(\cdot)^\rightarrow$ in questo modo:

$$(B \cdot C)^\rightarrow = \bigcap_{\substack{b \in B \\ c \in C}} \{b \cdot c\}^\rightarrow \subseteq \bigcap_{\substack{b \in B \\ a \in A \\ c \in C}} \{b \cdot a \cdot c\}^\rightarrow = (B \cdot A \cdot C)^\rightarrow.$$

Il punto d . si ottiene da c . applicando $(\cdot)^\leftarrow$ e ricordando il lemma 2.1.II. Infine, il punto b . si ottiene da d . applicando $(\cdot)^\leftarrow$ con $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$ e ricordando ancora i lemmi 2.1.II e 2.2. \square

Lemma 2.12. (indebolimento a destra) *In un monoide con relazione $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$ sono equivalenti:*

- a. Proprietà (w_2) .
- b. Per ogni $a, b, c \in M$: $\{b \cdot c\}^\leftarrow \subseteq \{b \cdot a \cdot c\}^\leftarrow$.

c. Per ogni $A, B, C \subseteq M$: $(B \cdot C)^\leftarrow \subseteq (B \cdot A \cdot C)^\leftarrow$.

d. Per ogni $A, B, C \subseteq M$: $(B \cdot A \cdot C)^{\leftrightarrow} \subseteq (B \cdot C)^{\leftrightarrow}$.

Dimostrazione. Analoga alla precedente. □

Grazie a questi risultati siamo ora in grado di estendere il risultato ottenuto con il teorema 2.2 per tutte le possibili estensioni di \mathbf{B}^- ottenibili con le regole strutturali. Possiamo formulare il seguente

Teorema 2.3. di Completezza per le Estensioni di \mathbf{B}^- . *Se indichiamo con σ una qualsiasi sequenza, anche vuota, delle lettere c, e, w , allora i monoidi \mathcal{M}_σ danno una semantica completa⁵ per il calcolo \mathbf{B}_σ^- .*

Dimostrazione. Il teorema è praticamente già stato dimostrato nei paragrafi precedenti, per completarlo ci basta dimostrare i nuovi casi che si trovano aggiungendo le regole strutturali a \mathbf{B}^- .

(e) Le regole di scambio sono valide in un monoide \mathcal{M}_e , grazie al fatto che l'operazione \cdot diventa commutativa anche tra sottoinsiemi. Per avere la completezza si può prendere come modello sintattico $\mathbb{F}_e \equiv (\text{Frm}_e^*, \circ, [], \vdash_e)$, il quale non è altro che il modello definito in 2.7 con questi aggiustamenti:

- Frm_e^* è l'insieme di tutte le liste finite e *non ordinate* che si possono formare con le formule di \mathcal{L} (lista vuota compresa).
- la relazione \vdash_e è la derivabilità in \mathbf{B}_e^- .

Si può facilmente verificare che \mathbb{F}_e è effettivamente un monoide con relazione di tipo \mathcal{M}_e ; infatti la concatenazione tra due liste non ordinate è un'operazione banalmente commutativa ed associativa, inoltre $[]$ è ancora il suo elemento neutro. Infine, anche la relazione \vdash_e è ben definita, perché il calcolo \mathbf{B}_e^- , grazie alle regole di scambio, non si preoccupa della posizione che hanno le formule all'interno dei contesti; infatti se $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{B}^- allora lo è anche $\Gamma' \vdash \Delta'$ dove Γ' è una qualunque permutazione di Γ , per *exchL*, e Δ' è una qualunque permutazione di Δ , per *exchR*.

⁵ Diciamo che una classe di strutture di tipo \mathcal{S} porge una semantica completa per un calcolo logico \mathbf{K} se per ogni Γ, Δ vale la proprietà: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{K} se e solo se $\Gamma \vdash \Delta$ è valido in ogni struttura di tipo \mathcal{S} comunque si scelga la valutazione $V(\cdot)$ sulle formule atomiche del linguaggio su cui è definito il calcolo.

- (c) Le regole di contrazione sono valide nei monoidi \mathcal{M}_c , lo si verifica facilmente considerando i lemmi 2.9 (per cL) e 2.10 (per cR). Come modello sintattico si può ancora considerare quello definito in 2.7 con la dimostrabilità in \mathbf{B}_c^- : la proprietà (c) è data proprio dalle due regole di contrazione.
- (w) Anche in questo caso si verifica con i lemmi 2.11 (per wL) e 2.12 (per wR) che le regole di indebolimento sono valide nei monoidi \mathcal{M}_w . Infine il modello sintattico di 2.7 con la relazione di dimostrabilità in \mathbf{B}_w^- ci porge ancora la completezza, essendo effettivamente un monoide \mathcal{M}_w grazie alle regole di indebolimento.

Appare infine ovvia la generalizzazione agli altri casi considerando una qualsiasi combinazione delle proprietà (e), (c) e (w). \square

Concentriamoci in particolare sul calcolo \mathbf{B}_{ecw}^- , ovvero il calcolo di base con tutte le regole strutturali che, per uniformità con [15], chiameremo \mathbf{BS}^- . Come dimostrato in [1] per tale calcolo i connettivi additivi ($\&$ e \oplus) e moltiplicativi (\otimes e \wp) si equivalgono a due a due: $\&$ soddisfa alle regole di \otimes e viceversa; \oplus soddisfa alle regole di \wp e viceversa. Connettivi additivi e moltiplicativi si confondono. Vediamo ora che succede la stessa cosa anche a livello semantico per le valutazioni di tali connettivi, ovviamente sui monoidi \mathcal{M}_{ecw} . A questo proposito è utile dimostrare il seguente.

Lemma 2.13. *In un monoide con relazione $\mathcal{M}_{ecw} = (M, \cdot, 1, R)$, per ogni $A_1, \dots, A_m \subseteq M$ e $B_1, \dots, B_n \subseteq M$, con $m, n \geq 1$ si verifica:*

- a.
 - I. $(A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow\leftarrow} = A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cap \dots \cap A_m^{\rightarrow\leftarrow}$;
 - II. $(B_1^{\leftarrow\rightarrow} \cdot \dots \cdot B_n^{\leftarrow\rightarrow})^{\leftarrow\rightarrow} = B_1^{\leftarrow\rightarrow} \cap \dots \cap B_n^{\leftarrow\rightarrow}$;
- b.
 - I. $(A_1^{\rightarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow})^{\leftarrow} = (A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cup \dots \cup A_m^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow\leftarrow}$;
 - II. $(B_1^{\leftarrow} \cdot \dots \cdot B_n^{\leftarrow})^{\rightarrow} = (B_1^{\leftarrow\rightarrow} \cup \dots \cup B_n^{\leftarrow\rightarrow})^{\leftarrow\rightarrow}$.

Dimostrazione. a.I. Grazie al lemma 2.11.d, con $C = \{1\}$, si ha $(A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq A_i^{\rightarrow\leftarrow}$ per ogni $i = 1, \dots, m$ e quindi $(A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow\leftarrow}) \subseteq A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cap \dots \cap A_m^{\rightarrow\leftarrow}$; viceversa da $A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cap \dots \cap A_m^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq A_i^{\rightarrow\leftarrow}$ per ogni $i = 1, \dots, m$ applicando la proprietà (2.3) otteniamo $(A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cap \dots \cap A_m^{\rightarrow\leftarrow}) \cdot \dots \cdot (A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cap \dots \cap A_m^{\rightarrow\leftarrow}) \subseteq A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow\leftarrow}$, da questo $((A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cap \dots \cap A_m^{\rightarrow\leftarrow}) \cdot \dots \cdot (A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cap \dots \cap A_m^{\rightarrow\leftarrow}))^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq (A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow\leftarrow}$ e infine $A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cap \dots \cap A_m^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq (A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow\leftarrow}$ ricordando il lemma 2.9.d e il fatto che intersezione di saturi è satura. Il caso a.II. è analogo, basta riferirsi ai lemmi 2.10 e 2.12.

b.I. Grazie al lemma 2.12.c, con $C = \{1\}$, si ha $A_i^{\leftarrow} \subseteq (A_1^{\rightarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow})^{\leftarrow}$ per ogni $i = 1, \dots, m$, quindi $A_1^{\leftarrow} \cup \dots \cup A_n^{\leftarrow} \subseteq (A_1^{\rightarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow})^{\leftarrow}$ e infine

$(A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cup \dots \cup A_n^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq (A_1^{\rightarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow})^{\leftarrow}$, ricordando che il secondo membro è saturo per la proposizione 2.3.a; viceversa da $A_i^{\rightarrow\leftarrow} \subseteq A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cup \dots \cup A_n^{\rightarrow\leftarrow}$ per ogni $i = 1, \dots, m$ si ottiene $(A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cup \dots \cup A_n^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow} \subseteq A_i^{\rightarrow}$ per ogni $i = 1, \dots, m$ ricordando l'antimonotonia di $(\cdot)^{\rightarrow}$, da qui, per la proprietà (2.3), si ha $(A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cup \dots \cup A_n^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow} \cdot \dots \cdot (A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cup \dots \cup A_n^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow} \subseteq A_1^{\rightarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow}$, quindi $(A_1^{\rightarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow})^{\leftarrow} \subseteq ((A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cup \dots \cup A_n^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow} \cdot \dots \cdot (A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cup \dots \cup A_n^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow})^{\leftarrow}$ per l'antimonotonia di $(\cdot)^{\leftarrow}$ e infine $(A_1^{\rightarrow} \cdot \dots \cdot A_m^{\rightarrow})^{\leftarrow} \subseteq (A_1^{\rightarrow\leftarrow} \cup \dots \cup A_n^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow\leftarrow}$ per il lemma 2.10.c. Il caso b.II. è analogo. \square

Grazie a questo risultato possiamo vedere quanto anticipato prima: in un monoide \mathcal{M}_{ecw} la valutazione di $\&$ coincide con la valutazione di \otimes e la valutazione di \oplus coincide con la valutazione di \wp . In dettaglio, consideriamo due formule φ, ψ di \mathbf{BS}^- :

$$\begin{aligned} V(\varphi \& \psi) &\equiv V(\varphi) \cap V(\psi) &= (V(\varphi) \cdot V(\psi))^{\rightarrow\leftarrow} &\equiv V(\varphi \otimes \psi); \\ V(\psi \oplus \varphi) &\equiv (V(\psi) \cup V(\varphi))^{\rightarrow\leftarrow} &= (V(\psi)^{\rightarrow} \cdot V(\varphi)^{\rightarrow})^{\leftarrow} &\equiv V(\psi \wp \varphi). \end{aligned}$$

Il lemma 2.13 ci dice di più anche per quanto riguarda i contesti non vuoti all'interno di un sequente di \mathbf{BS}^- . Il punto a.I. ci dice che la virgola nei contesti sinistri può essere considerata come una *congiunzione* ($\&$: intersezione delle rispettive valutazioni) di tutte le formule che compongono il contesto. Il punto b.I. ci dice, invece, che la virgola nei contesti destri può essere vista come *accorpamento* (\oplus : unione delle rispettive valutazioni) di tutte le formule che compongono il contesto stesso. Vediamo formalmente cosa significa tutto ciò, consideriamo un contesto $\Sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ con $n \geq 1$ allora:

$$\begin{aligned} V_{\text{sx}}(\Sigma) &\equiv (\{1\} \cdot V(\sigma_1) \cdot \dots \cdot V(\sigma_n))^{\rightarrow\leftarrow} &= V(\sigma_1) \cap \dots \cap V(\sigma_n); \\ V_{\text{dx}}(\Sigma) &\equiv (\{1\} \cdot V(\sigma_1)^{\rightarrow} \cdot \dots \cdot V(\sigma_n)^{\rightarrow})^{\leftarrow} &= (V(\sigma_1) \cup \dots \cup V(\sigma_n))^{\rightarrow\leftarrow}. \end{aligned}$$

Ovviamente, per quanto riguarda i contesti vuoti la valutazione non cambia: la valutazione del contesto vuoto a sinistra coincide con quella della costante 1, mentre la valutazione del contesto vuoto a destra coincide con quella della costante \perp . Vale la pena di fare una interessante osservazione per quanto riguarda le costanti. In \mathbf{BS}^- \top è equivalente a 1 e 0 è equivalente a \perp . Anche in \mathcal{M}_{ecw} la valutazione di \top coincide con quella di 1 e la valutazione di 0 coincide con quella di \perp . Vediamolo in dettaglio.

Lemma 2.14. *In un monoide \mathcal{M}_{ecw} valgono:*

- a. $V(\top) = V(1)$
- b. $V(\perp) = V(0)$

Dimostrazione. *a.* Ricordando le definizioni, le proprietà dei saturi, il lemma 2.13. *a.I* e il fatto che M è il massimo dei saturi sinistri, si vede subito: $V(\top) \equiv M = M \cdot \{1\} = M \cdot \{1\}^{\rightarrow\leftarrow} = (M \cdot \{1\}^{\rightarrow\leftarrow})^{\rightarrow\leftarrow} = M \cap \{1\}^{\rightarrow\leftarrow} = \{1\}^{\rightarrow\leftarrow} = V(1)$.

b. Analogamente al punto precedente, ricordando il lemma 2.13. *a.II* e il fatto che M è anche il massimo dei saturi destri: $V(0)^{\rightarrow} = \emptyset^{\rightarrow} = M^{\leftarrow\rightarrow} = M = M \cdot \{1\} = M \cdot \{1\}^{\leftarrow\rightarrow} = (M \cdot \{1\}^{\leftarrow\rightarrow})^{\leftarrow\rightarrow} = M \cap \{1\}^{\leftarrow\rightarrow} = \{1\}^{\leftarrow\rightarrow} = V(\perp)^{\rightarrow}$, e quindi $V(\perp) = V(0)$ grazie alla proposizione 2.5. \square

Capitolo 3

Semantica relazionale simmetrica

3.1 Monoidi simmetrici

Come visto nel capitolo 1, il calcolo \mathbf{B}^- è un calcolo squisitamente simmetrico, è naturale allora chiedersi se esista una semantica simmetrica per tale calcolo, ovvero, se si possa restringere la semantica di \mathbf{B} ai monoidi con relazione in cui la relazione R sia simmetrica¹. La risposta è affermativa a condizione che si abbandoni l'intuizione tra antecedenti e conseguenti di una formula introdotta al capitolo 2: dobbiamo cambiare la relazione nel modello sintattico. Infatti, la relazione definita in 2.7 non era esattamente simmetrica, ma piuttosto concordava con l'intuizione avuta per definire l'intera semantica.

Introdurremo una nuova semantica simmetrica adatta ad accogliere un'interpretazione per ciascuna delle logiche simmetriche ottenibili estendendo \mathbf{B} , in particolare per l'Ortologica Lineare e la Logica Lineare. Poiché tutte le estensioni che prenderemo in considerazione saranno commutative (i.e. vale per esse la regola di scambio), per uniformità di linguaggio ci conviene considerare il calcolo \mathbf{B}_e^- con le due regole di scambio. Non dovremo quindi preoccuparci dell'ordine con cui sono scritte le formule all'interno di un contesto.

Il teorema 1.1, che vale anche nel caso di \mathbf{B}_e^- , ci porge una chiave per definire una relazione simmetrica tra contesti. Se dati due contesti Γ, Δ poniamo $\Gamma R_s \Delta$ se e solo se $\Gamma \vdash \Delta^s$ è derivabile in \mathbf{B}_e^- ², troviamo una

¹Ricordiamo che una relazione R su un insieme M si dice simmetrica se per ogni $x, y \in M$ vale $x R y$ se e solo se $y R x$.

²Ovvero $\Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta$, seguendo le notazioni della definizione 2.7.

relazione simmetrica che ci permetterà di avere un buon modello sintattico per un teorema di completezza con i monoidi dotati di relazione simmetrica. Infatti, ricordando quanto visto al paragrafo 1.4, vale:

$$\Gamma R_s \Delta \quad \text{sse} \quad \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s \quad \text{sse} \quad \Delta^{ss} \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s \quad \text{sse} \quad \Delta \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s \quad \text{sse} \quad \Delta R_s \Gamma.$$

e questo significa proprio che la relazione R_s tra contesti è simmetrica.

Non apporteremo ulteriori cambiamenti alla semantica: la valutazione dei connettivi, delle costanti e dei contesti rimarranno le stesse delle definizioni 2.4 e 2.5.

Consideriamo, da qui sino alla fine del paragrafo, un monoide con relazione $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$ in cui l'operazione \cdot sia commutativa e la relazione R sia simmetrica, che chiameremo *monoide simmetrico*. La nuova proprietà di R ha delle importanti conseguenze sugli operatori $(\cdot)^\leftarrow$ e $(\cdot)^\rightarrow$. Vediamole con la seguente

Proposizione 3.1. *In un monoide con relazione $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$ sono equivalenti:*

- a. *la relazione R è simmetrica;*
- b. *per ogni $A \subseteq M$ vale: $A^\leftarrow = A^\rightarrow$.*

Dimostrazione. a. implica b. Sia $A \subseteq M$, allora ricordando la definizione 2.2:

$$\begin{aligned} A^\leftarrow &\equiv \{x \in M : x R y \text{ per ogni } y \in A\} \\ &= \{x \in M : y R x \text{ per ogni } y \in A\} \equiv A^\rightarrow. \end{aligned}$$

b. implica a. Se in particolare consideriamo $x \in M$, allora $\{x\}^\leftarrow = \{x\}^\rightarrow$, quindi considerato $y \in M$:

$$x R y \quad \text{sse} \quad y \in \{x\}^\rightarrow \quad \text{sse} \quad y \in \{x\}^\leftarrow \quad \text{sse} \quad y R x.$$

e quindi R è simmetrica. □

Tale proposizione afferma che in un monoide \mathcal{M} simmetrico i due operatori $(\cdot)^\leftarrow$ e $(\cdot)^\rightarrow$, coincidono: fissato un sottoinsieme A di M , entrambi individuano tutti gli elementi che sono in relazione con ogni elemento di A . La relazione stessa, infatti, non è più in grado di distinguere tra parte destra o parte sinistra. Per evitare confusione con il caso precedente ci conviene definire un unico operatore $(\cdot)^\neg$ sui sottoinsiemi A di M , ponendo:

$$A^\neg \equiv \{x \in M : x R z \text{ per ogni } z \in A\} = \{y \in M : z R y \text{ per ogni } z \in A\}$$

Tutte le proposizioni dimostrate per $(\cdot)^\leftarrow$ e $(\cdot)^\rightarrow$ continuano a valere, in particolare $(\cdot)^{-}$ è un operatore di chiusura sui sottoinsiemi di M . Riscriviamo in dettaglio tutte le proprietà per $(\cdot)^{-}$ che ci saranno utili nel seguito. Per le dimostrazioni ci si può riferire a quelle più generali del paragrafo 2.1.

Proposizione 3.2. *Per ogni $A, B \subseteq M$ vale:*

$$A \subseteq B^- \quad \text{sse} \quad B \subseteq A^-.$$

Lemma 3.1. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- a. *Per ogni $A, B \subseteq M$ vale $A \subseteq B^-$ sse $B \subseteq A^-$ (i.e. proposizione 3.2).*
- b.
 - I. *Per ogni $A \subseteq M$ vale $A \subseteq A^{--}$ (i.e. $(\cdot)^{--}$ è estensivo);*
 - II. *per ogni $A_1, A_2 \subseteq M$: se $A_1 \subseteq A_2$ allora $A_2^- \subseteq A_1^-$ (i.e. $(\cdot)^-$ è antimonotono).*

Consideriamo quindi la funzione $(\cdot)^{-} : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M)$, che per quanto abbiamo già detto risulta essere un operatore di chiusura. In questo caso non ha più senso distinguere tra saturi sinistri e saturi destri: parleremo quindi di *saturi* in generale, definendo $A \subseteq M$ *saturo* se e solo se $(A)^{-} = A$. Indicheremo la classe dei saturi di $\mathcal{P}(M)$ con $Sat(M)$. Vale ancora la seguente

Proposizione 3.3. Caratterizzazione dei saturi. *$A \subseteq M$ è saturo se e solo se $A = B^-$ per qualche $B \subseteq M$.*

In particolare M è il massimo dei saturi, mentre $\emptyset^{--} = M^-$ è il minimo. Infine riscriviamo la dualità tra intersezione e unione di saturi che abbiamo dimostrato in generale nella proposizione 2.5.

Proposizione 3.4. Corrispondenza tra unione e intersezione. *Presi due sottoinsiemi A_1, A_2 saturi in $\mathcal{P}(M)$ allora:*

- a. $A_1 \cap A_2 = (A_1^- \cup A_2^-)^-$.
- b. $(A_1 \cup A_2)^- = A_1^- \cap A_2^-$.
- c. $(A_1 \cup A_2)^{-} = (A_1^- \cap A_2^-)^-$.

Questa proprietà ci sarà molto utile quando daremo la semantica ad un calcolo \mathbf{B}_e^- con un linguaggio arricchito da una negazione involutiva, come ad esempio la negazione lineare alla Girard.

3.2 Valutazione nei monoidi simmetrici

Consideriamo allora un monoide simmetrico \mathcal{M} . Per valutare le formule del linguaggio \mathcal{L} ci serviremo della stessa funzione di valutazione definita al paragrafo 2.2

$$V(\cdot) : Frm \longrightarrow Sat(M)$$

definita induttivamente come segue³:

- se p è una formula atomica, scegliamo $V(p)$ in $Sat(M)$;
- per le costanti ed i connettivi, poniamo:

$$\begin{aligned} V(\top) &\equiv M & V(0) &\equiv \emptyset^{--} \\ V(1) &\equiv \{1\}^{--} & V(\perp) &\equiv \{1\}^- \\ V(\varphi \& \psi) &\equiv V(\varphi) \cap V(\psi) & V(\psi \oplus \varphi) &\equiv (V(\psi) \cup V(\varphi))^{--} \\ V(\psi \otimes \varphi) &\equiv (V(\psi) \cdot V(\varphi))^{--} & V(\varphi \wp \psi) &\equiv (V(\varphi)^- \cdot V(\psi)^-)^- \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la valutazione dei contesti, anche in questo caso dobbiamo solo riscrivere la valutazione, destra e sinistra della definizione 2.5, data con una relazione qualsiasi. Dati due contesti Γ e Δ , anche vuoti, poniamo:

$$\begin{aligned} \text{se } \Gamma = \varphi_1, \dots, \varphi_m \text{ (con } m \geq 0) & \quad V_{sx}(\Gamma) \equiv (\{1\} \cdot V(\varphi_1) \cdot \dots \cdot V(\varphi_m))^{--}; \\ \text{se } \Delta = \psi_1, \dots, \psi_n \text{ (con } n \geq 0) & \quad V_{dx}(\Delta) \equiv (\{1\} \cdot V(\psi_1)^- \cdot \dots \cdot V(\psi_n)^-)^-. \end{aligned}$$

Per questa definizione valgono tutte le osservazioni che abbiamo già fatto a pagina 26, in particolare la valutazione del contesto vuoto $[]$ diventa:

$$V_{sx}([]) = \{1\}^{--} \qquad V_{dx}([]) = \{1\}^-$$

Infine anche per definire la validità di un sequente ci basta riscrivere la definizione 2.6. Diremo che *il sequente* $\Gamma \vdash \Delta$ *è valido in un monoide simmetrico* \mathcal{M} *se*

$$V_{sx}(\Gamma) \subseteq V_{dx}(\Delta).$$

Con tutta questa riscrittura il teorema di validità seguente non è altro che un caso particolare del teorema di validità 2.1 ristretto al caso commutativo, che abbiamo dimostrato nel caso più generale di una relazione qualsiasi.

³Si noti che non è altro che la riscrittura della definizione 2.4, scambiando gli operatori $(\cdot)^{\leftarrow}$ e $(\cdot)^{\rightarrow}$ con $(\cdot)^-$

Teorema 3.1. di Validità per monoidi simmetrici. *Sia dato \mathcal{M} monoide simmetrico e si fissino ad arbitrio i valori della funzione $V(\cdot)$ sulle formule atomiche. Se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{B}_e^- allora $\Gamma \vdash \Delta$ è valido in \mathcal{M} .*

Se il teorema di validità è stato ottenuto senza sforzo dai risultati per i monoidi con relazione, lo stesso non si può dire per il teorema di completezza, che richiede la costruzione di un nuovo modello sintattico, con una relazione simmetrica.

3.3 Completezza per i monoidi simmetrici

Per avere la completezza non dobbiamo modificare sostanzialmente il modello sintattico che abbiamo dato per \mathbf{B}_e^- , cambieremo solamente la relazione, visto che la stiamo cercando simmetrica, mentre il monoide resterà inalterato. In pratica abbiamo già mostrato quale sarà la relazione che ci va bene: $\Gamma R_s \Delta$ se e solo se $\Gamma \vdash \Delta^s$ in \mathbf{B}_e^- . Vediamo il tutto formalmente.

Definizione 3.1. Modello sintattico simmetrico. *Definiamo modello sintattico simmetrico il monoide $\mathbb{F}_s \equiv (Frm_e^*, \circ, [], R_s)$, dove:*

- Frm_e^* è l'insieme di tutte le liste finite e non ordinate che si possono formare con le formule di \mathbf{B}_e^- (lista vuota compresa).
- \circ è l'operazione di concatenazione tra due liste; i.e. se Γ_1 e Γ_2 sono liste, allora $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \equiv \Gamma_1, \Gamma_2$.
- $[\]$ è la lista vuota.
- la relazione R_s è definita come: $\Gamma R_s \Delta$ sse $\Gamma \vdash \Delta^s$ è derivabile in \mathbf{B}_e^- , ovvero $\Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s$.

Per quanto abbiamo detto qui e nel capitolo precedente (cfr. teorema 2.3), questo è proprio un monoide simmetrico.

In questo caso, con la relazione, possiamo definire un unico operatore sui sottoinsiemi di Frm_e^* , quindi non saremo più in grado di distinguere tra antecedenti e conseguenti. Vediamo quali sono i sottoinsiemi individuati dall'operatore $(\cdot)^-$ e dall'operatore di saturazione $(\cdot)^{--}$ che esso induce.

Consideriamo una lista di formule Σ :

$$\begin{aligned} \{\Sigma\}^- &\equiv \{\Delta \in Frm_e^* : \Sigma R_s \Delta\} \\ &= \{\Delta \in Frm_e^* : \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s\} \\ &= \{\Delta \in Frm_e^* : \Delta \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Sigma^s\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

In generale preso $A \subseteq Frm_e^*$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
A^- &\equiv \{\Delta \in Frm_e^* : \Sigma R_s \Delta \text{ per ogni } \Sigma \in A\} \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta_s \text{ per ogni } \Sigma \in A\} \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \Delta \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Sigma_s \text{ per ogni } \Sigma \in A\}. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Se consideriamo una formula φ del linguaggio \mathcal{L} non vale più il lemma 2.4, che associa a ciascuna delle due saturazioni possibili gli antecedenti o i conseguenti della formula stessa. Vediamo in questo caso cosa succede se consideriamo una formula φ^4 :

$$\begin{aligned}
\{\varphi\}^- &\equiv \{\Delta \in Frm_e^* : \varphi \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s\} \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \Delta \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi^s\}; \tag{3.3} \\
\{\varphi\}^{--} &\equiv \{\Sigma \in Frm_e^* : \varphi \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Sigma^s\}^- \\
&= \{\Sigma \in Frm_e^* : \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi^s\}^- \\
&= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s \text{ per ogni } \Sigma \text{ t.c. } \Sigma \vdash \varphi^s\} \\
&= \{\Gamma \in Frm_e^* : \varphi^s \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s\} \\
&= \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi\} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Da queste equivalenze emerge un fatto importante: la saturazione di $\{\varphi\}$ individua ancora tutti e soli gli antecedenti della formula φ . Per essere il più possibile vicini all'intuizione data nel capitolo 2 viene naturale chiedersi cosa succeda quando in \mathbb{F}_s si scelga come valutazione di una formula atomica p proprio la saturazione $\{p\}^{--}$. Si scopre una conseguenza molto gradita: questa scelta viene rispettata induttivamente anche per le costanti e per tutte le formule costruite con i connettivi. Vale infatti il seguente.

Lemma 3.2. di valutazione canonica per le formule in \mathbb{F}_s . *Se si valuta \mathbf{B}_e^- in \mathbb{F}_s scegliendo $V(p) \equiv \{p\}^{--}$ per ogni formula atomica p , allora per ogni formula φ del linguaggio \mathcal{L} vale:*

$$V(\varphi) = \{\varphi\}^{--} = \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi\}.$$

Dimostrazione. Procediamo ancora per induzione sulla struttura delle formule, sulla falsa riga del lemma 2.7. Per prima cosa, ricordando il lemma 2.2, si può osservare che la tesi

$$V(\varphi) = \{\varphi\}^{--} = \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi\}$$

⁴Per gli ultimi due passaggi si ricordino il lemma 2.5 e il teorema 1.1 rispettivamente.

è equivalente a dire

$$V(\varphi)^- = \{\varphi\}^- = \{\Delta \in Frm_e^* : \Delta \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi^s\} = \{\Delta \in Frm_e^* : \varphi \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s\},$$

quindi, nel corso della dimostrazione, come ipotesi induttiva potremo usare l'una o l'altra equivalenza indifferentemente. Inoltre ricordiamo che $[]^s = []$. Il passo base è verificato per ipotesi sulle formule atomiche, ci mancano le costanti.

Caso $\varphi = \top$.

$$\begin{aligned} V(\top) &\equiv Frm_e^* \\ &= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \top\} = \{\top\}^{--} \\ &\quad \text{secondo l'equazione definitoria di } \top. \end{aligned}$$

Caso $\varphi = 0$.

$$\begin{aligned} V(0) &\equiv \emptyset^{--} = M^- \\ &= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s \text{ per ogni } \Sigma \in Frm_e^*\} \\ &= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s \text{ per ogni } \Sigma \text{ t.c. } \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \top\} \\ &\quad \text{secondo l'equazione definitoria di } \top \\ &= \{\Gamma \in Frm_e^* : \top \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s\} \\ &\quad \text{ricordando il lemma 2.5} \\ &= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} 0\} = \{0\}^{--} \\ &\quad \text{ricordando il teorema 1.1 e il fatto che } \top^s = 0. \end{aligned}$$

Caso $\varphi = \perp$.

$$\begin{aligned} V(\perp) &\equiv \{[]\}^- = \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} []\} \\ &= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \perp\} = \{\perp\}^{--} \\ &\quad \text{secondo l'equazione definitoria di } \perp. \end{aligned}$$

Caso $\varphi = 1$

$$\begin{aligned} V(1) &\equiv \{[]\}^{--} = \{\Sigma \in Frm_e^* : \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} []\}^- \\ &= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s \text{ per ogni } \Sigma \text{ t.c. } \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} []\} \\ &= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s \text{ per ogni } \Sigma \text{ t.c. } \Sigma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \perp\} \\ &\quad \text{secondo l'equazione definitoria di } \perp \\ &= \{\Gamma \in Frm_e^* : \perp \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s\} \\ &\quad \text{ricordando il lemma 2.5} \\ &= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} 1\} = \{1\}^{--} \\ &\quad \text{per il teorema 1.1 e il fatto che } \perp^s = 1. \end{aligned}$$

Vediamo ora il passo induttivo, verificando tutti i connettivi.

Caso $\varphi \wp \psi$.

$$\begin{aligned}
V(\varphi \wp \psi) &\equiv (V(\varphi)^- \cdot V(\psi)^-)^- \\
&= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s \text{ per ogni } \Gamma_1 \in V(\varphi)^-, \Gamma_2 \in V(\psi)^-\} \\
&= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s \text{ per ogni } \Gamma_1 \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi^s, \Gamma_2 \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \psi^s\} \\
&\quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \{\Gamma \in Frm_e^* : \varphi^s, \psi^s \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s\} \\
&\quad \text{ricordando il lemma 2.5} \\
&= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi, \psi\} \\
&\quad \text{per il teorema 1.1 e la regola di scambio} \\
&= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi \wp \psi\} \\
&\quad \text{secondo l'equazione definitoria di } \wp \\
&= \{\varphi \wp \psi\}^{--}.
\end{aligned}$$

Caso $\psi \otimes \varphi$.

$$\begin{aligned}
V(\psi \otimes \varphi) &\equiv (V(\psi) \cdot V(\varphi))^{--} \\
&= \{\Gamma_1, \Gamma_2 \in Frm_e^* : \Gamma_1 \in V(\psi), \Gamma_2 \in V(\varphi)\}^{--} \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s \text{ per ogni } \Gamma_1 \in V(\psi), \Gamma_2 \in V(\varphi)\}^- \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s \text{ per ogni } \Gamma_1 \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \psi, \Gamma_2 \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi\}^- \\
&\quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \psi \otimes \varphi \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s\}^- \\
&\quad \text{ricordando il lemma 2.6} \\
&= \{\psi \otimes \varphi\}^{--}.
\end{aligned}$$

Caso $\varphi \& \psi$.

$$\begin{aligned}
V(\varphi \& \psi) &\equiv V(\varphi) \cap V(\psi) \\
&= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \in V(\varphi) \text{ e } \Gamma \in V(\psi)\} \\
&= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi \text{ e } \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \psi\} \\
&\quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \varphi \& \psi\} \\
&\quad \text{secondo l'equazione definitoria di } \& \\
&= \{\varphi \& \psi\}^{--}.
\end{aligned}$$

Caso $\psi \oplus \varphi$.

$$\begin{aligned}
V(\psi \oplus \varphi) &\equiv (V(\psi) \cup V(\varphi))^{--} \\
&= (V(\psi)^- \cap V(\varphi)^-)^- \\
&\quad \text{secondo la proposizione 3.4} \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \Delta \in V(\psi)^- \text{ e } \Delta \in V(\varphi)^-\}^- \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \psi \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s \text{ e } \varphi \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s\}^- \\
&\quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \psi \oplus \varphi \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s\}^- \\
&\quad \text{secondo l'equazione definitoria di } \oplus \\
&= \{\psi \oplus \varphi\}^{--}.
\end{aligned}$$

□

Con questo lemma di valutazione per le formule possiamo ancora dimostrare il lemma 2.8 di valutazione per i contesti; riscriviamolo nel caso del modello sintattico \mathbb{F}_s .

Lemma 3.3. di valutazione canonica dei contesti in \mathbb{F}_s . *Se si valuta \mathbf{B}_e^- in \mathbb{F}_s scegliendo $V(p) \equiv \{p\}^{--}$ per ogni formula atomica p , allora per ogni contesto Σ vale:*

$$V_{\text{sx}}(\Sigma) = \{\Sigma\}^{--} \quad e \quad V_{\text{dx}}(\Sigma) = \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Sigma\}.$$

Dimostrazione. Se $\Sigma = []$, allora $V_{\text{sx}}([]) = \{[]\}^{--}$ per definizione; mentre $V_{\text{dx}}([]) = \{[]\}^- = \{\Gamma \in Frm_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} []\}^-$ per definizione. Se invece $\Sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ con $n \geq 1$ allora:

$$\begin{aligned}
V_{\text{sx}}(\Sigma) &\equiv (\{[]\} \cdot V(\sigma_1) \cdot \dots \cdot V(\sigma_n))^{--} \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s \text{ per ogni } \Gamma_i \in V(\sigma_i)\}^- \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s \text{ per ogni } \Gamma_i \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \sigma_i\}^- \\
&\quad \text{per il lemma 3.2} \\
&= \{\Delta \in Frm_e^* : \sigma_1, \dots, \sigma_n \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta^s\}^- \\
&\quad \text{per il lemma 2.5} \\
&= \{\Sigma\}^{--}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{DX}}(\Sigma) &\equiv (\{[\]\} \cdot V(\sigma_1)^- \cdot \dots \cdot V(\sigma_n)^-)^- \\
&= \{\Gamma \in \text{Frm}_e^* : \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s \text{ per ogni } \Gamma_i \in V(\sigma_i)^-\} \\
&= \{\Gamma \in \text{Frm}_e^* : \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s \text{ per ogni } \Gamma_i \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \sigma_i^s\} \\
&\quad \text{per il lemma 3.2} \\
&= \{\Gamma \in \text{Frm}_e^* : \sigma_1^s, \dots, \sigma_n^s \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Gamma^s\} \\
&\quad \text{per il lemma 2.5} \\
&= \{\Gamma \in \text{Frm}_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Sigma\}
\end{aligned}$$

□

Grazie a questo lemma possiamo ancora dimostrare un teorema di completezza per \mathbf{B}_e^- nei monoidi simmetrici.

Teorema 3.2. di Completezza per i monoidi simmetrici. *Il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{B}_e^- se e solo se $\Gamma \vdash \Delta$ è valido in ogni monoide simmetrico, comunque si scelga la valutazione $V(\cdot)$ sulle formule atomiche.*

Dimostrazione. Si può seguire pari passo la dimostrazione del teorema 2.2 per i monoidi con relazione. Un verso è dato dal teorema 3.1. Viceversa, sia $\Gamma \vdash \Delta$ valido in ogni monoide con relazione comunque si scelga la valutazione $V(\cdot)$ sugli atomi; allora vale $V_{\text{SX}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{DX}}(\Delta)$ nel modello sintattico \mathbb{F}_s , ponendo $V(p) \equiv \{p\}^{--}$ per ogni formula atomica p . Secondo il lemma 3.3 questo significa che

$$\Gamma \in \{\Gamma\}^{--} \subseteq \{\Gamma \in \text{Frm}_e^* : \Gamma \vdash_{\mathbf{B}_e^-} \Delta\}$$

e quindi $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{B}_e^- .

□

3.4 Spazio delle fasi

Come vedremo tra poco, una delle possibili estensioni di \mathbf{B}_e^- porta alla Logica Lineare Classica. Tale Logica possiede già una semantica insiemistica: lo spazio delle fasi di Girard (cfr. [7]). Tale semantica è molto simile alla semantica dei monoidi simmetrici, non solo perché entrambe hanno come base un monoide commutativo, ma anche perché uno spazio delle fasi è un particolare monoide simmetrico: basta saper considerare la giusta relazione. Anzi la classe degli spazi delle fasi è facilmente individuabile all'interno della classe dei monoidi simmetrici: gli spazi delle fasi sono tutti e soli i monoidi simmetrici $(M, \cdot, 1, R)$ in cui la relazione R è *fortemente simmetrica*, ovvero gode della seguente proprietà:

$$\text{Per ogni } x, y, z \in M : \text{ se } z \cdot x R y \text{ allora } z \cdot y R x. \quad (3.5)$$

Quando la relazione soddisfa alla proprietà (3.5) e l'operazione \cdot è commutativa, diremo che la struttura $(M, \cdot, 1, R)$ è un *monoide fortemente simmetrico*. Si noti che una relazione fortemente simmetrica è automaticamente simmetrica, basta scegliere $z = 1$ in (3.5). La simmetria forte è una proprietà più potente della simmetria: in un certo senso la relazione risulta essere simmetrica relativamente ad ogni elemento di M . Se si pensa ad un modello sintattico in cui la relazione coinvolga il comporta (\vdash) tra sequenti, la simmetria forte corrisponde in qualche modo alla possibilità di trasportare le formule a destra o a sinistra del segno \vdash a prescindere dal contesto.

Inoltre, anche la semantica per la Logica Lineare Classica definita sugli spazi delle fasi coincide proprio con la semantica dei monoidi simmetrici quando in essi la relazione è fortemente simmetrica. Vediamo con ordine la verifica di tutte queste affermazioni.

Definizione 3.2. Spazio delle fasi. *Una coppia (M, \perp) si dice spazio delle fasi se M è un monoide commutativo e \perp è un sottoinsieme di M .*

Sia quindi (M, \perp) uno spazio delle fasi⁵; presi due sottoinsiemi A e B di M possiamo definire

$$A \multimap B \equiv \{x \in M : x \cdot y \in B \text{ per ogni } y \in A\}.$$

In particolare preso un sottoinsieme A di M possiamo definire il suo *ortogonale*:

$$A^\perp \equiv A \multimap \perp = \{y \in M : x \cdot y \in \perp \text{ per ogni } x \in A\}.$$

Si dimostra che $(\cdot)^{\perp\perp}$ è un operatore di chiusura su $\mathcal{P}(M)$. Si definisce *fatto* ogni sottoinsieme di M che sia uguale al suo biortogonale (i.e. $A = A^{\perp\perp}$) o equivalentemente ogni sottoinsieme del tipo B^\perp per qualche $B \subseteq M$. I fatti sono i sottoinsiemi di M nei quali vengono interpretate le formule del linguaggio della Logica Lineare Classica.

Dopo questa breve introduzione possiamo passare ad enunciare e dimostrare l'equivalenza tra spazi delle fasi e monoidi fortemente simmetrici, almeno quella tra saturi, perché potremo vedere formalmente l'equivalenza semantica solo dopo aver esteso la semantica dei monoidi alla Lineare.

Teorema 3.3. (Spazi delle fasi e Monoidi fortemente simmetrici) *Ad ogni spazio delle fasi (M, \perp) , corrisponde uno e un solo monoide fortemente simmetrico $(M, \cdot, 1, R)$, costruito sullo stesso monoide M , tale che l'operatore $(\cdot)^\perp$, indotto su $\mathcal{P}(M)$ da (M, \perp) , coincida con l'operatore $(\cdot)^-$, indotto su $\mathcal{P}(M)$ da $(M, \cdot, 1, R)$.*

⁵Tutto ciò che riguarda gli spazi delle fasi, come definizioni e dimostrazioni, può essere facilmente trovato in [7], noi ci limiteremo a fornire i risultati senza verificarli direttamente.

Dimostrazione. Consideriamo uno spazio delle fasi (M, \perp) , definiamo il corrispondente monoide fortemente simmetrico $(M, \cdot, 1, R)$ ponendo:

$$\text{Per ogni } x, y \in M : \quad x R y \text{ sse } x \cdot y \in \perp .$$

Si vede immediatamente che tale relazione R è fortemente simmetrica, infatti presi $x, y, z \in M$ se $z \cdot x R y$ significa $z \cdot x \cdot y \in \perp$ e quindi, visto che \cdot è commutativo, $z \cdot y \cdot x \in \perp$ che significa proprio $z \cdot y R x$. Inoltre per quanto riguarda gli operatori, preso $A \subseteq M$:

$$\begin{aligned} A^- &\equiv \{y \in M : x R y \text{ per ogni } x \in A\} \\ &= \{y \in M : x \cdot y \in \perp \text{ per ogni } x \in A\} \equiv A^\perp . \end{aligned}$$

Si noti in particolare che

$$\{1\}^- = \{y \in M : 1 \cdot y \in \perp\} = \{y \in M : y \in \perp\} = \perp \quad (3.6)$$

Viceversa sia $(M, \cdot, 1, R)$ monoide fortemente simmetrico, possiamo individuare lo spazio delle fasi ad esso associato (M, \perp) ponendo: $\perp \equiv \{1\}^-$. In questo modo, preso $A \subseteq M$ otteniamo:

$$\begin{aligned} A^\perp &\equiv \{y \in M : x \cdot y \in \perp \text{ per ogni } x \in A\} \\ &= \{y \in M : x \cdot y \in \{1\}^- \text{ per ogni } x \in A\} \\ &= \{y \in M : x \cdot y R 1 \text{ per ogni } x \in A\} \\ &= \{y \in M : x \cdot 1 R y \text{ per ogni } x \in A\} \quad \text{per (3.5)} \\ &= \{y \in M : x R y \text{ per ogni } x \in A\} = A^- . \end{aligned}$$

Quindi, anche grazie alla proprietà (3.6), la corrispondenza è univoca. \square

Questo risultato ci fa ben sperare: intuivamo che la semantica dei monoidi con relazione può essere estesa alla Logica Lineare, almeno riscrivendo con gli operatori $(\cdot)^-$ la semantica degli spazi delle fasi. Nel prossimo paragrafo vedremo che l'estensione non è solo un puro esercizio di riscrittura, ma deriva da un processo di estensione per gradi sia della semantica che del calcolo, verso la Logica Lineare.

3.5 Estensione a $\perp\mathbf{B}$

Per estendere il calcolo \mathbf{B}_e^- sfrutteremo le intuizioni di C. Faggian che si possono trovare in [4] e [5], dove rimandiamo il lettore per una trattazione completa delle proprietà del calcolo. Noi ci occuperemo dell'aspetto semantico.

La semantica dei monoidi simmetrici presenta un operatore *involutivo* sui saturi, ovvero l'operatore $(\cdot)^{\perp}$ è una biezione tra saturi: preso $A \subset M$ saturo, A^{\perp} è ancora saturo e $A^{\perp\perp}$ è proprio A . L'operatore $(\cdot)^{\perp}$ agisce sui saturi come la negazione lineare si comporta sulle formule. Questa osservazione ci fa intuire che la semantica dei monoidi simmetrici è già pronta per interpretare un calcolo \mathbf{B}_e^- in cui compaia una sorta di negazione involutiva: la negazione di una formula φ potrà essere interpretata in $V(\varphi)^{\perp}$. Introduciamo un nuovo calcolo, chiamato $\perp \mathbf{B}$, definito da \mathbf{B}_e^- estendendo il linguaggio \mathcal{L} nel linguaggio $\perp \mathcal{L}$ con l'operatore ortogonale definito come segue.

Definizione 3.3. Linguaggio $\perp \mathcal{L}$. *Il linguaggio per il calcolo di base per le logiche simmetriche $\perp \mathbf{B}$ è costituito da*

Costanti: *sono le costanti di \mathcal{L} : $\top, 0, 1, \perp$.*

Formule atomiche: *sono formate dalle variabili proposizionali p, q, r, \dots e i loro duali $p^{\perp}, q^{\perp}, r^{\perp}, \dots$*

Formule: *sono ottenute a partire dalle formule atomiche usando i connettivi di \mathcal{L} : $\&, \oplus, \otimes, \wp$. In particolare l'ortogonale di una proposizione è definito per induzione sulla costruzione delle formule:*

$$\begin{array}{ll} p^{\perp} \in \perp \mathcal{L} & p^{\perp\perp} \equiv p \\ \top^{\perp} \equiv 0 & 0^{\perp} \equiv \top \\ 1^{\perp} \equiv \perp & \perp^{\perp} \equiv 1 \\ (\varphi \& \psi)^{\perp} \equiv \varphi^{\perp} \oplus \psi^{\perp} & (\varphi \oplus \psi)^{\perp} \equiv \varphi^{\perp} \& \psi^{\perp} \\ (\varphi \otimes \psi)^{\perp} \equiv \varphi^{\perp} \wp \psi^{\perp} & (\varphi \wp \psi)^{\perp} \equiv \varphi^{\perp} \otimes \psi^{\perp} \end{array}$$

Da questa definizione si vede facilmente che per ogni formula φ l'ortogonale è un operatore involutivo, ovvero $\varphi^{\perp\perp} = \varphi$.

Il calcolo $\perp \mathbf{B}$ è definito sul linguaggio $\perp \mathcal{L}$ ed ha le stesse regole di \mathbf{B}_e^- .

Sulla falsa riga di quanto fatto per \mathbf{B}^- al paragrafo 1.4 possiamo definire l'ortogonale di un contesto in modo da ottenere un teorema di simmetria anche per $\perp \mathbf{B}$. Definiamo $[]^{\perp} \equiv []$, mentre se consideriamo un contesto $\Sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_n$, con $n \geq 1$, allora

$$\Sigma^{\perp} \equiv \sigma_1^{\perp}, \dots, \sigma_n^{\perp}.$$

Dalla definizione si vede ancora che $\Sigma^{\perp\perp} = \Sigma$. Con tutte queste posizioni si ottiene il seguente teorema di simmetria, che viene anche citato come principio di “flipping” (“swapping”).

Teorema 3.4. di simmetria per $\perp \mathbf{B}$. *Per ogni coppia di liste finite di formule Γ, Δ , il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $\perp \mathbf{B}$ se e solo è derivabile anche $\Delta^{\perp} \vdash \Gamma^{\perp}$.*

Dimostrazione. Di nuovo l'equivalenza si dimostra per induzione sulla profondità della derivazione. Data una prova di $\Gamma \vdash \Delta$, si ottiene la prova corrispondente per $\Delta^\perp \vdash \Gamma^\perp$ sostituendo gli assiomi $\varphi \vdash \varphi$ con $\varphi^\perp \vdash \varphi^\perp$; si sostituisce poi, come per il teorema 1.1, ogni regola con la sua simmetrica. \square

Grazie a questo teorema, la semantica per ${}^\perp\mathbf{B}$ è già pronta: è proprio quella di \mathbf{B}_e^- . Consideriamo ancora i monoidi $(M, \cdot, 1, R)$ simmetrici. La valutazione delle formule rimane la stessa: per la formule atomiche p scegliamo un sottoinsieme saturo di M , per i connettivi e le costanti seguiamo ancora le regole definite a pagina 48. Dobbiamo solo aggiungere l'interpretazione per le nuove variabili proposizionali p^\perp che abbiamo introdotto nel linguaggio; seguendo l'idea che abbiamo accennato definiamo

$$V(p^\perp) \equiv V(p)^-$$

Questa scelta si propaga automaticamente su tutte le formule e otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 3.5. Valutazione dell'ortogonale. *Sia $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$ monoide simmetrico. Scegliendo $V(p)$ saturo di $\mathcal{P}(M)$ e ponendo $V(p^\perp) \equiv V(p)^-$ per ogni formula atomica p del linguaggio ${}^\perp\mathcal{L}$, per ogni formula φ si ottiene:*

$$V(\varphi^\perp) = V(\varphi)^-.$$

Dimostrazione. Ancora una volta si procede per induzione sulla struttura della formula. Partiamo dal passo base: le formule atomiche e i connettivi.

Caso $\varphi = p$. $V(p^\perp) \equiv V(p)^-$ per definizione.

Caso $\varphi = p^\perp$. $V(p^{\perp\perp}) = V(p) = V(p)^{-\perp} = V(p^\perp)^-$ essendo $(\cdot)^{-\perp}$ un operatore di chiusura.

Caso $\varphi = \top$. $V(\top^\perp) = V(0) = \emptyset^{-\perp} = M^- = V(\top)^-$ ricordando che M^- è il minimo dei saturi e quindi $\emptyset^{-\perp} = M^-$.

Caso $\varphi = 0$. $V(0^\perp) = V(\top) = M = M^{-\perp} = \emptyset^{-\perp\perp} = V(0)^-$.

Caso $\varphi = \perp$. $V(\perp^\perp) = V(1) = \{1\}^{-\perp} = V(\perp)^-$.

Caso $\varphi = 1$. $V(1^\perp) = V(\perp) = \{1\}^- = \{1\}^{-\perp\perp} = V(1)^-$.

Caso $\varphi \wp \psi$.

$$\begin{aligned} V((\varphi \wp \psi)^\perp) &\equiv V(\varphi^\perp \otimes \psi^\perp) \\ &= (V(\varphi^\perp) \cdot V(\psi^\perp))^{-\perp} \\ &= (V(\varphi)^- \cdot V(\psi)^-)^{-\perp} \quad \text{per ipotesi induttiva} \\ &= V(\varphi \wp \psi)^- \end{aligned}$$

Caso $\varphi \otimes \psi$.

$$\begin{aligned}
V((\varphi \otimes \psi)^\perp) &\equiv V(\varphi^\perp \wp \psi^\perp) \\
&= (V(\varphi^\perp)^- \cdot V(\psi^\perp)^-)^- \\
&= (V(\varphi) \cdot V(\psi))^- \quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= (V(\varphi) \cdot V(\psi))^{----} \quad \text{per il lemma 2.2} \\
&= V(\varphi \otimes \psi)^-
\end{aligned}$$

Caso $\varphi \& \psi$.

$$\begin{aligned}
V((\varphi \& \psi)^\perp) &\equiv V(\varphi^\perp \oplus \psi^\perp) \\
&= (V(\varphi^\perp) \cup V(\psi^\perp))^{--} \\
&= (V(\varphi)^- \cup V(\psi)^-)^{--} \quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= (V(\varphi) \cap V(\psi))^- \quad \text{per la proposizione 3.4.a} \\
&= V(\varphi \& \psi)^-
\end{aligned}$$

Caso $\varphi \oplus \psi$.

$$\begin{aligned}
V((\varphi \oplus \psi)^\perp) &\equiv V(\varphi^\perp \& \psi^\perp) \\
&= V(\varphi^\perp) \cap V(\psi^\perp) \\
&= V(\varphi)^- \cap V(\psi)^- \quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= (V(\varphi) \cup V(\psi))^- \quad \text{per la proposizione 3.4.b} \\
&= (V(\varphi) \cup V(\psi))^{----} \quad \text{per il lemma 2.2} \\
&= V(\varphi \oplus \psi)^-
\end{aligned}$$

□

Per quanto riguarda la valutazione dei contesti e la validità di un sequente, si mantengono le definizioni già date nel caso di \mathbf{B}_e^- .

Poiché il calcolo ha le stesse regole di \mathbf{B}_e^- , il teorema 3.1 continua a valere anche per $\perp\mathbf{B}$; riscriviamolo per maggior chiarezza.

Teorema 3.5. di validità per $\perp\mathbf{B}$. *Sia dato \mathcal{M} monoide simmetrico e si fissino ad arbitrio i valori della funzione $V(\cdot)$ sulle formule atomiche di tipo p . Se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $\perp\mathbf{B}$ allora $\Gamma \vdash \Delta$ è valido in \mathcal{M} .*

Il teorema di completezza si basa ancora sulla costruzione di un modello sintattico nel quale la validità di un sequente corrisponda alla sua derivabilità in $\perp\mathbf{B}$. Come per \mathbf{B}_e^- abbiamo sfruttato il teorema 1.1 per definire la giusta relazione sintattica, così per $\perp\mathbf{B}$ possiamo sfruttare il rispettivo teorema di simmetria 3.4. Il modello sintattico per $\perp\mathbf{B}$ si ottiene da quello per \mathbf{B}_e^- semplicemente sostituendo il simmetrico s con l'ortogonale $^\perp$. Vediamolo in dettaglio.

Definizione 3.4. Modello sintattico ortogonale. *Definiamo modello sintattico ortogonale il monoide $\mathbb{F}_\perp \equiv (Frm_e^*, \circ, [], R_\perp)$, dove:*

- Frm_e^* è l'insieme di tutte le liste finite e non ordinate che si possono formare con le formule di \mathbf{B}_e^- (lista vuota compresa).
- \circ è l'operazione di concatenazione tra due liste; i.e. se Γ_1 e Γ_2 sono liste, allora $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \equiv \Gamma_1, \Gamma_2$.
- $[\]$ è la lista vuota.
- la relazione R_\perp è definita come: $\Gamma R_\perp \Delta$ sse $\Gamma \vdash \Delta^\perp$ è derivabile in ${}^\perp\mathbf{B}$, ovvero $\Gamma \vdash_{\perp\mathbf{B}} \Delta^\perp$.

Con le stesse argomentazioni già viste per \mathbb{F}_s si verifica che anche \mathbb{F}_\perp è un monoide simmetrico. In particolare, grazie al teorema 3.4, si verifica che la relazione R_\perp è simmetrica; infatti prese due liste di formule Γ, Δ :

$$\Gamma R_\perp \Delta \text{ sse } \Gamma \vdash_{\perp\mathbf{B}} \Delta^\perp \text{ sse } \Delta^{\perp\perp} \vdash_{\perp\mathbf{B}} \Gamma^\perp \text{ sse } \Delta \vdash_{\perp\mathbf{B}} \Gamma^\perp \text{ sse } \Delta R_\perp \Gamma.$$

Inoltre in questo modello si ritrovano tutte le equivalenze (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) già viste per \mathbb{F}_s al paragrafo 3.3, basta trattare l'ortogonale come il simmetrico, scambiando $\vdash_{\mathbf{B}_e^-}$ con $\vdash_{\perp\mathbf{B}}$, e considerare il teorema 3.4 in luogo del teorema 1.1. In tal modo in \mathbb{F}_\perp si scopre ancora un

Lemma 3.4. di valutazione canonica per le formule in \mathbb{F}_\perp . *Se si valuta ${}^\perp\mathbf{B}$ in \mathbb{F}_\perp scegliendo $V(p) \equiv \{p\}^{--}$ per ogni formula atomica di tipo p , allora per ogni formula φ del linguaggio ${}^\perp\mathcal{L}$ vale:*

$$V(\varphi) = \{\varphi\}^{--} = \{\Gamma : \Gamma \vdash_{\perp\mathbf{B}} \varphi\}.$$

Dimostrazione. Come abbiamo già detto si segue la linea della dimostrazione del lemma 3.2 con l'accortezza di scambiare l'idea di simmetrico con l'ortogonale. L'unico caso che dobbiamo controllare veramente è quello induttivo dell'ortogonale: il nuovo caso introdotto dal linguaggio ${}^\perp\mathcal{L}$. Vediamolo in dettaglio. Consideriamo una formula φ , dobbiamo mostrare che $V(\varphi^\perp) = \{\varphi^\perp\}^{--}$. Questo si verifica facilmente ricordando la proposizione 3.5 al primo passaggio e applicando opportunamente l'induzione al secondo:

$$V(\varphi^\perp) = V(\varphi)^- = \{\varphi\}^{---} = \{\varphi\}^- = \{\Delta \in Frm_e^* : \Delta \vdash_{\perp\mathbf{B}} \varphi^\perp\} = \{\varphi^\perp\}^{--}$$

□

Grazie a questo lemma riusciamo ancora a trovare l'analogo del lemma 3.3. Per la dimostrazione si può seguire quella data proprio per il lemma 3.3 scambiando ancora il simmetrico s con l'ortogonale $^\perp$ e riferendoci al teorema 3.4 di simmetria per $^\perp\mathbf{B}$.

Lemma 3.5. di valutazione canonica dei contesti in \mathbb{F}_\perp . *Se si valuta $^\perp\mathbf{B}$ in \mathbb{F}_\perp scegliendo $V(p) \equiv \{p\}^{--}$ per ogni formula atomica p , allora per ogni contesto Σ vale:*

$$V_{\text{sx}}(\Sigma) = \{\Sigma\}^{--} \quad e \quad V_{\text{dx}}(\Sigma) = \{\Gamma \in \text{Frm}_e^* : \Gamma \vdash_{^\perp\mathbf{B}} \Sigma\}.$$

Abbiamo tutti gli ingredienti per affermare che anche in questo caso vale un teorema di completezza; per la dimostrazione si segue passo passo la dimostrazione del teorema 3.2.

Teorema 3.6. di Completezza per $^\perp\mathbf{B}$. *Il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $^\perp\mathbf{B}$ se e solo se $\Gamma \vdash \Delta$ è valido in ogni monoide simmetrico, comunque si scelga la valutazione $V(\cdot)$ sulle formule atomiche di tipo p .*

3.6 Verso la Logica Lineare Classica

Come abbiamo anticipato, il calcolo $^\perp\mathbf{B}$ può essere esteso introducendo semplici regole strutturali che coinvolgono solo i contesti e l'ortogonale, senza introdurre nuovi connettivi o modificare le regole del calcolo $^\perp\mathbf{B}$ stesso. I *moduli* di espansione si possono dividere in due blocchi: il modulo di *trasporto* e il modulo di *separazione*. Ognuno di essi introduce una coppia di regole strutturali simmetriche: il teorema 3.4 di simmetria continuerà, quindi, a valere; e questo è un fatto di vitale importanza per la semantica.

Seguendo l'idea di [5] vediamo quali sono i due moduli:

$$\text{Trasporto:} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Delta^\perp \vdash} \text{trL} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\vdash \Gamma^\perp, \Delta} \text{trR}$$

$$\text{Separazione:} \quad \frac{\Gamma, \Delta \vdash}{\Gamma \vdash \Delta^\perp} \text{sepL} \qquad \frac{\vdash \Gamma, \Delta}{\Gamma^\perp \vdash \Delta} \text{sepR}$$

Aggiungendo al calcolo questi due moduli possiamo ottenere⁶:

$^\perp\mathbf{OL} = ^\perp\mathbf{B} + \text{regole strutturali di trasporto}$, che equivale alla Ortologica Lineare;

⁶per le dimostrazioni si veda ancora [5]

${}^{\perp}\mathbf{L} = {}^{\perp}\mathbf{B} +$ regole strutturali di trasporto e separazione, che equivale alla Logica Lineare classica proposizionale senza esponenziali.

Come nel calcolo, così nella semantica dei monoidi simmetrici possiamo richiedere nuove proprietà sulla relazione, ottenendo una semantica per le estensioni. Ci basta introdurre due proprietà, ognuna delle quali corrisponde ad un modulo di regole strutturali.

Definizione 3.5. *Dato un monoide simmetrico $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$ diremo che*

- \mathcal{M} gode della proprietà del TRASPORTO se per ogni $x, y \in M$ vale

$$\text{se } x R y \text{ allora } x \cdot y R 1;$$

- \mathcal{M} gode della proprietà della SEPARAZIONE se per ogni $x, y \in M$ vale

$$\text{se } 1 R x \cdot y \text{ allora } x R y.$$

Queste due proprietà sono quanto ci serve affinché nei monoidi simmetrici siano valide le proprietà di trasporto e separazione, rispettivamente. Vediamo in dettaglio che conseguenze hanno sui saturi di $\mathcal{P}(M)$. I prossimi due lemmi saranno il cardine dei teoremi di validità delle estensioni di ${}^{\perp}\mathbf{B}$.

Lemma 3.6. (Trasporto) *Se un monoide simmetrico $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$ gode della proprietà del trasporto, allora presi $A, B \subseteq M$ si ha:*

- a. se $A \subseteq B^-$ allora $A \cdot B \subseteq \{1\}^-$;
- b. se $A^{--} \subseteq B^-$ allora $(A \cdot B)^{--} \subseteq \{1\}^-$.

Dimostrazione. Vediamo il caso a. $A \subseteq B^-$ significa che $x R y$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$, ma per la proprietà di trasporto otteniamo $x \cdot y R 1$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$, quindi $A \cdot B \subseteq \{1\}^-$.

Per il caso b. $A^{--} \subseteq B^-$ implica $A \subseteq B^-$ poiché $(\cdot)^{--}$ è estensivo, quindi $A \cdot B \subseteq \{1\}^-$ per il punto a. e infine $(A \cdot B)^{--} \subseteq \{1\}^-$ saturando. \square

Lemma 3.7. (Separazione) *Se un monoide simmetrico $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$ gode della proprietà della separazione, allora presi $A, B \subseteq M$ si ha:*

- a. se $A \cdot B \subseteq \{1\}^-$ allora $A \subseteq B^-$;
- b. se $(A \cdot B)^{--} \subseteq \{1\}^-$ allora $A^{--} \subseteq B^-$.

Dimostrazione. Vediamo il caso *a*. Se $A \cdot B \subseteq \{1\}^-$, allora $x \cdot y R 1$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$, per simmetria significa che $1 R x \cdot y$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$ e quindi $x R y$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$, infine questo significa proprio che $A \subseteq B^-$. Per il caso *a*. $(A \cdot B)^{-} \subseteq \{1\}^-$ significa $(A \cdot B) \subseteq \{1\}^-$, per l'estensività di $(\cdot)^{-}$, quindi $A \subseteq B^-$ per il punto *a*. e infine $A^{-} \subseteq B^-$ saturando. \square

Con questi due lemmi possiamo passare ad enunciare e dimostrare il seguente

Teorema 3.7. di Completezza per le Estensioni simmetriche di ${}^\perp\mathbf{B}$.
I monoidi simmetrici che godono della proprietà del trasporto porgono una semantica completa⁷ per il calcolo ${}^\perp\mathbf{B}$ dotato delle regole strutturali di trasporto. Mentre i monoidi simmetrici che godono della proprietà della separazione porgono una semantica completa per il calcolo ${}^\perp\mathbf{B}$ dotato delle regole strutturali di separazione.

Dimostrazione. Il teorema è praticamente già stato dimostrato con il teorema 3.6, dobbiamo solo ampliarlo ai casi introdotti dalle nuove regole strutturali. Vediamo il caso del *trasporto*. Per la validità dobbiamo verificare che le regole di trasporto sono valide nei monoidi che godono della proprietà del trasporto; per la completezza dobbiamo mostrare che il modello sintattico costruito sul calcolo ${}^\perp\mathbf{B}$ con le regole di trasporto è un monoide simmetrico che gode della proprietà del trasporto. Andiamo con ordine, verifichiamo prima la validità delle regole di trasporto.

$$\bullet \text{ trL: } \frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V_{\text{sx}}(\Gamma, \Delta^\perp) \subseteq V_{\text{dx}}([\])}$$

è verificata grazie alla proposizione 3.5 e il lemma 3.6; siano $\Gamma = \varphi_1, \dots, \varphi_m$ e $\Delta = \psi_1, \dots, \psi_n$ con $m, n \geq 1$:

$$\frac{\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{(\{1\} \cdot V(\varphi_1) \cdot \dots \cdot V(\varphi_m))^{-} \subseteq (\{1\} \cdot V(\psi_1)^- \cdot \dots \cdot V(\psi_n)^-)^{-}}{(\{1\} \cdot V(\varphi_1) \cdot \dots \cdot V(\varphi_m) \cdot V(\psi_1)^- \cdot \dots \cdot V(\psi_n)^-)^{-} \subseteq \{1\}^-}}{(\{1\} \cdot V(\varphi_1) \cdot \dots \cdot V(\varphi_m) \cdot V(\psi_1^\perp) \cdot \dots \cdot V(\psi_n^\perp))^{-} \subseteq \{1\}^-}}{V_{\text{sx}}(\Gamma, \Delta^\perp) \subseteq V_{\text{dx}}([\])}$$

$$\bullet \text{ trR: } \frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{V_{\text{sx}}([\]) \subseteq V_{\text{dx}}(\Gamma^\perp, \Delta)}$$

⁷Si veda la nota 5 a pagina 40.

è verificata ancora grazie alla proposizione 3.5 e i lemmi 3.1.b.II e 3.6; prendiamo $\Gamma = \varphi_1, \dots, \varphi_m$ e $\Delta = \psi_1, \dots, \psi_n$ con $m, n \geq 1$:

$$\frac{\frac{\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}{(\{1\} \cdot V(\varphi_1) \cdot \dots \cdot V(\varphi_m))^{--} \subseteq (\{1\} \cdot V(\psi_1)^- \cdot \dots \cdot V(\psi_n)^-)^-}{(\{1\} \cdot V(\varphi_1) \cdot \dots \cdot V(\varphi_m))^- \supseteq (\{1\} \cdot V(\psi_1)^- \cdot \dots \cdot V(\psi_n)^-)^-}{\{1\}^- \supseteq (\{1\} \cdot V(\varphi_1) \cdot \dots \cdot V(\varphi_m) \cdot V(\psi_1)^- \cdot \dots \cdot V(\psi_n)^-)^-}{\{1\}^- \supseteq (\{1\} \cdot V(\varphi_1^+)^- \cdot \dots \cdot V(\varphi_m^+)^- \cdot V(\psi_1)^- \cdot \dots \cdot V(\psi_n)^-)^-}{\{1\}^{--} \subseteq (\{1\} \cdot V(\varphi_1^+)^- \cdot \dots \cdot V(\varphi_m^+)^- \cdot V(\psi_1)^- \cdot \dots \cdot V(\psi_n)^-)^-} \\ V_{\text{sx}}([\] \subseteq V_{\text{dx}}(\Gamma^\perp, \Delta)$$

Per quanto riguarda la completezza, il modello sintattico per ${}^\perp\mathbf{B}$, che abbiamo chiamato $\mathbb{F}_\perp = (Frm_e^*, \circ, [\], R_\perp)$, diventa un monoide simmetrico che gode della proprietà del trasporto se si considera la derivabilità nel calcolo ${}^\perp\mathbf{B}$ con la regola di trasporto. Infatti abbiamo già visto che è un monoide simmetrico; vediamo la proprietà di trasporto, prendiamo due elementi $\Gamma, \Delta \in Frm_e^*$ allora:

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma R_\perp \Delta}{\Gamma \vdash \Delta^\perp}}{\Gamma, \Delta^{\perp\perp} \vdash}}{\Gamma, \Delta \vdash} trL \\ \Gamma \circ \Delta R_\perp [\]$$

Passiamo al caso della *separazione*. Come nel caso precedente, per la validità dobbiamo verificare che le regole di separazione sono valide nei monoidi che godono della proprietà della separazione; per la completezza dobbiamo mostrare che il modello sintattico costruito sul calcolo ${}^\perp\mathbf{B}$ con le regole di separazione è un monoide simmetrico che gode della proprietà della separazione. Andiamo ancora con ordine, verificando prima la validità delle regole di separazione.

- *sepL*: $\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma, \Delta) \subseteq V_{\text{dx}}([\])}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta^\perp)}$

è verificata grazie alla proposizione 3.5 e il lemma 3.7; siano $\Gamma = \varphi_1, \dots, \varphi_m$ e $\Delta = \psi_1, \dots, \psi_n$ con $m, n \geq 1$:

$$\frac{\frac{\frac{V_{\text{sx}}(\Gamma, \Delta) \subseteq V_{\text{dx}}([\])}{(\{1\} \cdot V(\varphi_1) \cdot \dots \cdot V(\varphi_m) \cdot V(\psi_1) \cdot \dots \cdot V(\psi_n))^{--} \subseteq \{1\}^-}{(\{1\} \cdot V(\varphi_1) \cdot \dots \cdot V(\varphi_m))^{--} \subseteq (\{1\} \cdot V(\psi_1) \cdot \dots \cdot V(\psi_n))^-}{(\{1\} \cdot V(\varphi_1) \cdot \dots \cdot V(\varphi_m))^{--} \subseteq (\{1\} \cdot V(\psi_1^+)^- \cdot \dots \cdot V(\psi_n^+)^-)^-}{V_{\text{sx}}(\Gamma) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta^\perp)}$$

$$\bullet \text{ sepR: } \frac{V_{\text{sx}}([\] \subseteq V_{\text{dx}}(\Gamma, \Delta)}{V_{\text{sx}}(\Gamma^\perp) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}$$

è verificata ancora grazie alla proposizione 3.5 e i lemmi 3.1.b.II e 3.7; prendiamo $\Gamma = \varphi_1, \dots, \varphi_m$ e $\Delta = \psi_1, \dots, \psi_n$ con $m, n \geq 1$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{V_{\text{sx}}([\] \subseteq V_{\text{dx}}(\Gamma, \Delta)}{\{1\}^{--} \subseteq (\{1\} \cdot V(\varphi_1)^- \dots \cdot V(\varphi_m)^- \cdot V(\psi_1)^- \dots \cdot V(\psi_n)^-)^-}{\{1\}^- \supseteq (\{1\} \cdot V(\varphi_1)^- \dots \cdot V(\varphi_m)^- \cdot V(\psi_1)^- \dots \cdot V(\psi_n)^-)^-}{(\{1\} \cdot V(\varphi_1)^- \dots \cdot V(\varphi_n)^-)^- \supseteq (\{1\} \cdot V(\psi_1)^- \dots \cdot V(\psi_m)^-)^-}{(\{1\} \cdot V(\varphi_1^\perp) \dots \cdot V(\varphi_n^\perp))^-\supseteq (\{1\} \cdot V(\psi_1)^- \dots \cdot V(\psi_m)^-)^-}{(\{1\} \cdot V(\varphi_1^\perp) \dots \cdot V(\varphi_n^\perp))^-\supseteq (\{1\} \cdot V(\psi_1)^- \dots \cdot V(\psi_m)^-)^-}{V_{\text{sx}}(\Gamma^\perp) \subseteq V_{\text{dx}}(\Delta)}$$

Per quanto riguarda la completezza, come visto nel caso del trasporto, il modello sintattico per ${}^\perp\mathbf{B}$, cioè $\mathbb{F}_\perp = (Frm_e^*, \circ, [\], R_\perp)$, diventa ora un monoide simmetrico che gode della proprietà della separazione se si considera la derivabilità nel calcolo ${}^\perp\mathbf{B}$ con la regola di separazione. Come prima, ci basta verificare la proprietà della separazione, consideriamo quindi $\Gamma, \Delta \in Frm_e^*$ allora:

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \circ \Delta R_\perp [\]}{\Gamma, \Delta \vdash}}{\Gamma \vdash \Delta^\perp}}{\Gamma R_\perp \Delta} \text{ sepL}$$

□

Generalizzando questo teorema possiamo considerare il calcolo ${}^\perp\mathbf{B}$ dotato di entrambe le regole di trasporto e separazione; in tal caso una sua semantica completa è costituita dai monoidi che godono delle proprietà della separazione e del trasporto contemporaneamente.

Le due affermazioni importanti che ci porge il teorema sono:

- i monoidi simmetrici che godono della proprietà del trasporto formano una semantica completa per ${}^\perp\mathbf{OL}$.
- i monoidi simmetrici che godono delle proprietà del trasporto e della separazione formano una semantica completa per ${}^\perp\mathbf{L}$.

Quanto abbiamo visto al paragrafo 3.4 solleva una domanda: qual è la relazione tra i monoidi fortemente simmetrici e i monoidi simmetrici che godono contemporaneamente delle proprietà del trasporto e della separazione? La questione sorge osservando che i primi sono equivalenti agli spazi delle

fasi, i quali formano una semantica completa per la Logica Lineare Classica, mentre i monoidi simmetrici con le proprietà del trasporto e della separazione formano una semantica completa per un segmento, ${}^{\perp}\mathbf{L}$, dello stesso calcolo.

Si scopre che i monoidi simmetrici che godono delle proprietà del trasporto e della separazione ed i monoidi fortemente simmetrici sono la stessa cosa! Vediamolo in dettaglio.

Proposizione 3.6. *Un monoide con relazione $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1, R)$ è fortemente simmetrico se e solo se è un monoide simmetrico che gode delle proprietà del trasporto e della separazione.*

Dimostrazione. Sia \mathcal{M} monoide fortemente simmetrico allora:

- è simmetrico, come abbiamo visto prendendo $z = 1$ in (3.5):

$$\frac{\frac{x R y}{1 \cdot x R y}}{1 \cdot y R x} \\ y R x$$

- gode della proprietà del trasporto, infatti presi $x, y \in M$:

$$\frac{\frac{x R y}{x \cdot 1 R y}}{x \cdot y R 1}$$

- gode della proprietà della separazione, presi $x, y \in M$:

$$\frac{\frac{1 R x \cdot y}{x \cdot y R 1}}{x \cdot 1 R y} \\ x R y$$

Viceversa, sia \mathcal{M} monoide simmetrico che gode delle proprietà del trasporto e della separazione, allora presi $x, y, z \in M$:

$$\frac{\frac{\frac{x \cdot y R z}{x \cdot y \cdot z R 1}}{x \cdot z \cdot y R 1}}{1 R x \cdot z \cdot y} \\ x \cdot z R y \quad \begin{array}{l} \text{trasporto} \\ \cdot \text{ commutativo} \\ R \text{ simmetrica} \\ \text{separazione} \end{array}$$

E questo significa proprio che \mathcal{M} è fortemente simmetrico. \square

Nel caso di monoidi fortemente simmetrici, quindi, possiamo riformulare il teorema 3.7 di completezza.

Teorema 3.8. di completezza per i monoidi fortemente simmetrici.
Il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile nel calcolo ${}^{\perp}\mathbf{L}$ se e solo se è valido in ogni monoide fortemente simmetrico, qualunque sia la valutazione scelta per le formule atomiche di tipo p .

Passando alla semantica, si scopre che la valutazione $V(\cdot)$ che rende i monoidi fortemente simmetrici completi rispetto a ${}^{\perp}\mathbf{L}$ è proprio quella che rende gli spazi delle fasi completi rispetto alla Logica Lineare Classica. Possiamo quindi affermare che, rispetto alla Logica Lineare Classica, i monoidi fortemente simmetrici e gli spazi delle fasi sono semanticamente la stessa cosa!

Per completezza vediamo il confronto tra le due semantiche: nei monoidi $(M, \cdot, 1, R)$ e negli spazi delle fasi (M, \perp) associati. Si vede subito che sono la stessa, basta ricordare che nella corrispondenza individuata nel teorema 3.3 per ogni $A \subseteq M$ si ha $A^{\perp} = A^{-}$ e inoltre $\perp = \{1\}^{-}$. Indichiamo con $(\cdot)^*$ la valutazione delle formule negli spazi delle fasi. Per le formule atomiche p si sceglie p^* tra i fatti, la valutazione $V(p)$ sarà allora lo stesso sottoinsieme di M che sappiamo essere anche saturo; per le altre si segue la definizione induttiva:

valutazione in $(M, \cdot, 1, R)$:	valutazione in (M, \perp) :
$V(\varphi \otimes \psi) \equiv (V(\varphi) \cdot V(\psi))^{--}$	$(\varphi \otimes \psi)^* \equiv \varphi^* \otimes \psi^*$ $= (\varphi^* \cdot \psi^*)^{\perp\perp}$
$V(\varphi \wp \psi) \equiv (V(\varphi)^{-} \cdot V(\psi)^{-})^{-}$	$(\varphi \wp \psi)^* \equiv ((\varphi^*)^{\perp} \otimes (\psi^*)^{\perp})^{\perp}$
$V(1) \equiv \{1\}^{--}$	$1^* \equiv \{1\}^{\perp\perp}$
$V(\perp) \equiv \{1\}^{-}$	$\perp^* \equiv \perp$
$V(\varphi \oplus \psi) \equiv (V(\varphi) \cup V(\psi))^{--}$	$(\varphi \oplus \psi)^* \equiv (\varphi^* \cup \psi^*)^{\perp\perp}$
$V(\varphi \& \psi) \equiv V(\varphi) \cap V(\psi)$	$(\varphi \& \psi)^* \equiv \varphi^* \cap \psi^*$
$V(\top) \equiv M$	$\top^* \equiv M$
$V(0) \equiv \emptyset^{--}$	$0^* \equiv \emptyset^{\perp\perp}$
$V(\varphi^{\perp}) \equiv V(\varphi)^{-}$	$(\varphi^{\perp})^* \equiv (\varphi^*)^{\perp}$

Come si vede leggendo le definizioni, gli insiemi che interpretano le formule sono proprio gli stessi.

In particolare vediamo il caso della *implicazione lineare*. In Logica Lineare l'implicazione tra due formule φ, ψ è definibile come $\varphi \multimap \psi \equiv \varphi^{\perp} \wp \psi$. Si può dimostrare che negli spazi delle fasi la valutazione dell'implica diventa:

$$(\varphi \multimap \psi)^* = \varphi^* \multimap \psi^* = \{x \in M : x \cdot y \in \psi^* \text{ per ogni } y \in \varphi^*\}$$

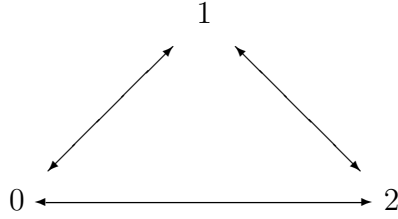
che è proprio la buona definizione dell'implicazione.

Vediamo cosa succede nei monoidi fortemente simmetrici. Visto che le valutazioni sui saturi e sui fatti coincidono, otteniamo ancora:

$$\begin{aligned} V(\varphi \multimap \psi) &\equiv V(\varphi^\perp \wp \psi) = (\varphi^\perp \wp \psi)^* \\ &= \{x \in M : x \cdot y \in \psi^* \text{ per ogni } y \in \varphi^*\} \\ &= \{x \in M : x \cdot y \in V(\psi) \text{ per ogni } y \in V(\varphi)\}; \end{aligned}$$

otteniamo l'usuale interpretazione della implicazione.

Infine vediamo con un controesempio che i monoidi simmetrici sono semanticamente più deboli dei monoidi fortemente simmetrici, cioè gli spazi delle fasi. Sappiamo (cfr. [7]) che negli spazi delle fasi (M, \perp) presi $A, B \subseteq M$ vale $A^{\perp\perp} \cdot B^{\perp\perp} \subseteq (A \cdot B)^{\perp\perp}$; questo fatto è essenziale per dimostrare che la valutazione del connettivo \otimes è associativa. Quindi anche per i monoidi fortemente simmetrici $(M, \cdot, 1, R)$ presi $A, B \subseteq M$ vale $A^{--} \cdot B^{--} \subseteq (A \cdot B)^{--}$. Mostriamo che questo non vale nei monoidi simmetrici. Consideriamo un monoide simmetrico particolare. Prendiamo il monoide moltiplicativo, commutativo, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ con la relazione R riflessiva così definita (il segno \circlearrowleft significa che l'elemento è in relazione con sé stesso):



Mostriamo che $\{1\}^{--} \cdot \{2\}^{--} \not\subseteq (\{1\} \cdot \{2\})^{--}$, infatti:

$$\begin{aligned} \{1\}^{--} &= \{0, 2\}^- = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ \{2\}^{--} &= (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^- = \{0, 2\} \\ \{1\}^{--} \cdot \{2\}^{--} &= \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cdot \{0, 2\} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ (\{1\} \cdot \{2\})^{--} &= \{2\}^{--} = \{0, 2\}. \end{aligned}$$

Quindi l'inclusione, che vale per i monoidi fortemente simmetrici, non può essere verificata.

3.7 Riepilogo

Per completare il discorso dobbiamo dire che il calcolo ${}^\perp\mathbf{B}$ può essere esteso con le regole strutturali di contrazione e indebolimento (cfr. pagina 37), ottenendo così altre tre logiche conosciute (cfr. [5]):

$\perp\mathbf{BS}$ = $\perp\mathbf{B}$ + *regole strutturali di contrazione e indebolimento*, che equivale alla logica quantistica paraconsistente, in [3].

$\perp\mathbf{O}$ = $\perp\mathbf{B}$ + *regole strutturali di trasporto, contrazione e indebolimento*, che equivale alla ortologica.

$\perp\mathbf{C}$ = $\perp\mathbf{B}$ + *regole strutturali di trasporto, separazione, contrazione e indebolimento*, che equivale alla Logica proposizionale Classica.

Combinando i risultati ottenuti ai paragrafi 2.4 e 3.6 possiamo fornire una semantica completa anche per ognuna di queste logiche. Vediamolo in dettaglio con una tabella riassuntiva di tutti i sistemi logici da noi considerati e le rispettive semantiche complete che abbiamo ottenuto in questa tesi.

Calcolo	Semantica
\mathbf{B}^-	monoidi con relazione; se vale la regola di scambio, anche i monoidi simmetrici
\mathbf{BS}^-	monoidi con relazione commutativi in cui valgono le proprietà (c) e (w) ; monoidi simmetrici in cui valgono le proprietà (c) e (w)
$\perp\mathbf{B}$	monoidi simmetrici
$\perp\mathbf{OL}$	monoidi simmetrici che godano della proprietà del trasporto
$\perp\mathbf{L}$	monoidi fortemente simmetrici
$\perp\mathbf{BS}$	monoidi simmetrici in cui valgono le proprietà (c) e (w)
$\perp\mathbf{O}$	monoidi simmetrici che godano della proprietà del trasporto e nei quali valgono le proprietà (c) e (w)
$\perp\mathbf{C}$	monoidi fortemente simmetrici in cui valgono le proprietà (c) e (w)

Bibliografia

- [1] G. BATTILOTTI, *Logica di base attraverso il principio di riflessione*. Tesi di Dottorato, Univesità di Siena, Febbraio 1997; relatore : G.Sambin.
- [2] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*. AMS Colloquium publications 25 (1967), pp. 122-131.
- [3] M. L. DALLA CHIARA, R. GIUNTINI, *Praconsistent Quantum Logics*. Foundations of Physics, 19 (1989), pp. 891-904.
- [4] C. FAGGIAN, *Classical proofs via basic logic*, in Proceedings of CSL '97, Aarhus, M. Nielsen and W. Thomas, ed., no. 1414 in Lecture Notes in Computer Science, Springer, 1997, pp. 203-219.
- [5] ———, *Notes on modular cut-elimination*. Manoscritto.
- [6] G. GENTZEN, *The collected papers of Gerhard Gentzen*, M. E. Szabo (1969).
- [7] J. GIRARD, *Linear Logic*. Theoretical Computer Science, 50 (1987), pp. 1-102.
- [8] ———, *Linear Logic: its syntax and semantics*, in Advances in Linear Logic, J. Girard et al., eds., London Mathematical Society L.N., vol. 222, Cambridge, 1995.
- [9] F. GUIDI, *Galois connections on the basic pair*. Manoscritto (25 giugno 1999).
- [10] ———, *Basic pairs as semantics for the conjunctive fragment of the calculus BS*. Manoscritto (20 settembre 2000).
- [11] H. ONO, *Semantics for Substructural Logics*, in Substructural Logics, K. Dos̆en and P. Schroeder-Heister, eds., Oxford, 1993, Clarendon, pp. 259-291.

- [12] H. ONO, Y. KOMORI, *Logics without the contraction rule*. Journal of Symbolic Logic, 50 (1985), pp. 169-201.
- [13] A. MOGNON, *Semantiche algebriche per la logica di base e le sue estensioni*. Tesi di Laurea in Matematica, Università di Padova, Marzo 2000.
- [14] G. SAMBIN, *Pretopologies and completeness proofs*. Journal of Symbolic Logic, 60 (1995), pp. 861-878. (Preprint n. 15, Dipartimento di Matematica P. e A., Università di Padova, Agosto, 1992).
- [15] G. SAMBIN, G. BATTILOTTI, C. FAGGIAN, *Basic logic: reflection, symmetry, visibility*. Journal of Symbolic Logic, 65 (2000), pp. 979-1013.
- [16] G. SAMBIN, S. GEBELLATO, *A preview of the basic picture: a new perspective on formal topology*, in Types for Proofs and Programs. TYPES '98, T. Altenkirch, W. Naraschewski, B. Reus, eds., vol. 1657 di Lecture Notes in Computer Science, Springer, 1999, pp. 194-207.
- [17] G. SAMBIN, S. VALENTINI, *Building up a toolbox for Martin-Löf's type theory: subset theory*, in Twenty-five years of constructive type theory. Proceedings of the Congress held in Venice, October, 1995, G. Sambin and J. Smith, eds., Oxford U. P., 1998, pp. 221-244.