LA DUALITÀ DI STONE

Enrico Gregorio

Dipartimento di Informatica — Sezione di Matematica
Università di Verona
Strada le Grazie 15 – Ca' Vignal, 37134 Verona (Italy)

`gregorio@sci.univr.it`

1. Introduzione

Il concetto di dualità nasce per la prima volta con la geometria proiettiva. Se ai punti del piano aggiungiamo un'altra classe di punti, i punti "impropri" corrispondenti alle classi di equivalenza di rette parallele, e imponiamo che ciascun punto improprio appartenga a ciascuna delle rette della classe che lo determina, e assumiamo che l'insieme dei punti impropri sia una nuova retta, otteniamo una struttura che soddisfa i seguenti assiomi:

(1a) *data una retta esiste un punto che non appartiene ad essa*;
(2a) *per due punti distinti passa una ed una sola retta*;

(1b) *dato un punto esiste una retta che non passa per quel punto*;
(2b) *due rette distinte si incontrano in uno ed un solo punto*.

Se consideriamo una struttura astratta che soddisfa questi quattro assiomi, scopriamo che raddoppiamo il numero dei teoremi se ci accorgiamo che ogni assioma (a) corrisponde ad un assioma (b), quando si "traduca" punto con retta (e viceversa) e passaggio di una retta per un punto con appartenenza di un punto ad una retta.

Un fatto analogo accade con i reticoli: se un teorema vale in ogni reticolo, allora il teorema "duale" che si ottiene usando la tabella

$\wedge \to \vee$	$\vee \to \wedge$
$\leq \to \geq$	$\geq \to \leq$
$\sup \to \inf$	$\inf \to \sup$
$0 \to 1$	$1 \to 0$
${}^* \to {}^*$	

vale in ogni reticolo. Ad esempio, se in un reticolo vale la proprietà distributiva di $\wedge$ rispetto a $\vee$, allora in esso vale anche la proprietà distributiva di $\vee$ rispetto a $\wedge$.

Esistono anche dualità che coinvolgono "strutture" diverse. La dualità di Stone è una di queste. Altri esempi sono la dualità di Pontryagin per i gruppi abeliani localmente compatti e la dualità degli spazi vettoriali.

Diamo questo esempio, che è piuttosto istruttivo.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbf{R}$. Consideriamo V^*, insieme di tutte le applicazioni lineari di V in $\mathbf{R}$; possiamo definire una struttura di spazio vettoriale su V^* ponendo, per $\alpha, \beta \in V^*$ e $r \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta \colon v &\mapsto \alpha(v) + \beta(v),\\ r\alpha \colon v &\mapsto r\alpha(v) = \alpha(rv).\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che V^*, con queste operazioni, è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$, detto il *duale* di V. Fissiamo una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V e definiamo n applicazioni lineari $v_i^* \colon V \to \mathbf{R}$ ponendo

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e ricordando che un'applicazione lineare è determinata dalla sua azione sugli elementi di una base. Sia ora $\alpha \in V^*$; allora, se $v = r_1v_1 + r_2v_2 + \dots + r_nv_n$, abbiamo

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} r_i\alpha(v_i);$$

in particolare, $v_i^*(v) = r_i$. Allora, come si può facilmente calcolare, se poniamo $\alpha^{(i)} = \alpha(v_i) \in \mathbf{R}$,

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} r_i\alpha^{(i)}v_i^*(v),$$

per ogni $v \in V$. Di conseguenza

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i\alpha^{(i)}v_i^*$$

e le applicazioni v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^* formano un insieme di generatori di V^*, che quindi ha dimensione al più n. Di fatto, questi elementi di V^* sono linearmente indipendenti (esercizio), quindi $\dim V^* = \dim V$.

Se $f \colon V \to W$ è un'applicazione lineare, possiamo definire $f^* \colon W^* \to V^*$ ponendo $f^*(\beta) = \beta \circ f$, per $\beta \in W^*$. Si può verificare (esercizio) che f^* è lineare.

Ancora, visto che V^* è uno spazio vettoriale di dimensione finita, possiamo costruire il suo duale V^{**}. Possiamo anche definire un'applicazione $\omega_V \colon V \to V^{**}$ ponendo, per $v \in V$, $\omega_V(v) = \hat{v}$, dove

$$\hat{v}(\alpha) = \alpha(v).$$

Di nuovo è solo questione di calcoli la verifica che ω_V è lineare. Abbiamo però un fatto importante: ω_V è *iniettiva*. Infatti, se $v \in V$ e $v \neq 0$, esiste una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V dove $v_1 = v$. Ma allora $\hat{v}(v_1^*) = v_1^*(v) = 1$, cioè $\hat{v} = \omega_V(v) \neq 0$. Quindi lo spazio nullo di ω_V è $\{0\}$. Dal momento che $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$, possiamo anche concludere che ω_V è un *isomorfismo*.

Quando svilupperemo la dualità di Stone, scopriremo fatti analoghi a questi.

Al termine di ogni sezione sono presentati alcuni esercizi, che fanno parte integrante del testo e *vanno* svolti; alcuni dei concetti lì presentati sono usati in seguito. Vanno svolti anche, ovviamente, tutti gli esercizi sparsi nel testo.

2. Spazi topologici

Esaminiamo la solita definizione di funzione continua in un punto.

Definizione 2.1. Sia f una funzione reale di variabile reale definita sull'intervallo aperto (a, b) e sia x_0 un punto di (a, b). Diciamo che f è *continua* in x_0 se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\text{per ogni } x \in (a, b) \text{ con } |x - x_0| < \delta, \text{ abbiamo } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Cerchiamo un modo diverso di esprimere lo stesso concetto, senza usare ε e δ.

Diciamo che un sottoinsieme V di (a, b) è un *intorno* di x_0 se V contiene un intervallo aperto contenente x_0. In altre parole, V è un intorno di x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che

$$\text{da } x \in (a, b) \text{ e } |x - x_0| < \delta \text{ segue } x \in V.$$

Possiamo naturalmente dare la definizione di intorno di un punto della retta reale: un insieme U di numeri reali è un intorno di l se U contiene un intervallo aperto contenente l. In altre parole, U è un intorno di l se esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\text{da } |y - l| < \varepsilon \text{ segue } y \in U.$$

La definizione di continuità può allora essere data nel modo seguente.

Definizione 2.2. Sia f una funzione reale di variabile reale definita sull'intervallo aperto (a, b) e sia x_0 un punto di (a, b). Diciamo che f è *continua* in x_0 se, per ogni intorno U di $f(x_0)$, l'immagine inversa tramite f di U è un intorno di x_0 o, che è lo stesso,

$$\text{per ogni intorno } U \text{ di } f(x_0), \text{ esiste un intorno } V \text{ di } x_0 \text{ tale che } f^{\rightarrow}(V) \subseteq U.$$

Si dice brevemente: *l'immagine inversa di ogni intorno di $f(x_0)$ è un intorno di x_0.* □

Lasciamo come esercizio vedere che le definizioni date di continuità sono equivalenti. Notiamo invece che nella seconda definizione è implicito un fatto importante: se U è un intorno di un punto e $U' \supseteq U$, allora U' è anch'esso un intorno del punto. Basta infatti applicare la definizione.

Ci limitiamo ora alla retta reale $\mathbf{R}$. Vogliamo studiare le proprietà del sistema degli intorni dei punti di $\mathbf{R}$. Dato $x \in \mathbf{R}$, indichiamo con $\mathscr{U}_x$ la famiglia degli intorni di x.

Teorema 2.3. *Il sistema degli intorni dei punti di* $\mathbf{R}$ *soddisfa le seguenti proprietà:*

(Int-1) *per ogni* $x \in \mathbf{R}$, $\mathscr{U}_x \neq \emptyset$*;*
(Int-2) *per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *ed ogni* $V \in \mathscr{U}_x$, $x \in V$*;*
(Int-3) *per ogni* $x \in \mathbf{R}$*, se* $U \in \mathscr{U}_x$ *e* $V \supseteq U$*, allora* $V \in \mathscr{U}_x$*;*
(Int-4) *per ogni* $x \in \mathbf{R}$*, se* $U \in \mathscr{U}_x$ *e* $V \in \mathscr{U}_x$*, allora* $U \cap V \in \mathscr{U}_x$*;*
(Int-5) *per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *ed ogni* $U \in \mathscr{U}_x$*, esiste* $V \in \mathscr{U}_x$ *tale che, per ogni* $y \in V$*, sia* $V \in \mathscr{U}_y$*;*
(Int-6) *per ogni* $x, y \in \mathbf{R}$*, esistono* $U \in \mathscr{U}_x$ *e* $V \in \mathscr{U}_y$ *tali che* $U \cap V = \emptyset$*.*

Le dimostrazioni richieste sono abbastanza facili; notiamo che la proprietà (Int-5) collega fra loro i sistemi degli intorni dei vari punti di $\mathbf{R}$: non è possibile definire arbitrariamente gli intorni di ciascun punto, bisogna che la scelta sia fatta in modo "coerente" per i vari punti.

La proprietà (Int-5) dice che ogni intorno di x contiene un intorno speciale V, il quale è intorno di *ogni suo punto*.

Torneremo più avanti sull'analisi dettagliata della proprietà (Int-6), che si chiama anche *Proprietà di Hausdorff*[1].

Definizione 2.4. Un sottoinsieme A di $\mathbf{R}$ è *aperto* se è intorno di ogni suo punto, cioè $A \in \mathscr{U}_x$, per ogni $x \in A$. □

La proprietà (Int-5) dice allora che ogni intorno contiene un intorno aperto. La cosa è banale se osserviamo che, evidentemente, ogni intervallo aperto è un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}$.

Cerchiamo di isolare alcune proprietà della famiglia degli aperti di $\mathbf{R}$.

Se $\mathscr{X}$ è un insieme di sottoinsiemi di $\mathbf{R}$, indichiamo con $\bigcup \mathscr{X}$ l'*unione* di $\mathscr{X}$, cioè

$$\bigcup \mathscr{X} = \{\, x \in \mathbf{R} : \text{esiste } A \in \mathscr{X} \text{ tale che } x \in A \,\}.$$

Teorema 2.5. *La famiglia* $\mathscr{U}$ *dei sottoinsiemi aperti di* $\mathbf{R}$ *soddisfa le seguenti proprietà:*

(Ap-1) $\emptyset \in \mathscr{U}$*;*
(Ap-2) $\mathbf{R} \in \mathscr{U}$*;*
(Ap-3) *se* $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{U}$*, allora* $\bigcup \mathscr{X} \in \mathscr{U}$*;*
(Ap-4) *se* $A, B \in \mathscr{U}$*, allora* $A \cap B \in \mathscr{U}$*.*

Dimostrazione. La proprietà (Ap-1) è conseguenza della (Ap-3), prendendo $\mathscr{X} = \emptyset$.

(Ap-2) Discende da (Int-1) e (Int-3).

(Ap-3) Poniamo $B = \bigcup \mathscr{X}$. Sia $x \in B$; dobbiamo dimostrare che $B \in \mathscr{U}_x$. Sia $A \in \mathscr{X}$ tale che $x \in A$; allora $A \in \mathscr{U}$, quindi $A \in \mathscr{U}_x$ e da $A \subseteq B$ segue che $B \in \mathscr{U}_x$, per la (Int-3).

(Ap-4) Sia $x \in A \cap B$, cioè $x \in A$ e $x \in B$. Poiché $A, B \in \mathscr{U}$, abbiamo che $A, B \in \mathscr{U}_x$, quindi $A \cap B \in \mathscr{U}_x$, per la (Int-4). □

Di fatto queste proprietà degli aperti sono quelle che bastano per descrivere il sistema degli intorni dei punti di $\mathbf{R}$. Lo vedremo rendendo astratta la nozione di continuità e, più in generale di topologia. La famiglia $\mathscr{U}$ si chiama infatti la *topologia usuale* su $\mathbf{R}$.

[1] Felix Hausdorff è uno dei fondatori della topologia, con il suo libro *Grundzüge der Mengenlehre*, del 1914.

Definizione 2.6. Sia X un insieme e sia $\mathscr{T}$ un insieme di sottoinsiemi di X. Diciamo che $\mathscr{T}$ è una *topologia* su X se:

(Ap-1) $\emptyset \in \mathscr{T}$;
(Ap-2) $X \in \mathscr{T}$;
(Ap-3) se $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{T}$, allora $\bigcup \mathscr{X} \in \mathscr{T}$;
(Ap-4) se $A, B \in \mathscr{T}$, allora $A \cap B \in \mathscr{T}$.

Le proprietà si enunciano in breve dicendo: *X è aperto, ogni unione di aperti è aperta, l'intersezione di due aperti è aperta.* □

Per abuso di linguaggio, si parla spesso dello *spazio topologico* X, intendendo un insieme X sul quale è fissata una topologia. Diamo ora alcuni esempi di topologie su insiemi.

Esempio 2.7. Sia X un insieme e sia $\mathscr{T}$ l'insieme dei sottoinsiemi di X costituito da X e dai sottoinsiemi a complementare finito. Questa è una topologia su X, che si chiama *topologia cofinita*. □

Esempio 2.8. Sia $\mathscr{S}_\uparrow$ l'insieme di tutte le semirette aperte di $\mathbf{R}$ illimitate superiormente (anche $\mathbf{R}$ si considera fra queste). Questa è una topologia su $\mathbf{R}$. Notiamo che $\mathscr{S}_\uparrow \subset \mathscr{U}$. Perciò su uno stesso insieme possono essere definite più topologie diverse tra loro. □

Esempio 2.9. Sia $\mathscr{S}_\downarrow$ l'insieme di tutte le semirette aperte di $\mathbf{R}$ illimitate inferiormente (anche $\mathbf{R}$ si considera fra queste). Questa è una topologia su $\mathbf{R}$. Notiamo che $\mathscr{S}_\downarrow \not\subset \mathscr{S}_\uparrow$ e $\mathscr{S}_\uparrow \not\subset \mathscr{S}_\downarrow$. Perciò su un insieme possono essere definite topologie *non confrontabili*. □

Esempio 2.10. Se X è un insieme, l'insieme $\mathsf{P}(X)$ delle parti di X è certamente una topologia su X, e si chiama *topologia discreta*. Analogamente $\{\emptyset, X\}$ è una topologia su X, che si chiama *topologia indiscreta* o *banale*. Queste due topologie coincidono solo sull'insieme vuoto e sugli insiemi con un solo elemento, che d'altra parte ammettono una ed una sola topologia. □

Esempio 2.11. Sia $\mathscr{T}$ una topologia su X e sia $Y \subseteq X$. Consideriamo

$$\mathscr{T}_Y = \{\, A \cap Y : A \in \mathscr{T} \,\}.$$

Non è difficile verificare che $\mathscr{T}_Y$ è una topologia su Y, che si chiama *topologia relativa* su Y indotta da $\mathscr{T}$. In tal caso Y si chiama anche *sottospazio* di X. □

Esempio 2.12. Sia $\mathscr{T}$ una topologia su X e sia $f\colon Y \to X$ un'applicazione. Consideriamo su Y gli insiemi $f^{\leftarrow}(A)$, per $A \in \mathscr{T}$. Questa è una topologia su Y, che si chiama *topologia debole* indotta da f. È chiaro che, nell'esempio precedente, la topologia relativa è la topologia debole indotta dall'applicazione di inclusione di Y in X. □

Esempio 2.13. Sia $X, \leq$ un insieme totalmente ordinato. Definiamo *intervallo aperto* in X un sottoinsieme del tipo

$$\begin{aligned}(a,b) &= \{\, x \in X : a < x < b \,\}\\ (\leftarrow, a) &= \{\, x \in X : x < a \,\}\\ (a, \rightarrow) &= \{\, x \in X : a < x \,\}\\ (\leftarrow, \rightarrow) &= X\end{aligned}$$

con $a, b \in X$. Diciamo che $A \subseteq X$ è aperto se è unione di intervalli aperti. L'insieme degli aperti è una topologia su X, detta *topologia dell'ordine*. Infatti, l'intersezione di due intervalli aperti è un intervallo aperto. □

La topologia dell'ordine su **R** è esattamente la topologia usuale. Qual è la topologia dell'ordine su **N** (insieme dei naturali)?

Nell'ultimo esempio, abbiamo definito una topologia partendo da una famiglia di sottoinsiemi di X che è contenuta nella topologia.

Definizione 2.14. Sia $\mathscr{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Diciamo che $\mathscr{B}$ è una *base per una topologia* su X se:

(Base-1) $\bigcup \mathscr{B} = X$;

(Base-2) per ogni $A, B \in \mathscr{B}$ ed ogni $x \in A \cap B$, esiste $C \in \mathscr{B}$ tale che $x \in C$ e $C \subseteq A \cap B$.

La seconda proprietà è ovviamente soddisfatta se $\mathscr{B}$ è *chiusa per intersezioni*, cioè $A \cap B \in \mathscr{B}$, per ogni $A, B \in \mathscr{B}$. □

Gli intervalli aperti in un insieme totalmente ordinato formano una base per una topologia, nel senso appena specificato.

Teorema 2.15. *Sia $\mathscr{B}$ una base per una topologia su X. Esiste allora una ed una sola topologia $\mathscr{T}$ su X tale che $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$.*

Dimostrazione. Se $\mathscr{T}$ è una topologia su X e $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$, è chiaro che ogni unione di elementi di $\mathscr{B}$ deve essere un elemento di $\mathscr{T}$, per (Ap-3). Questo sistema l'unicità.

Supponiamo data la base $\mathscr{B}$ e consideriamo

$$\mathscr{T} = \{\, A \subseteq X : \text{esiste } \mathscr{X} \subseteq \mathscr{B} \text{ tale che } A = \bigcup \mathscr{X} \,\}.$$

Se proviamo che questa è una topologia su X, abbiamo concluso.

La proprietà (Ap-1) si ottiene prendendo $\emptyset = \bigcup \emptyset$.

La proprietà (Ap-2) è banale, così come la (Ap-3), che discende dalla definizione di $\mathscr{T}$.

Vediamo la (Ap-4). Siano $A = \bigcup \mathscr{X}$ e $B = \bigcup \mathscr{Y}$. Se $x \in A \cap B$, troviamo $A_x \in \mathscr{X}$ e $B_x \in \mathscr{Y}$ tali che $x \in A_x \cap B_x$. Per la definizione di base, troviamo allora $C_x \in \mathscr{B}$ tale che $x \in C_x$ e $C_x \subseteq A_x \cap B_x$. Ma allora

$$A \cap B = \bigcup \{\, C_x : x \in A \cap B \,\}$$

e quindi $A \cap B$ è unione di elementi di $\mathscr{B}$. □

Per questo teorema, data una base è univocamente definita una topologia. Se $\mathscr{B}$ è la base, la topologia da essa definita si indica con $\mathscr{T}(\mathscr{B})$.

Vediamo ora quando due basi definiscono la stessa topologia.

Teorema 2.16. *Siano $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ basi per una topologia su X. Allora $\mathscr{T}(\mathscr{B}_1) \subseteq \mathscr{T}(\mathscr{B}_2)$ se e solo se, per ogni $A \in \mathscr{B}_1$,*

$$A = \bigcup \{ B \in \mathscr{B}_2 : B \subseteq A \}.$$

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) È chiaro che $A \in \mathscr{B}_1$ implica $A \in \mathscr{T}(\mathscr{B}_2)$. Ne segue facilmente $\mathscr{T}(\mathscr{B}_1) \subseteq \mathscr{T}(\mathscr{B}_2)$.

($\Rightarrow$) Supponiamo $\mathscr{T}(\mathscr{B}_1) \subseteq \mathscr{T}(\mathscr{B}_2)$ e prendiamo $A \in \mathscr{B}_1$. Allora $A \in \mathscr{T}(\mathscr{B}_2)$, quindi A è unione di elementi di $\mathscr{B}_2$. □

Date due topologie $\mathscr{T}_1$ e $\mathscr{T}_2$ su X, diciamo che $\mathscr{T}_1$ è *meno fine* di $\mathscr{T}_2$ se $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$. Il teorema precedente dà il criterio per vedere se la topologia definita da una base è meno fine di un'altra topologia.

È molto utile poter definire una topologia partendo da una base.

Definizione 2.17. Sia X un insieme e sia $d\colon X \times X \to \mathbf{R}$ un'applicazione. Diremo che d è una *metrica* su X se valgono le seguenti proprietà:

(M-1) per ogni $x \in X$, $d(x, x) = 0$;
(M-2) per ogni $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$;
(M-3) per ogni $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
(M-4) per ogni $x, y \in X$, se $d(x, y) = 0$, allora $x = y$.

Diremo anche, in tal caso, che X è uno *spazio metrico*, con il solito abuso di linguaggio. □

La proprietà (M-3) si chiama *disuguaglianza triangolare*.

Esempio 2.18. Consideriamo $d\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita da

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Otteniamo una metrica su $\mathbf{R}^n$, per la disuguaglianza di Schwarz, che si chiama *metrica euclidea*. □

Esempio 2.19. Se X è un insieme non vuoto, l'applicazione $d\colon X \times X \to \mathbf{R}$ definita da

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

è una metrica su X, detta la metrica *discreta*. □

Data una metrica d su X, definiamo le *d-sfere* aperte in X come

$$S_d(x, r) = \{ y \in X : d(x, y) < r \},$$

per $x \in X$ e $r > 0$, $r \in \mathbf{R}$.

Proposizione 2.20. *Sia d una metrica su X. Le d-sfere aperte in X formano una base per una topologia su X.*

Dimostrazione. La (Base-1) è evidente, perché $x \in S_d(x, 1)$. Verifichiamo (Base-2). Sia $z \in S_d(x, r) \cap S_d(y, s)$ e fissiamo $\varepsilon \in \mathbf{R}$ tale che

$$0 < \varepsilon < \frac{r - d(x, z)}{2} \qquad \text{e} \qquad 0 < \varepsilon < \frac{s - d(y, z)}{2}.$$

Vogliamo provare che $S_d(z, \varepsilon) \subseteq S_d(x, r) \cap S_d(y, s)$. Sia $z' \in S_d(z, \varepsilon)$. Allora $d(x, z') \leq d(x, z) + d(z, z')$, per la disuguaglianza triangolare. Dunque

$$d(x, z') \leq d(x, z) + d(z, z') < d(x, z) + \varepsilon < \frac{r}{2} + \frac{d(x, z)}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Perciò $S_d(z, \varepsilon) \subseteq S_d(x, r)$. La dimostrazione che $S_d(z, \varepsilon) \subseteq S_d(y, s)$ è simile. □

La topologia che ha come base le sfere aperte per una metrica d si chiama la topologia *metrica indotta da d*. In certe applicazioni è utile limitarsi alla base che consiste delle sfere aperte di raggio *razionale*. La stessa dimostrazione precedente mostra che questa è una base. Inoltre, dato $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, si ha

$$S_d(x, r) = \bigcup \{\, S_d(x, q) : q \in \mathbf{Q}, 0 < q < r \,\}$$

dove $\mathbf{Q}$ denota i numeri razionali.

Metriche diverse possono definire la stessa topologia.

Esempio 2.21. Definiamo su $\mathbf{R}^2$ la metrica

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

(Esercizio: dimostrare che d_1 è una metrica.)

La metrica euclidea d e la metrica d_1 definiscono la stessa topologia su $\mathbf{R}^2$ (esercizio). □

C'è un altro modo di definire la topologia della metrica euclidea su $\mathbf{R}^2$. Consideriamo i *rettangoli aperti*, cioè i sottoinsiemi della forma

$$(a, b) \times (c, d)$$

dove $a < b$ e $c < d$. Il fatto che questi insiemi forniscano la base per una topologia su $\mathbf{R}^2$ è evidente. Inoltre ogni sfera aperta (nella metrica euclidea) è unione di rettangoli aperti, ed ogni rettangolo aperto è unione di sfere aperte. Perciò questa base definisce la stessa topologia della metrica euclidea (che si chiama ancora topologia usuale su $\mathbf{R}^2$).

Esercizi

2.1. Sia X un insieme. L'insieme $\mathrm{Top}(X)$ di tutte le topologie è, rispetto all'inclusione, un reticolo. (Si noti che $\mathrm{Top}(X)$ è un sottoinsieme di $\mathsf{P}(\mathsf{P}(X))$. L'estremo inferiore di due topologie è la loro intersezione.)

2.2. Trovare tutte le topologie su un insieme con due, tre, quattro o cinque elementi.

2.3. Ricordiamo che uno spazio topologico A si dice un sottospazio di X se $A \subseteq X$ e la topologia su A è la topologia relativa di X. Dimostrare che, se B è un sottospazio di X e A è un sottospazio di B, allora A è un sottospazio di X.

3. Chiusi — Operatori di chiusura

Data una topologia $\mathscr{T}$ su X, diciamo che $C \subseteq X$ è *chiuso* (rispetto a $\mathscr{T}$), se $X \setminus C$ è aperto, cioè $X \setminus C \in \mathscr{T}$. La famiglia dei chiusi ha perciò le proprietà seguenti, come risulta dalle formule di De Morgan:

(Ch-1) X è chiuso;
(Ch-2) $\emptyset$ è chiuso;
(Ch-3) l'intersezione di una famiglia (non vuota) di chiusi è chiusa;
(Ch-4) l'unione di due chiusi è chiusa.

Viceversa, è ovvio che data una famiglia di sottoinsiemi di X soddisfacente le proprietà (Ch-1–4), la famiglia formata dai complementari di questi sottoinsiemi è una topologia su X.

Questo fatto permette di definire una topologia in modo diverso.

Se $\mathscr{T}$ è una topologia su X e $A \leq X$, diciamo che un punto $x \in X$ è *$\mathscr{T}$-aderente* ad A se, per ogni aperto $U \in \mathscr{T}$ tale che $x \in U$, $U \cap A \neq \emptyset$. Osserviamo che ogni elemento di A è $\mathscr{T}$-aderente ad A. Indichiamo con $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$ l'insieme dei punti $\mathscr{T}$-aderenti ad A.

Teorema 3.1. *Per ogni $A \subseteq X$, $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$ è chiuso rispetto a $\mathscr{T}$. Inoltre:*

(1) $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(\emptyset) = \emptyset$*;*
(2) *se $A \subseteq X$, allora $A \subseteq \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$;*
(3) *se $A \subseteq X$, allora $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)) \subseteq \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$;*
(4) *se $A, B \subseteq X$, allora $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A \cup B) = \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A) \cup \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(B)$.*

Dimostrazione. Occorre verificare che $C = X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$ è aperto (cioè appartiene a $\mathscr{T}$). Sia $x \in C$; allora esiste un aperto $U_x \in \mathscr{T}$ tale che $x \in U_x$ ma $U_x \cap A = \emptyset$. Verifichiamo che, di fatto, $U_x \cap \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A) = \emptyset$. Sia, per assurdo, $y \in U_x \cap \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$. Allora y è aderente ad A. Ma $y \in U_x$ e quindi, per definizione di punto aderente, $U_x \cap A \neq \emptyset$: contraddizione.

Ne segue che $C = \bigcup\{\, U_x : x \in C \,\}$ e quindi C è aperto.

Verifichiamo ora le altre proprietà. La prima è ovvia: nessun punto può essere aderente a $\emptyset$. La seconda è conseguenza del fatto che ogni punto di A è aderente ad A.

Sia $x \in \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A))$; allora, preso un aperto U contenente x, esiste $y \in U \cap \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$. Poiché U è un aperto contenente y, abbiamo anche $U \cap A \neq \emptyset$. Dunque $x \in \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$ ed otteniamo la terza proprietà.

Sia $x \in \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A \cup B)$ e supponiamo, per assurdo, che $x \notin \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A) \cup \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(B)$. Ciò significa che x non è aderente né ad A né a B. Dunque esiste un aperto U tale che $x \in U$ e $U \cap A = \emptyset$; analogamente esiste un aperto V tale che $x \in V$ e $U \cap B = \emptyset$. Ora $W = U \cap V$ è aperto, $x \in W$ e $W \cap (A \cup B) = \emptyset$: contraddizione.

Viceversa, se $x \in \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A) \cup \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(B)$, allora x è aderente ad A oppure a B. Ne segue facilmente che x è aderente all'unione $A \cup B$. □

Corollario 3.2. *Per ogni $A \subseteq X$, $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$ è chiuso. Più precisamente, $C \subseteq X$ è chiuso se e solo se $C = \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(C)$.* □

Ci sono altre caratterizzazioni di $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$.

Proposizione 3.3. *Per ogni $A \subseteq X$, $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$ è l'intersezione di tutti i $\mathscr{T}$-chiusi che contengono A. Quindi $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$ è il più piccolo chiuso di X che contiene A.*

Dimostrazione. La seconda parte è facile conseguenza della prima, perché ogni intersezione di chiusi è chiusa.

Sia C un chiuso di X che contiene A, e sia $x \in \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$. Se fosse $x \notin C$, avremmo che $U = X \setminus C$ è un aperto che contiene x, ma tale che $U \cap A = \emptyset$: assurdo. □

Un punto $x \in X$ si dice *punto di accumulazione* per $A \subseteq X$ se, per ogni aperto U di X tale che $x \in U$, U contiene almeno un punto di A *distinto* da x. È chiaro che ogni punto di accumulazione è anche un punto aderente. Il viceversa non è vero: in uno spazio discreto nessun insieme ha punti di accumulazione.

Proposizione 3.4. *Se $A \subseteq X$, allora $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$ coincide con l'unione fra A e l'insieme dei punti di accumulazione di A.*

Dimostrazione. Evidentemente, per la proposizione precedente, ogni punto di accumulazione appartiene alla chiusura. Sia $x \in \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$, $x \notin A$. Allora x è un punto aderente ad A; ma se U è un aperto contenente x, il fatto che $U \cap A \neq \emptyset$ dice esattamente che $U \cap A$ contiene almeno un punto di A, il quale non può essere x. □

Diamo ora un concetto astratto che è talvolta utile nella teoria dei reticoli.

Definizione 3.5. Sia $L, \leq$ un reticolo con minimo e massimo. Un'applicazione $T\colon L \to L$ si dice un *operatore di chiusura* (di Kuratowski) in L quando:

(OC-1) $T(0) = 0$;
(OC-2) se $a \in L$, allora $a \leq T(a)$;
(OC-3) se $a \in L$, allora $T(T(a)) \leq T(a)$;
(OC-4) se $a, b \in L$, allora $T(a \vee b) = T(a) \vee T(b)$.

Notiamo che la (OC-2) insieme alla (OC-3) dicono che $T(a) = T(T(a))$, per ogni $a \in L$. □

Proposizione 3.6. *Se T è un operatore di chiusura in $L, \leq$, allora, per $a, b \in L$, da $a \leq b$ segue $T(a) \leq T(b)$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $a \le b$ se e solo se $a \vee b = b$. Supponiamo $a \le b$; allora $T(b) = T(a \vee b) = T(a) \vee T(b)$, quindi $T(a) \le T(b)$. □

Corollario 3.7. *Se T è un operatore di chiusura in $L, \le$, allora, per $a \in L$, vale $T(T(a)) = T(a)$.*

Dimostrazione. Esercizio (facile). □

Di particolare importanza sono gli operatori di chiusura su $L = \mathsf{P}(X)$, ordinato per inclusione. Ne abbiamo visto un esempio: se $\mathscr{T}$ è una topologia su X, allora $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}} \colon \mathsf{P}(X) \to \mathsf{P}(X)$ è un operatore di chiusura, per il teorema 3.1. Vogliamo far vedere che ogni operatore di chiusura su $\mathsf{P}(X)$ è di questo tipo.

Teorema 3.8. *Sia T un operatore di chiusura su $\mathsf{P}(X)$. Allora esiste una ed una sola topologia $\mathscr{T}$ su X tale che, per ogni $A \subseteq X$, $T(A) = \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$. Si ha*

$$\mathscr{T} = \{\, X \setminus C : C \in \mathsf{P}(X), C = T(C) \,\}.$$

Dimostrazione. Sappiamo già che i chiusi determinano univocamente la topologia. Ci basta allora dimostrare che

$$\mathscr{F} = \{\, C \subseteq X : C = T(C) \,\}$$

è l'insieme dei chiusi per una topologia $\mathscr{T}$, rispetto alla quale si ha $T(A) = \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$, per ogni $A \subseteq X$.

Per definizione di operatore di chiusura, è ovvio che $\emptyset \in \mathscr{F}$ e che $X \in \mathscr{F}$. Inoltre è chiaro che l'unione di due elementi di $\mathscr{F}$ è ancora un elemento di $\mathscr{F}$.

Sia ora $\mathscr{X}$ un insieme non vuoto di elementi di $\mathscr{F}$ e poniamo $C = \bigcap \mathscr{X}$. Dobbiamo verificare che $C = T(C)$. Se $D \in \mathscr{X}$, abbiamo $C \subseteq D$; perciò $T(C) \subseteq T(D) = D$. Ma questo implica $T(C) \subseteq \bigcap \mathscr{X} = C$. L'inclusione opposta è sempre verificata da un operatore di chiusura.

Se ora $A \subseteq X$, sappiamo che

$$\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A) = \bigcap \{\, C \subseteq X : C \supseteq A, C = T(C) \,\}.$$

Se $C = T(C)$ e $A \subseteq C$, allora $T(A) \subseteq T(C) = C$. Dunque $T(A) \subseteq \mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A)$. Viceversa, $T(A) = T(T(A))$ è un chiuso che contiene A e dunque $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}(A) \subseteq T(A)$. □

Esercizi

3.1. Sia $X, \le$ un insieme totalmente ordinato. Allora i sottoinsiemi della forma

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{\, x \in X : a \le x \le b \,\} \\
(\leftarrow, a] &= \{\, x \in X : x \le a \,\} \\
[a, \rightarrow) &= \{\, x \in X : a \le x \,\} \\
(\leftarrow, \rightarrow) &= X
\end{aligned}$$

con $a, b \in X$, sono chiusi nella topologia dell'ordine.

3.2. Un sottoinsieme A dello spazio topologico X è *denso* se $\mathrm{Cl}(A) = X$. Dimostrare che $A \subseteq X$ è denso se e solo se, per ogni aperto U di X, $A \cap U \neq \emptyset$.

3.3. Sia $A \subseteq X$; allora A è denso nel sottospazio $\mathrm{Cl}(A)$.
3.4. Se A è denso in X, allora, per ogni aperto U di X, vale $U \subseteq \mathrm{Cl}(A \cap U)$. Mostrare un esempio di un sottoinsieme denso $A \subseteq \mathbf{R}$ e di un sottoinsieme $B \subseteq \mathbf{R}$ tali che $B \nsubseteq \mathrm{Cl}(A \cap B)$.
3.5. Sia $\mathrm{Top}_1(X)$ l'insieme delle topologie $\mathscr{T}$ su X tali che, per ogni $x \in X$, $\{x\}$ sia $\mathscr{T}$-chiuso. Mostrare che $\mathrm{Top}_1(X)$ è un sottoreticolo di $\mathrm{Top}(X)$ ed ha minimo. Provare che questo minimo è la topologia cofinita su X.

4. Spazi di Hausdorff — Convergenza

Definizione 4.1. Una topologia $\mathscr{T}$ su X si dice *di Hausdorff* se, dati $a, b \in X$, con $a \neq b$, esistono A e B aperti tali che:

$$a \in A, \quad b \in B, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Si dice, in tal caso, che *punti distinti sono separati da aperti*. □

Proposizione 4.2. *Sia X uno spazio di Hausdorff; allora, per ogni $x \in X$, l'insieme $\{x\}$ è chiuso.*

Dimostrazione. Se $y \neq x$, possiamo fissare due aperti disgiunti U e V tali che $x \in U$ e $y \in V$. Allora $V \cap \{x\} = \emptyset$ e y non è aderente a $\{x\}$. □

Esempio 4.3. La proprietà precedente può valere anche in spazi non di Hausdorff. Sia X un insieme infinito, sul quale poniamo la topologia cofinita. Allora ogni sottoinsieme finito di X è, per definizione, chiuso. □

Un insieme finito ha un'unica topologia di Hausdorff, quella discreta. Perciò le topologie interessanti sugli insiemi finiti non sono di Hausdorff.

Ogni spazio metrico è di Hausdorff: infatti, se $x \neq y$ sono punti dello spazio metrico X, allora $d(x, y) = 2r > 0$. Ne segue che

$$S_d(x, r) \cap S_d(y, r) = \emptyset.$$

La nozione di spazio di Hausdorff, come quella precedente di punto aderente, si può meglio comprendere con il concetto di intorno di un punto.

Definizione 4.4. Sia $\mathscr{T}$ una topologia su X. Se $x \in X$, diremo che un *$\mathscr{T}$-intorno* di x è un sottoinsieme di X che contiene un aperto il quale contiene x.

Indicheremo con $\mathscr{T}_x$ l'insieme dei $\mathscr{T}$-intorni di x. □

In base a questa definizione, possiamo dire che x è un punto aderente di $A \subseteq X$ se e solo se ogni intorno di x ha intersezione non vuota con A. Analogamente risulta che $\mathscr{T}$ è una topologia di Hausdorff se e solo se punti distinti di X hanno intorni disgiunti.

La dimostrazione delle proprietà espresse nella proposizione seguente è lasciata per esercizio.

Proposizione 4.5. *Sia $\mathscr{T}$ una topologia di Hausdorff su X. Allora:*

(Int-1) *per ogni* $x \in X$, $\mathscr{T}_x \neq \emptyset$;
(Int-2) *per ogni* $x \in X$ *ed ogni* $V \in \mathscr{T}_x$, $x \in V$;
(Int-3) *per ogni* $x \in X$, *se* $U \in \mathscr{T}_x$ *e* $V \supseteq U$, *allora* $V \in \mathscr{T}_x$;
(Int-4) *per ogni* $x \in X$, *se* $U \in \mathscr{T}_x$ *e* $V \in \mathscr{T}_x$, *allora* $U \cap V \in \mathscr{T}_x$;
(Int-5) *per ogni* $x \in X$ *ed ogni* $U \in \mathscr{T}_x$, *esiste* $V \in \mathscr{T}_x$ *tale che, per ogni* $y \in V$, *sia* $V \in \mathscr{T}_y$;
(Int-6) *per ogni* $x, y \in X$, *esistono* $U \in \mathscr{T}_x$ *e* $V \in \mathscr{T}_y$ *tali che* $U \cap V = \emptyset$.

Le prime cinque proprietà valgono in realtà in ogni spazio topologico; tuttavia la nozione di intorno si rivela utile soprattutto negli spazi di Hausdorff.

Vale anche il viceversa, cioè un'altra possibile definizione di topologia.

Proposizione 4.6. *Sia* X *un insieme e sia dato, per ogni* $x \in X$, *una famiglia* $\mathscr{T}_x$ *di sottoinsiemi di* X *soddisfacenti le proprietà* (Int-1–5). *Allora esiste una ed una sola topologia* $\mathscr{T}$ *su* X *tale che, per ogni* $x \in X$, $\mathscr{T}_x$ *sia l'insieme dei* $\mathscr{T}$*-intorni di* x. *La topologia* $\mathscr{T}$ *è di Hausdorff se e solo se le famiglie* $\mathscr{T}_x$ *soddisfano la proprietà* (Int-6).

Dimostrazione. Basta definire $\mathscr{T}$ come la famiglia degli $A \subseteq X$ tali che $A \in \mathscr{T}_x$, per ogni $x \in A$, e fare le opportune verifiche. □

Gli spazi di Hausdorff sono quelli in cui la nozione di convergenza è più facile, perché in essi il limite, se esiste, è unico. Naturalmente occorre definire il concetto di convergenza.

Definizione 4.7. Sia $D, \leq$ un insieme parzialmente ordinato; diremo che D è *diretto* se, dati $a, b \in D$, esiste almeno un $c \in D$ tale che $a \leq c$ e $b \leq c$. □

Notiamo che, in particolare, ogni reticolo è diretto. Ancora più in particolare, ogni insieme totalmente ordinato è diretto.

Definizione 4.8. Sia X uno spazio topologico. Una *rete* in X è un'applicazione $D \to X$, dove D è un insieme diretto. □

La nozione di rete generalizza allora quella di successione. Negli spazi topologici generali, non è possibile usare solo le successioni, per caratterizzare la convergenza, cioè la continuità. Una rete $D \to X$ si indica di solito con notazioni come $(x_d)_{d \in D}$. Se $A \subseteq X$ e $x_d \in A$, per ogni $d \in D$, diremo che abbiamo una rete in A.

Un esempio molto utile di insieme diretto si ottiene prendendo un insieme Λ e l'insieme $\Phi(\Lambda)$ delle *parti finite* di Λ, cioè dei sottoinsiemi finiti. L'ordinamento è per inclusione.

Definizione 4.9. Sia $(x_d)_{d \in D}$ una rete nello spazio topologico X e sia $x \in X$. Diciamo che la rete *converge* a x se, per ogni intorno U di x, esiste $\bar{d} \in D$ tale che

$$x_d \in U, \textit{per ogni } d \in D \text{ tale che } \bar{d} \leq d.$$

Un modo rapido di esprimere questo concetto è di dire che *la rete è definitivamente in ogni intorno di* x. □

Vediamo subito che la nozione di convergenza caratterizza i punti aderenti di un insieme. Per fare questo, notiamo che, data la topologia $\mathscr{T}$ su X e dato $x \in X$, l'insieme $\mathscr{T}_x$ degli intorni di x è parzialmente ordinato da $\supseteq$ ed è diretto, per la proprietà (Int-4).

Teorema 4.10. *Sia $\mathscr{T}$ una topologia su X e siano $A \subseteq X$ e $x \in X$; allora x è aderente ad A se e solo se esiste una rete in A che converge a x.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Per ogni intorno U di x possiamo scegliere $x_U \in U \cap A$. Allora la rete $(x_U)_{U\in\mathscr{T}_x}$ converge a x. Infatti, fissiamo $V \in \mathscr{T}_x$ e prendiamo $U \in \mathscr{T}_x$ tale che $V \supseteq U$ (cioè prendiamo U "più grande di V" nell'ordinamento fissato su $\mathscr{T}_x$). Poiché $x_U \in U \cap A \subseteq V \cap A$, abbiamo che la rete è definitivamente in V.

($\Leftarrow$) Sia $(x_d)_{d\in D}$ una rete in A convergente a x. Se fissiamo un intorno U di x, troviamo certamente $d \in D$ tale che $x_d \in U$, per definizione di convergenza. Ma $x_d \in A$ per ipotesi, cosicché $x_d \in U \cap A$. □

Nelle questioni di convergenza gli spazi di Hausdorff si comportano bene. Non è detto che una rete converga (ad esempio la successione dei naturali in $\mathbf{R}$); in uno spazio di Hausdorff, se una rete ha un limite, questo è unico.

Teorema 4.11. *Sia $(x_d)_{d\in D}$ una rete nello spazio di Hausdorff X. Se la rete converge a x e ad x', allora $x = x'$.*

Dimostrazione. Se $x \neq x'$, esistono un intorno U di x ed un intorno U' di x' tali che $U \cap U' = \emptyset$. Per ipotesi, la rete data è definitivamente in U e anche in U': questo è assurdo. □

C'è una piccola imprecisione nel ragionamento precedente: trovarla.

In certi casi, al posto delle reti si possono considerare successioni: questo accade negli spazi metrici. Ovviamente una successione è una rete con dominio $\mathbf{N}$, ordinato nel modo usuale.

Teorema 4.12. *Sia X uno spazio metrico e sia $A \subseteq X$. Dato $x \in X$, allora x è aderente ad A se e solo se esiste una successione in A convergente a x.*

Dimostrazione. Una direzione è ovvia per il teorema 4.10. Supponiamo x aderente ad A. Allora, per ogni $n \in \mathbf{N}$, possiamo scegliere $x_n \in S(x, 1/n) \cap A$. È facile vedere che la successione (x_n) converge a x. □

Esempio 4.13. Uno spazio in cui le successioni non bastano a caratterizzare la convergenza può essere definito così: sia κ un ordinale non numerabile. Consideriamo su κ la topologia dell'ordine e prendiamo in κ il primo ordinale non numerabile, ω_1. Sia Ω_1 l'insieme degli ordinali numerabili; è chiaro dalla teoria degli ordinali, che $\Omega_1 \subseteq \kappa$ e che ω_1 è aderente a Ω_1. Sia (x_n) una successione in Ω_1; allora gli x_n sono ordinali numerabili e perciò $\bigcup_n x_n$ è un ordinale numerabile.

È sufficiente allora far vedere che, se la successione x_n converge a $x \in \kappa$, allora $x \leq \bigcup_n x_n$. Esercizio. □

Esercizi

4.1. Trovare uno spazio topologico in cui ogni insieme $\{x\}$ sia chiuso, ma che non sia di Hausdorff.

4.2. Sia data una rete $\rho = (x_d)_{d \in D}$ nello spazio topologico X. Un punto $x \in X$ si dice *aderente* alla rete data se la rete ρ è *frequentemente in ogni intorno di* x, cioè se, per ogni intorno U di x ed ogni $d \in D$, esiste $d' \geq d$ tale che $x_{d'} \in U$. Una rete $\sigma = (y_e)_{e \in E}$ si dice una *sottorete* della rete data se esiste un'applicazione $\alpha \colon E \to D$ tale che:

(1) per ogni $e \in E$, $y_e = x_{\alpha(e)}$;
(2) per ogni $d \in D$, esiste $e \in E$ tale che, per ogni $e' \geq e$, $\alpha(e') \geq d$.

Dimostrare che x è aderente alla rete ρ se e solo se esiste una sottorete σ di ρ convergente a x. Nota: la sottorete σ si dice una *sottosuccessione* se $E = \mathbf{N}$ è l'insieme dei naturali. Può accadere che un punto sia aderente ad una successione senza che alcuna sottosuccessione converga ad esso.

4.3. Siano $\rho = (x_d)_{d \in D}$ una rete in X e $\sigma = (y_e)_{e \in E}$ una sua sottorete; se ρ converge a x, allora anche σ converge a x.

5. Continuità

Sappiamo già che cosa significa che una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ sia continua in un punto x dell'intervallo (a,b). Sappiamo anche che questo vuol dire la cosa seguente:

> Se (x_n) è una successione in (a,b) convergente a x, allora la successione $(f(x_n))$ converge a $f(x)$.

Negli spazi topologici generali, non è possibile dare una definizione analoga, perché sappiamo che le successioni non bastano a caratterizzare la convergenza.

Possiamo essere portati allora a dare la definizione seguente.

> Siano X e Y spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione. Dato $x \in X$, diciamo che f è *continua in x* se, per ogni insieme diretto D ed ogni rete $(x_d)_{d\in D}$ in X convergente a x, la rete $(f(x_d))_{d\in D}$ converge a $f(x)$.

Non seguiremo questa via: con essa è abbastanza facile dare esempi di applicazioni non continue. Più difficile è dimostrare, usando questa definizione, la continuità di una funzione. La difficoltà sta principalmente nel fatto che dovremmo considerare tutti i possibili insiemi diretti e tutte le possibili reti. Naturalmente c'è una via migliore, che consiste nel caratterizzare la continuità per mezzo degli intorni o degli aperti.

Definizione 5.1. Siano X e Y spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione. Dato $x \in X$, diciamo che f è *continua in x* se, per ogni intorno V di $f(x)$, $f^{\leftarrow}(V)$ è un intorno di x.

Un altro modo di dire la stessa cosa è: per ogni intorno V di $f(x)$, esiste un intorno U di x tale che $f^{\rightarrow}(U) \subseteq V$. □

Occorre far vedere che la continuità tramite le reti è equivalente alla continuità definita con gli intorni.

Teorema 5.2. *Siano X e Y spazi topologici, sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione e sia $x \in X$. L'applicazione f è continua in x se e solo se, per ogni insieme diretto D ed ogni rete $(x_d)_{d\in D}$ in X convergente a x, la rete $(f(x_d))_{d\in D}$ converge a $f(x)$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia $(x_d)_{d\in D}$ una rete in X convergente a x. Consideriamo un intorno di V di $f(x)$. Allora $f^{\leftarrow}(V)$ è un intorno di x e quindi la rete è definitivamente in $f^{\leftarrow}(V)$. Questo implica, ovviamente, che la rete $(f(x_d))_{d\in D}$ è definitivamente in V.

($\Leftarrow$) Dire che f non è continua in x significa dire che esiste un intorno V di $f(x)$ tale che $f^{\leftarrow}(V)$ non è un intorno di x, quindi che, per ogni intorno U di x, $f^{\rightarrow}(U) \nsubseteq V$. Dunque, per ogni intorno U di x esiste $x_U \in U$ tale che $f(x_U) \notin V$.

Abbiamo allora la rete $(x_U)_{U\in\mathscr{T}_x}$ che converge a x, ma la rete $(f(x_U))_{U\in\mathscr{T}_x}$ non converge a $f(x)$. □

La nozione di continuità in un punto non è sufficiente per i nostri scopi.

Esempio 5.3. Sia $x \in X$. Diciamo che x è un *punto isolato* se $\{x\}$ è un intorno di x. Se $f\colon X \to Y$ è un'applicazione e x è un punto isolato di X, allora f è continua in x. □

Diamo allora la nozione di continuità "globale". La semplicità di questa definizione dovrebbe far capire come il concetto di topologia riesca a catturare i fatti fondamentali che, intuitivamente, associamo alla continuità.

Definizione 5.4. Siano X e Y spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione. Diciamo che f è *continua* se, per ogni aperto V di Y, $f^{\leftarrow}(V)$ è aperto in X. □

Teorema 5.5. *Siano X e Y spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione. Allora f è continua se e solo se f è continua in ogni punto di x.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia $x \in X$ e sia V un intorno di $f(x)$; allora $V \supseteq W$, dove W è un aperto di Y e $f(x) \in W$. Dunque $f^{\leftarrow}(W)$ è aperto in X e, chiaramente, $x \in f^{\leftarrow}(W)$, cioè $U = f^{\leftarrow}(W)$ è un intorno di x. Ora è chiaro che $f^{\rightarrow}(U) \subseteq V$.

($\Leftarrow$) Sia V un aperto di Y; allora V è un intorno di ogni suo punto, in particolare è intorno di $f(x)$, ogni volta che $f(x) \in V$. Ma allora $f^{\leftarrow}(V)$ è intorno di x, per ogni x tale che $f(x) \in V$, cioè $f^{\leftarrow}(V)$ è intorno di ogni suo punto, quindi è aperto. □

Può talvolta essere comodo eseguire meno verifiche.

Proposizione 5.6. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione, con X e Y spazi topologici. Supponiamo che $\mathscr{B}$ sia una base per la topologia su Y. Allora f è continua se e solo se, per ogni $V \in \mathscr{B}$, $f^{\leftarrow}(V)$ è aperto in X.*

Dimostrazione. Se f è continua, l'asserto è chiaro, perché ogni elemento di $\mathscr{B}$ è aperto.

Viceversa, sappiamo che ogni aperto in Y è unione di elementi di $\mathscr{B}$; sappiamo anche che $f^{\leftarrow}$ commuta con le unioni. □

Possiamo certamente dare la condizione di continuità usando i chiusi.

Proposizione 5.7. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione, con X e Y spazi topologici. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) *f è continua;*
(b) *per ogni chiuso C in Y, $f^{\leftarrow}(C)$ è chiuso in X;*
(c) *per ogni $A \subseteq X$, $f^{\rightarrow}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Cl}(f^{\rightarrow}(A))$;*
(d) *per ogni $B \subseteq Y$, $\mathrm{Cl}(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq f^{\leftarrow}(\mathrm{Cl}(B))$.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Usiamo subito la nozione di continuità per dimostrare alcuni fatti fondamentali.

Teorema 5.8. *Siano X, Y e Z spazi topologici e siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ applicazioni continue. Allora $g \circ f\colon X \to Z$ è continua.*

Dimostrazione. Se W è un aperto in Z, abbiamo che $V = g^{\leftarrow}(W)$ è aperto in Y. Ma allora $U = f^{\leftarrow}(V)$ è aperto in X. È facile verificare che $U = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(W)) = (g \circ f)^{\leftarrow}(W)$. □

Proposizione 5.9. *Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. La topologia relativa su A è la minima topologia su A tale che l'applicazione di inclusione $i\colon A \to X$ sia continua.*

Dimostrazione. Se U è un aperto di X, allora $i^{\leftarrow}(U) = U \cap A$ è aperto nella topologia relativa. Se $\mathscr{A}$ è una topologia su A tale che i sia continua, dobbiamo avere che $U \cap A \in \mathscr{A}$. □

Usiamo quest'idea per definire nuovi spazi topologici.

Sia $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di spazi topologici, sia X un insieme e siano $f_\lambda\colon X \to Y_\lambda$ applicazioni. Vogliamo risolvere il problema di trovare una topologia su X in modo che tutte le applicazioni f_λ siano continue.

Posto così, il problema ammette una soluzione banale: la topologia discreta. Perciò cercheremo la topologia più "economica" possibile, cioè quella minima.

Se $\mathscr{T}$ è una topologia che risolve il problema, abbiamo certamente che, per ogni scelta di un λ e di un aperto V_λ in Y_λ, l'insieme $f_\lambda^{\leftarrow}(V_\lambda)$ deve essere aperto in X, cioè appartenere a $\mathscr{T}$.

Consideriamo la famiglia $\mathscr{B}$ così costruita. Un sottoinsieme A di X appartiene a $\mathscr{B}$ se e solo se esistono

(1) un sottoinsieme finito F di Λ;
(2) per ogni $\lambda \in F$ un aperto V_λ in Y_λ tali che

$$A = \bigcap\{\, f_\lambda^{\leftarrow}(V_\lambda) : \lambda \in F \,\}.$$

Poiché intersezioni finite di aperti sono aperte, questi sottoinsiemi devono appartenere a $\mathscr{T}$. Facciamo vedere che $\mathscr{B}$ è una base per una topologia. Questa topologia, allora, risolve il problema.

La proprietà (Base-1) è evidente. Verifichiamo la (Base-2): siano

$$A' = \bigcap\{\, f_\lambda^{\leftarrow}(V'_\lambda) : \lambda \in F' \,\} \qquad \text{e} \qquad A'' = \bigcap\{\, f_\lambda^{\leftarrow}(V''_\lambda) : \lambda \in F'' \,\}$$

elementi di $\mathscr{B}$. Poniamo $F = F' \cup F''$. Se $\lambda \in F \setminus F'$, poniamo $V'_\lambda = Y_\lambda$; analogamente, se $\lambda \in F \setminus F''$, poniamo $V''_\lambda = Y_\lambda$. Certamente allora

$$A' \cap A'' = \bigcap\{\, f_\lambda^{\leftarrow}(V'_\lambda \cap V''_\lambda) : \lambda \in F \,\}$$

è addirittura in $\mathscr{B}$.

La topologia costruita su X si chiama la *topologia debole* della famiglia $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Proposizione 5.10. *Sia X dotato della topologia debole della famiglia*

$$(f_\lambda\colon X \to Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

e sia Z uno spazio topologico. Un'applicazione $g\colon Z \to X$ è continua se e solo se, per ogni λ, la composizione $f_\lambda \circ g$ è continua.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Banale: la composizione di applicazioni continue è continua.

($\Leftarrow$) Basta dimostrare che, nelle notazioni precedenti, l'immagine inversa tramite g di ogni elemento di $\mathscr{B}$ è aperta (proposizione 5.6). Ora

$$g^{\leftarrow}(A) = g^{\leftarrow}\Bigl(\bigcap\{\, f_\lambda^{\leftarrow}(V_\lambda) : \lambda \in F \,\}\Bigr) = \bigcap\{\, (f_\lambda \circ g)^{\leftarrow}(V_\lambda) : \lambda \in F \,\}$$

è aperto in Z. □

Un caso particolare di topologia debole è quella sui prodotti.

Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di insiemi. Il *prodotto* di questa famiglia si costruisce nel modo seguente:

(1) si ponga $\bar{X} = \bigcup\{\, X_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\}$;
(2) si consideri l'insieme P delle applicazioni $\alpha\colon \Lambda \to \bar{X}$ tali che, per ogni $\lambda \in \Lambda$, $\alpha(\lambda) \in X_\lambda$.

L'insieme P così definito si chiama *prodotto* della famiglia data e si denota con

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda.$$

Esiste, per ogni $\mu \in \Lambda$, una importante applicazione $P \to X_\mu$, detta *proiezione*:

$$p_\mu\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\mu, \qquad \alpha \mapsto \alpha(\mu)$$

Se gli insiemi X_λ sono spazi topologici, doteremo il prodotto della topologia debole delle proiezioni, che chiameremo *topologia prodotto*. Nel caso in cui tutti gli insiemi X_λ sono uguali ad uno stesso insieme X, il prodotto si denota con X^Λ, e coincide con l'insieme delle applicazioni di Λ in X.

Proposizione 5.11. *Sia $f\colon Y \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ un'applicazione, con Y e gli X_λ spazi topologici. Allora f è continua se e solo se, per ogni λ, $p_\lambda \circ f$ è continua.* □

Esempio 5.12. Un caso particolare, ma molto istruttivo, di prodotto è quello in cui $\Lambda = \{1, 2\}$. In questo caso, il prodotto si indica con $X_1 \times X_2$ e può essere identificato con l'insieme delle coppie ordinate: infatti un'applicazione $\alpha\colon \{1, 2\} \to \bar{X}$ è determinata dicendo qual è l'immagine di 1 e quella di 2. Poiché consideriamo solo le applicazioni α tali che $\alpha(1) \in X_1$ e $\alpha(2) \in X_2$, possiamo far corrispondere ad α la coppia $(\alpha(1), \alpha(2))$. Viceversa ad ogni coppia (x_1, x_2) corrisponde un unico elemento del prodotto.

Una base per la topologia prodotto su $X_1 \times X_2$ è data dai sottoinsiemi $U_1 \times U_2$, con U_1 e U_2 aperti rispettivamente in X_1 e X_2 (verificare).

Se $X_1 = X_2 = \mathbf{R}$, allora la topologia prodotto su $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ coincide con la topologia della metrica euclidea (esercizio). Analogo risultato vale per i prodotti di n copie di $\mathbf{R}$. □

Definizione 5.13. Un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ si dice un *omeomorfismo* se è biiettiva e $f^{-1}\colon Y \to X$ è continua. Due spazi topologici X e Y si dicono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo $f\colon X \to Y$. □

È chiaro che la relazione "essere omeomorfi" è una relazione di equivalenza, perché l'identità su X è un omeomorfismo, l'inversa di un omeomorfismo è un omeomorfismo e la composizione di due omeomorfismi è un omeomorfismo.

Due spazi omeomorfi "hanno le stesse proprietà topologiche". Ad esempio, si può dimostrare che $\mathbf{R}$ e l'intervallo $[0,1]$ (con la topologia relativa) non sono omeomorfi, osservando che, per ogni $x \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R} \setminus \{x\}$ è unione di due aperti non vuoti e disgiunti. Questo non accade in $[0,1]$.

Come osserva Kelley, un topologo non distingue fra una ciambella col buco ed una tazzina da caffè.

Esercizi

5.1. Siano $f, g\colon X \to Y$ applicazioni continue e supponiamo che Y sia di Hausdorff. Allora l'insieme $\{\, x \in X : f(x) = g(x) \,\}$ è chiuso in X. Di conseguenza, se $f(x) = g(x)$, per ogni $x \in A$, dove A è denso in X, allora $f = g$.

5.2. Siano $f, g\colon X \to \mathbf{R}$ applicazioni continue e sia $r \in \mathbf{R}$.

(1) L'applicazione $rf\colon X \to \mathbf{R}$ definita da $x \mapsto rf(x)$ è continua.
(2) L'applicazione $|f|\colon X \to \mathbf{R}$ definita da $x \mapsto |f(x)|$ è continua.
(3) Se poniamo $h(x) = (f(x), g(x))$, allora $h\colon X \to \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ è continua (su $\mathbf{R}^2$ poniamo la topologia della metrica euclidea).
(4) Le applicazioni $f + g\colon x \mapsto f(x) + g(x)$, $f - g\colon x \mapsto f(x) - g(x)$, $fg\colon x \mapsto f(x)g(x)$ e, se g non assume mai il valore 0, $f/g\colon x \mapsto f(x)/g(x)$ sono continue. (Dimostrare prima che l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione, come applicazioni $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono continue.)
(5) Le applicazioni $\max\{f, g\}\colon x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ e $\min\{f, g\}\colon x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ sono continue. (Dimostrare che, per $a, b \in \mathbf{R}$, $\max\{a, b\} = (a + b + |a - b|)/2$ e $\min\{a, b\} = (a + b - |a - b|)/2$ e applicare i risultati precedenti.)

5.3. Dimostrare che un prodotto di spazi di Hausdorff è uno spazio di Hausdorff.

5.4. Sia data un'applicazione $f\colon X \times Y \to Z$. Diciamo che f è *separatamente continua* se, per ogni $x \in X$, l'applicazione $f(x, -)\colon y \mapsto f(x, y)$ è continua e, per ogni $y \in Y$, l'applicazione $f(-, y)\colon x \mapsto f(x, y)$ è continua. Se f è continua, allora è separatamente continua. Il viceversa è falso: si dimostri che l'applicazione $f\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definita da $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, se $(x, y) \neq (0, 0)$, e $f(0, 0) = 0$ è separatamente continua, ma non continua.

6. Spazi connessi

Uno spazio topologico è connesso se "è fatto di un solo pezzo": l'idea è che ogni "pezzo" di uno spazio topologico è un chiuso.

Definizione 6.1. Uno spazio topologico X è *sconnesso* se esistono due chiusi A e B tali che:

$$(1)\ A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset; \qquad (2)\ A \cap B = \emptyset; \qquad (3)\ A \cup B = X.$$

In tal caso A e B formano una *sconnessione* di X. Uno spazio che non è sconnesso si dice *connesso*. Un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice sconnesso o connesso se tale è nella topologia relativa. □

Poiché il complementare di un chiuso è aperto, nella definizione precedente si può sostituire "chiusi" con "aperti".

Abbiamo già visto esempi di spazi sconnessi: uno spazio discreto (con più di un punto) è sconnesso; se $x \in \mathbf{R}$, allora $\mathbf{R} \setminus \{x\}$ è sconnesso.

Proposizione 6.2. *Sia A un sottoinsieme dello spazio topologico X. Allora A è sconnesso se e solo se esistono F e G chiusi in X tali che $F \cup G \supseteq A$, $F \cap A \neq \emptyset$, $G \cap A \neq \emptyset$ e $F \cap G \cap A = \emptyset$.* □

Spesso la dimostrazione che uno spazio X è connesso procede nel modo seguente: si suppone che $X = A \cup B$, con A e B aperti (oppure chiusi) disgiunti e A non vuoto, e si prova che B è allora vuoto.

Proposizione 6.3. *Sia $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi dello spazio topologico X; se $\bigcap\{\, C_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\} \neq \emptyset$, allora $\bigcup\{\, C_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\}$ è connesso.*

Dimostrazione. Poniamo $C = \bigcup\{\, C_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\}$ e supponiamo $C = A \cup B$, con A e B chiusi disgiunti in C (nella topologia relativa). Se $x \in \bigcap\{\, C_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\}$, allora $x \in A$ oppure $x \in B$. Non è restrittivo supporre $x \in A$.

Abbiamo quindi, per ogni $\lambda \in \Lambda$,

$$C_\lambda = (A \cap C_\lambda) \cup (B \cap C_\lambda)$$

e, per ipotesi, $A \cap C_\lambda \neq \emptyset$. Poiché C_λ è connesso, dobbiamo avere $B \cap C_\lambda = \emptyset$ e quindi $B = \bigcup\{\, B \cap C_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\} = \emptyset$. □

Proposizione 6.4. *Sia C un sottoinsieme connesso di X; allora* $\mathrm{Cl}(C)$ *è connessa.*

Dimostrazione. Sia $\mathrm{Cl}(C) = A \cup B$, con A e B chiusi disgiunti in $\mathrm{Cl}(C)$; allora $A \cap C$ e $B \cap C$ sono chiusi disgiunti di C. Ne segue che $A \cap C = \emptyset$ oppure $B \cap C = \emptyset$. Supponiamo vera la seconda alternativa. Allora $A \supseteq C$ e, essendo A un chiuso di $\mathrm{Cl}(C)$, $A = \mathrm{Cl}(C)$ (stiamo usando il fatto che la chiusura di A in $\mathrm{Cl}(A)$ è $\mathrm{Cl}(A)$). Quindi $B = \emptyset$. □

Corollario 6.5. *Dato un punto x nello spazio topologico X, esiste un sottoinsieme $C_x \subseteq X$ tale che*
(1) *C_x è connesso e $x \in C_x$;*
(2) *se $C \subseteq X$ è connesso e $x \in C$, allora $C \subseteq C_x$.*
Inoltre C_x è chiuso in X.

Dimostrazione. Si tratta di mettere assieme le due proposizioni precedenti. Definiamo C_x come l'unione di tutti i sottoinsiemi connessi di X contenenti x. Allora C_x è connesso per 6.3 e la seconda affermazione è ovvia.

Inoltre la chiusura di C_x è, per 6.4, un connesso contenente x, quindi coincide con C_x. □

L'insieme C_x è chiamato la *componente connessa* di X contenente x. Componenti connesse distinte sono disgiunte (esercizio), quindi le componenti connesse formano una partizione di X.

Uno spazio topologico X è *totalmente sconnesso* se, per ogni $x \in X$, la componente connessa di X contenente x è $\{x\}$.

Esempio 6.6. Lo spazio $\mathbf{Q}$ dei razionali è totalmente sconnesso. Infatti, se $C \subseteq \mathbf{Q}$ ha più di un punto, diciamo $x, y \in C$, con $x < y$, esiste un *irrazionale* α tale che $x < \alpha < y$. Allora $(\leftarrow, \alpha] \cap C$ e $[\alpha, \rightarrow) \cap C$ formano una sconnessione di C. □

Cerchiamo di scoprire quali sono i sottoinsiemi connessi di $\mathbf{R}$. Un *intervallo* in $\mathbf{R}$ è un sottoinsieme I di $\mathbf{R}$ avente la proprietà:

$$\text{se } x, y \in I \text{ e } x < y, \text{ allora } [x, y] \subseteq I,$$

dove $[x, y] = \{\, r \in \mathbf{R} : x \le r \le y \,\}$. La stessa definizione può essere data in un qualunque insieme ordinato.

Proposizione 6.7. *Sia $C \subseteq \mathbf{R}$; allora C è connesso se e solo se C è un intervallo.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Siano $x, y \in C$, con $x < y$. Se $[x, y]$ non è contenuto in C, esiste $r \in [x, y]$ tale che $r \notin C$. Questo r non può essere né x né y. Allora $(\leftarrow, r] \cap C$ e $[r, \rightarrow) \cap C$ formano una sconnessione di C.

($\Leftarrow$) Sia, per assurdo, A, B una sconnessione di C, dove C è un intervallo. Prendiamo $x \in A$ e $y \in B$; non è restrittivo supporre $x < y$. Poniamo

$$z = \sup([x, y] \cap A);$$

poiché A è chiuso, $z \in A$ (esercizio) e quindi $[x, z] \subseteq A$. Sia $z' > z$; allora non può essere $z' \in A$, per come è stato definito z. Quindi $z' \in B$. Perciò abbiamo due casi: (1) $z = y$ oppure (2) $z < y$.

Nel primo caso abbiamo che $y \in A \cap B$: assurdo.

Nel secondo caso, z è aderente a $(z, y]$; ma $(z, y] \subseteq B$, e quindi $z \in \mathrm{Cl}(B) = B$, che è chiuso. Dunque $z \in A \cap B$: assurdo. □

Il teorema fondamentale sugli spazi connessi è che l'immagine continua di un connesso è connessa. Enunciamo più precisamente.

Teorema 6.8. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici. Se X è connesso, allora l'immagine $f^{\to}(X)$ è un sottoinsieme connesso di Y.*

Dimostrazione. Poniamo $T = f^{\to}(X)$. Supponiamo che F e G siano chiusi in Y tali che

$$(1)\ F \cup G \supseteq T, \qquad (2)\ F \cap T \neq \emptyset, \qquad (3)\ G \cap T \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad (4)\ F \cap G \cap T = \emptyset.$$

Se poniamo $F' = f^{\leftarrow}(F)$ e $G' = f^{\leftarrow}(G)$, abbiamo che F' e G' formano una sconnessione di X. Infatti entrambi sono chiusi e non vuoti; sia, per assurdo,

$$x \in F' \cap G' = f^{\leftarrow}(F) \cap f^{\leftarrow}(G) = f^{\leftarrow}(F \cap G).$$

Allora $f(x) \in F \cap G$, quindi $f(x) \in F \cap G \cap T$: contraddizione. Perciò $F' \cap G' = \emptyset$ e X non può essere connesso. □

Un importante corollario è il ben noto *teorema degli zeri*.

Corollario 6.9. *Sia I un intervallo di $\mathbf{R}$ e sia $f\colon I \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Se esistono $a, b \in I$ tali che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, allora esiste $c \in I$ tale che $f(c) = 0$.*

Dimostrazione. L'intervallo I è connesso; perciò $f^{\to}(I)$ è connesso, quindi un intervallo. Allora $[f(a), f(b)] \subseteq f^{\to}(I)$ e ne segue che $0 \in f^{\to}(I)$. □

Esercizi

6.1. Classificare gli intervalli di $\mathbf{R}$ in classi di equivalenza rispetto all'omeomorfismo.

6.2. Un *arco* in uno spazio topologico X è un'applicazione continua $[0, 1] \to X$. Due punti $x, y \in X$ sono *arco-connessi* se esiste un arco α in X tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. Dimostrare che la relazione $x \sim y$, valida se e solo se x e y sono arco-connessi, è una relazione di equivalenza. (Le proprietà riflessiva e simmetrica sono facili da verificare. Per la proprietà transitiva, definire la *giustapposizione di due archi* α e β tali che $\alpha(1) = \beta(0)$ come l'applicazione $\gamma\colon [0, 1] \to X$ tale che $\gamma(r) = \alpha(2r)$ se $0 \le r \le 1/2$ e $\gamma(r) = \beta(2r - 1)$ se $1/2 \le r \le 1$; allora γ è continua.)

6.3. Uno spazio topologico X si dice *connesso per archi* se due punti qualunque di X sono arco-connessi. Dimostrare che ogni spazio connesso per archi è connesso.

6.4. Dimostrare che un aperto di $\mathbf{R}^n$ è connesso se e solo se è connesso per archi. (Verificare che ogni sfera di $\mathbf{R}^n$ è connessa per archi.)

7. Spazi compatti

Uno dei teoremi più importanti dell'Analisi è quello di Bolzano-Weierstrass: *ogni successione in un intervallo chiuso e limitato di* **R** *ha una sottosuccessione convergente*. Da questo è facile ricavare l'importante conseguenza che ogni funzione reale continua su un intervallo ammette massimo e minimo. È anche facile vedere che, fra gli intervalli limitati di **R**, solo quelli chiusi hanno questa proprietà.

Negli spazi topologici generali, sappiamo che il concetto di successione non è sufficiente. Piuttosto di seguire la via di parlare di reti, diamo una definizione più generale usando gli aperti.

Una famiglia $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di sottoinsiemi di X si dice un *ricoprimento* se $\bigcup\{\, A_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\} = X$. Se X è uno spazio topologico e gli A_λ sono aperti, parleremo di *ricoprimento aperto* di X. Un *sottoricoprimento finito* del ricoprimento dato è un ricoprimento $(A_\lambda)_{\lambda\in F}$, dove F è un sottoinsieme finito di Λ.

Definizione 7.1. Uno spazio topologico X si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di X ha un sottoricoprimento finito. Un sottoinsieme A di X si dice *compatto* se è compatto nella topologia relativa. □

Proposizione 7.2. *Un sottoinsieme A dello spazio topologico X è compatto se e solo se, per ogni famiglia $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di aperti di X tale che $A \subseteq \bigcup\{\, V_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\}$, esiste un sottoinsieme finito F di Λ tale che $A \subseteq \bigcup\{\, V_\lambda : \lambda \in F \,\}$.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Una famiglia di aperti come nella proposizione precedente si chiama *ricoprimento aperto di A in X*. Perciò A è compatto se e solo se ogni ricoprimento aperto di A in X ha un sottoricoprimento di A in X che sia finito.

Possiamo caratterizzare la compattezza anche con i chiusi. Diremo che una famiglia $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di sottoinsiemi di X ha la *proprietà dell'intersezione finita* (in breve PIF) se, per ogni sottoinsieme finito F di Λ,

$$\bigcap\{\, A_\lambda : \lambda \in F \,\} \neq \emptyset.$$

Teorema 7.3. *Sia X uno spazio topologico. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) *X è compatto;*
(b) *se $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia di chiusi di X con intersezione vuota, allora esiste un sottoinsieme finito F di Λ tale che $\bigcap\{\, C_\lambda : \lambda \in F \,\} = \emptyset$;*
(c) *se $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia con la* PIF *di sottoinsiemi di X, allora $\bigcap\{\, \mathrm{Cl}(B_\lambda) : \lambda \in F \,\} \neq \emptyset$;*
(d) *ogni famiglia di chiusi in X con la* PIF *ha intersezione non vuota.*

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Poniamo $V_\lambda = X \setminus C_\lambda$. Allora le formule di De Morgan dicono che

$$\bigcup\{\, V_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\} = X \setminus \Bigl(\bigcap\{\, C_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\}\Bigr) = X$$

e quindi una famiglia di chiusi con intersezione vuota corrisponde esattamente ad un ricoprimento aperto di X. Prendendo un sottoricoprimento finito, otteniamo la tesi con un'altra applicazione delle formule di De Morgan.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Banale: se vale (b), una famiglia di chiusi con intersezione vuota non può avere la PIF.

(c) $\Longrightarrow$ (d) Ovvio.

(d) $\Longrightarrow$ (a) Esercizio (si usano ancora le formule di De Morgan). □

Un'utile caratterizzazione della compattezza si ottiene limitando i ricoprimenti da considerare. Sia $\mathscr{B}$ una base della topologia su X; un *$\mathscr{B}$-ricoprimento* di X è un ricoprimento di X formato da elementi di $\mathscr{B}$. Analogamente, possiamo parlare di $\mathscr{B}$-ricoprimenti in X di un sottoinsieme A.

Teorema 7.4. *Sia $\mathscr{B}$ una base della topologia su X e sia $A \subseteq X$. Allora A è compatto se e solo se ogni $\mathscr{B}$-ricoprimento in X di A ammette un sottoricoprimento finito.*

Dimostrazione. Una direzione è banale. Viceversa, sia dato il ricoprimento aperto (V_λ) in X di A. Ogni V_λ è allora unione di elementi di $\mathscr{B}$; in questo modo, otteniamo un $\mathscr{B}$-ricoprimento in X di A, che ammette un sottoricoprimento finito. Perciò anche il ricoprimento dato ammette un sottoricoprimento finito. □

Teorema 7.5. *Sia A un sottoinsieme dello spazio topologico X;*
(1) *se X è compatto e A è chiuso, allora A è compatto;*
(2) *se X è di Hausdorff e A è compatto, allora A è chiuso.*

Dimostrazione. (1) Sia (V_λ) un ricoprimento aperto di A in X. Allora possiamo estendere la famiglia con l'aperto $X \setminus A$, ottenendo un ricoprimento aperto di X. Possiamo allora estrarre un sottoricoprimento finito di X:

$$X = (X \setminus A) \cup \Bigl(\bigcup\{\, V_\lambda : \lambda \in F \,\}\Bigr).$$

La tesi segue immediatamente.

(2) Sia $x \notin A$; per ogni $a \in A$, consideriamo un intorno aperto V_a di a ed un intorno aperto U_a di x tali che $U_a \cap V_a = \emptyset$. Allora, per la compattezza di A, esistono $a_1, \dots, a_n \in A$ tali che $A \subseteq V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_n}$. Inoltre $U = U_{a_1} \cap \dots \cap U_{a_n}$ è un intorno di x. Chiaramente $U \cap A = \emptyset$, quindi x non è aderente ad A. □

Caratterizziamo subito i sottoinsiemi compatti di $\mathbf{R}$.

Proposizione 7.6. *Sia $A \subseteq \mathbf{R}$; le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(a) *A è compatto;*
(b) *A è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. (a) $\implies$ (b) A è chiuso perché $\mathbf{R}$ è di Hausdorff. Gli intervalli aperti $(x-1, x+1)$, al variare di x in A formano un ricoprimento aperto in $\mathbf{R}$ di A; quindi A è contenuto in un'unione finita di intervalli aperto di ampiezza 2 e perciò è limitato.

(b) $\implies$ (a) Esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a < b$ e $A \subseteq [a, b]$. Per il teorema precedente, è sufficiente far vedere che $[a, b]$, che è chiuso in $\mathbf{R}$, è compatto. Per il teorema 7.4, è sufficiente mostrare che ogni ricoprimento di $[a, b]$ formato da intervalli aperti ammette un sottoricoprimento finito.

Fissiamo un ricoprimento aperto $\mathscr{R}$ in $\mathbf{R}$ di $[a, b]$ e consideriamo l'insieme A formato dagli elementi $x \in [a, b]$ tali che $[a, x]$ ammette un sottoricoprimento finito estratto da $\mathscr{R}$. L'insieme A non è vuoto, perché $a \in A$. Sia $c = \sup A$: esiste V_0 in $\mathscr{R}$ tale che $c \in V_0$. Poiché V_0 è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq V_0$. Per le proprietà dell'estremo superiore, esiste $d \in A$ tale che $c - \varepsilon \le d \le c$. Perciò esistono $V_1, \dots, V_n$ in $\mathscr{R}$ tali che $[a, d] \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n$. Ne segue che $[a, c + \varepsilon) \subseteq V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_n$. In particolare $c \in A$.

Se fosse $c < b$, potremmo scegliere $0 < \varepsilon < b - c$; ma allora $[c, c+\varepsilon) \subseteq A$: contraddizione. □

Dopo che avremo dimostrato il teorema sui prodotti di spazi compatti, potremo estendere questo risultato agli spazi $\mathbf{R}^n$, ottenendo il classico teorema di Heine-Borel.

Negli spazi in cui le successioni sono sufficienti a descrivere la topologia, ad esempio gli spazi metrici, esistono compatti molto importanti.

Esempio 7.7. Sia (x_n) una successione in X convergente a x; allora $A = \{ x_n : n \in \mathbf{N} \} \cup \{x\}$ è compatto.

Infatti, se (V_λ) è un ricoprimento aperto in X di A, esiste $\bar{\lambda}$ tale che $x \in V_{\bar{\lambda}}$. Poiché la successione converge a x, l'insieme $\{n \in \mathbf{N} : x_n \notin V_{\bar{\lambda}} \}$ è finito. □

Prima di enunciare il teorema di Tychonov sul prodotto di spazi compatti, abbiamo bisogno di ricordare il cosiddetto Lemma di Zorn, che non è un lemma, ma un assioma della teoria degli insiemi.

Un sottoinsieme A di un insieme ordinato $X, \le$ è una *catena* se è totalmente ordinato dalla relazione indotta, cioè se, dati $a, b \in A$, vale $a \le b$ oppure $b \le a$. Un *maggiorante* di A è un elemento $x \in X$ tale che $a \le x$, per ogni $a \in A$.

Lemma di Zorn. *Sia $X, \le$ un insieme ordinato in cui ogni catena ha un maggiorante. Allora X ha un elemento massimale.*

Questo enunciato è equivalente all'assioma di scelta.

Assioma di scelta. *Se $\mathscr{X}$ è un insieme di insiemi non vuoti, allora esiste una funzione di scelta per X, cioè un'applicazione $f\colon \mathscr{X} \to \bigcup \mathscr{X}$ tale che, per ogni $X \in \mathscr{X}$, $f(X) \in X$.*

Ancora, un enunciato equivalente è l'assioma del prodotto.

Assioma del prodotto. *Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di insiemi non vuoti, con $\Lambda \neq \emptyset$. Allora $\prod_\lambda X_\lambda \neq \emptyset$.*

Nella dimostrazione del teorema di Tychonov, useremo questi tre enunciati.

Teorema di Tychonov 7.8. *Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di spazi compatti. Allora $\prod_\lambda X_\lambda$ è compatto.*

Dimostrazione. Dimostreremo che, se una famiglia $\mathscr{C}$ di sottoinsiemi di $P = \prod_\lambda X_\lambda$ ha la PIF, allora $\bigcap\{\,\mathrm{Cl}(C) : C \in \mathscr{C}\,\} \neq \emptyset$.

Consideriamo l'insieme $\mathfrak{F}$ di tutte le famiglie di sottoinsiemi di P aventi la PIF e contenenti $\mathscr{C}$; ordiniamo $\mathfrak{F}$ per inclusione. Sia $\mathfrak{G}$ una catena in $\mathfrak{F}$: allora $\mathscr{G} = \bigcup \mathfrak{G}$ è un elemento di $\mathfrak{F}$ ed è quindi un maggiorante di $\mathfrak{G}$: basta provare che $\mathscr{G}$ ha la PIF. Siano $G_1, G_2, \dots, G_n$ in $\mathscr{G}$; siccome $\mathfrak{G}$, esiste un elemento $\mathscr{G}_0$ tale che $G_1, G_2, \dots, G_n$ siano in $\mathscr{G}_0$. Ma $\mathscr{G}_0$ ha la PIF, quindi $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \neq \emptyset$.

Per il lemma di Zorn, $\mathfrak{F}$ ha un elemento massimale $\mathscr{F}$. È chiaro che, se dimostriamo che $\bigcap\{\,\mathrm{Cl}(F) : F \in \mathscr{F}\,\} \neq \emptyset$, abbiamo la tesi.

Le seguenti asserzioni sono conseguenza della massimalità (esercizio):

(1) ogni sottoinsieme di P che contiene un membro di $\mathscr{F}$ appartiene a $\mathscr{F}$;
(2) l'intersezione di due membri di $\mathscr{F}$ appartiene a $\mathscr{F}$;
(3) se sottoinsieme A di P ha intersezione non vuota con ciascun elemento di $\mathscr{F}$, allora A appartiene a $\mathscr{F}$.

Poiché $\mathscr{F}$ ha la PIF, per ogni $\lambda \in \Lambda$, la famiglia

$$\mathscr{F}_\lambda = \{\, p_\lambda^{\rightarrow}(F) : F \in \mathscr{F}\,\}$$

ha anch'essa la PIF. Perciò possiamo scegliere

$$x_\lambda \in \bigcap\{\,\mathrm{Cl}(p_\lambda^{\rightarrow}(F)) : F \in \mathscr{F}\,\}$$

e considerare $\alpha \in P$ definita da $\alpha(\lambda) = x_\lambda$.

Ogni intorno aperto U_λ di x_λ ha intersezione non vuota con ogni insieme della forma $p_\lambda^{\rightarrow}(F)$, dove $F \in \mathscr{F}$. Questo significa che $p_\lambda^{\leftarrow}(U_\lambda)$ appartiene a $\mathscr{F}$, per l'asserzione (3). Dall'asserzione (2) segue che, se Λ' è un sottoinsieme finito di Λ e, per $\lambda \in \Lambda'$, U_λ è un intorno aperto di x_λ,

$$\bigcap\{\, p_\lambda^{\leftarrow}(U_\lambda) : \lambda \in \Lambda'\,\} \in \mathscr{F}.$$

Perciò ogni aperto della base della topologia su P, che contenga α, ha intersezione non vuota con ogni elemento di $\mathscr{F}$, quindi appartiene a $\mathscr{F}$, ancora per l'asserzione (3). Poiché $\mathscr{F}$ ha la PIF, abbiamo come conseguenza che ogni intorno di α ha intersezione non vuota con ogni elemento $F \in \mathscr{F}$. Ciò prova che $\alpha \in \mathrm{Cl}(F)$, per ogni $F \in \mathscr{F}$. □

Esiste una dimostrazione alternativa, che fa uso della convergenza, ma che è valida solo per i prodotti *finiti*.

Teorema 7.9. *Sia X uno spazio topologico. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) *X è compatto;*

(b) *ogni rete in X ha una sottorete convergente* (*cioè ha un punto aderente*).

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Sia $(y_d)_{d\in D}$ una rete in X; supponiamo che la rete non abbia punti aderenti. Per ogni $x \in X$, possiamo allora scegliere un intorno aperto U_x di x e $d_x \in D$ tali che:

$$\text{per ogni } d \geq d_x,\ y_d \notin U_x.$$

Gli aperti U_x formano un ricoprimento aperto di X; vogliamo dimostrare che nessuna parte finita di esso è un ricoprimento, quindi X non è compatto.

Siano $x_1, \dots, x_n \in X$; allora esiste $d \in D$ tale che $d \geq d_{x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Prendiamo y_d; allora, per ipotesi, $y_d \notin U_{x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, quindi

$$y_d \notin U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} \neq X.$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) Sia $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un ricoprimento aperto di X che non ammetta sottoricoprimenti finiti. Per ogni sottoinsieme finito F di Λ, esiste allora $x_F \notin \bigcup\{\, U_\lambda : \lambda \in F \,\}$. Possiamo allora considerare la rete $(x_F)_{F\in\Phi(\Lambda)}$: verifichiamo che questa rete non ha punti aderenti.

Sia $x \in X$; esiste $\lambda \in \Lambda$ tale che $x \in U_\lambda$. Sia $\bar{F} = \{\lambda\}$ e sia $F \in \Phi(\Lambda)$, $F \supseteq \bar{F}$. Allora $x_F \notin U_\lambda$, per ipotesi; quindi x non è un punto aderente alla rete. □

Lemma 7.10. *Siano X_1 e X_2 spazi topologici e sia $(z_d)_{d\in D}$ una rete in $X_1 \times X_2$; allora la rete converge in $X_1 \times X_2$ se e solo se le reti $(p_1(z_d))_{d\in D}$ e $(p_2(z_d))_{d\in D}$ convergono in X_1 e X_2 rispettivamente. In tal caso, se $(p_i(z_d))$ converge a x_i $(i = 1, 2)$, allora la rete data converge a (x_1, x_2).*

Dimostrazione. Esercizio. □

Teorema 7.11. *Siano X_1 e X_2 spazi topologici compatti; allora $X_1 \times X_2$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $(z_d)_{d\in D}$ una rete nel prodotto e consideriamo dapprima, per l'ipotesi di compattezza di X_1, una sottorete $(p_1(z_{\alpha(e')}))_{e'\in E'}$ convergente in X_1. Allora la rete $(p_2(z_{\alpha(e')}))_{e'\in E'}$ ha una sottorete convergente in X_2 che è compatto: sia essa $(p_2(z_{\alpha(\beta(e''))}))_{e''\in E''}$ convergente. È facile vedere che la rete $(z_{\alpha(\beta(e''))})_{e''\in E''}$ converge in $X_1 \times X_2$, per il lemma precedente. □

Il teorema di Tychonov ha un utilissimo contrapposto. In realtà vale un risultato molto più generale.

Teorema 7.12. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici. Se X è compatto, allora $f^{\to}(X)$ è compatta.*

Dimostrazione. Sia $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un ricoprimento aperto in Y di $f^{\to}(X)$. Allora $(f^{\leftarrow}(V_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ è un ricoprimento aperto di X, che quindi ammette un sottoricoprimento finito $(f^{\leftarrow}(V_\lambda))_{\lambda\in F}$. Basta allora osservare che $(V_\lambda)_{\lambda\in F}$ è un ricoprimento di $f^{\to}(X)$. □

Di questo teorema si usa spesso un importante corollario.

Corollario 7.13. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici. Se $C \subseteq X$ è compatto, allora $f^{\to}(C)$ è compatta.*

Dimostrazione. La restrizione di f a C è continua. □

Abbiamo allora tutti gli strumenti per dimostrare il teorema di Heine-Borel.

Teorema 7.14. *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$; allora A è compatto se e solo se A è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Si procede allo stesso modo della dimostrazione di 7.6.

($\Leftarrow$) Siano $p_1, p_2, \dots, p_n$ le proiezioni. Allora $p_i^{\rightarrow}(A)$ è limitato in $\mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ne segue che esistono intervalli $[a_i, b_i]$ tali che

$$A \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = B.$$

Poiché A è chiuso in $\mathbf{R}^n$, A è chiuso in B, il quale è compatto per il Teorema di Tychonov e per 7.6. Quindi A è compatto. □

Un ultimo fatto sulla compattezza è spesso utile.

Teorema 7.15. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e biiettiva di spazi topologici. Se X è compatto e Y è di Hausdorff, allora f è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che $f^{\rightarrow}(U)$ è aperto in Y, per ogni aperto U di X, o, equivalentemente, che $f^{\rightarrow}(C)$ è chiuso in Y, per ogni chiuso C di X.

Sia allora C chiuso in X. Allora C è compatto e quindi $f^{\rightarrow}(C)$ è compatto. Ma Y è di Hausdorff, quindi $f^{\rightarrow}(C)$ è chiuso. □

Talvolta il teorema precedente viene usato nel modo seguente. Siano $\mathscr{T}_1$ e $\mathscr{T}_2$ topologie su X e supponiamo che: (1) $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$, (2) $\mathscr{T}_1$ è di Hausdorff e (3) $\mathscr{T}_2$ è compatta. Allora $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$. Infatti l'identità, considerata come applicazione $X, \mathscr{T}_2 \to X, \mathscr{T}_1$, è continua, e perciò un omeomorfismo.

Concludiamo con una dimostrazione che può essere interessante per chi sia appassionato di logica.

Osserviamo che ogni insieme X con la topologia cofinita è compatto: infatti il complementare di ogni aperto non vuoto è finito.

Teorema 7.16. *Il teorema di Tychonov implica l'assioma del prodotto.*

Dimostrazione. Occorre prima osservare che è possibile sviluppare la topologia necessaria per enunciare il teorema di Tychonov senza usare l'assioma di scelta. Perciò la dimostrazione che daremo ha senso.

Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia non vuota di insiemi non vuoti. Sia ∞ un elemento tale che $\infty \notin X_\lambda$, per ogni λ. Poniamo $Y_\lambda = X_\lambda \cup \{\infty\}$ e dichiariamo un sottoinsieme A di Y_λ aperto se e solo se $A \setminus \{\infty\}$ è cofinito in X_λ; allora ∞ è un punto isolato di Y_λ e Y_λ induce su X_λ la topologia cofinita. Anche Y_λ è compatto.

Poiché assumiamo il teorema di Tychonov, $P = \prod_\lambda Y_\lambda$ è compatto. Inoltre P è non vuoto, poiché l'applicazione $\lambda \mapsto \infty$ appartiene a P. Poniamo $F_\lambda = p_\lambda^{\leftarrow}(X_\lambda)$. Allora ciascun F_λ è chiuso in P. È immediato vedere che la famiglia $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ha la PIF, quindi ha intersezione non vuota. Ma

$$\bigcap\{\, F_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\} = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

e quindi abbiamo la tesi. □

Esercizi

7.1. Sia d una metrica su X; se $x \in X$ e $A \subseteq X$, definiamo $d(A, x) = \inf\{\, d(a, x) : a \in A \,\}$. Definiamo poi, se $B \subseteq X$, $d(A, B) = \inf\{\, d(A, b) : b \in B \,\}$. Dimostrare che $d(A, B) = \inf\{\, d(a, b) : a \in A, b \in B \,\}$.

Se $d(A, B) > 0$, A è chiuso e B è compatto, allora esiste $x \in B$ tale che $d(A, B) = d(A, x)$. (Dimostrare che la funzione $x \mapsto d(A, x)$ è continua ed è positiva per $x \in B$.)

Se anche A è compatto, provare che esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $d(A, B) = d(a, b)$.

7.2. Una *isometria* di uno spazio metrico X, d_X in uno spazio metrico Y, d_Y è un'applicazione $f : X \to Y$ tale che, per ogni $a, b \in X$, $d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b)$. Ogni isometria è iniettiva.

Supponiamo che X sia compatto e che siano date una isometria $f : X \to Y$ ed una isometria $g : Y \to X$. Dimostrare che f è suriettiva e quindi un omeomorfismo. (Se $h : X \to X$ è un'isometria e $h^{\to}(X) \neq X$, esiste $x \in X \setminus h^{\to}(X)$; provare che $r = d(h^{\to}(X), x) > 0$ e definire induttivamente una successione ponendo $x_0 = x$ e $x_{n+1} = h(x_n)$; dimostrare che $d(x_m, x_n) \geq r$, se $m \neq n$, e che quindi la successione non ha punti aderenti.)

7.3. Dimostrare che uno spazio metrico è compatto se e solo se ogni successione ha una *sottosuccessione* convergente. (Imitare la dimostrazione precedentemente data.)

7.4. Una successione (x_n) in uno spazio metrico X, d si dice di *Cauchy* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{n}$ tale che, per $n', n'' \geq \bar{n}$, $d(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$. Dimostrare che una successione di Cauchy che ha un punto aderente converge a quel punto.

7.5. Uno spazio metrico X, d si dice *completo* se ogni successione di Cauchy converge. Dimostrare che ogni spazio metrico compatto è completo.

7.6. Uno spazio metrico X, d si dice *totalmente limitato* se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme finito A di X tale che
$$X = \bigcup \{\, S_d(a, \varepsilon) : a \in A \,\}$$
(si dice che le sfere con centri in A e raggio ε ricoprono X). Dimostrare che uno spazio metrico compatto è totalmente limitato.

7.7. Dimostrare che uno spazio metrico completo e totalmente limitato è compatto. (Sia (x_n) una successione in X, d completo e totalmente limitato; per ogni $m \in \mathbf{N}$, si fissi A_m sottoinsieme finito di X tale che le sfere con centro in A_m e raggio $1/2^m$ ricoprano X; esiste $a_0 \in A_0$ tale che, per infiniti n, $x_n \in S_d(a_0, 1)$; supponiamo di avere definito a_m e definiamo $a_{m+1} \in A_{m+1}$ tale che, per infiniti n, $x_n \in S_d(a_0, 1) \cap S_d(a_2, 1/2) \cap \cdots \cap S_d(a_m, 1/2^m)$; sia n_0 il primo dei naturali l tali che $x_l \in S_d(a_0, 1)$; supponiamo di aver definito n_k e definiamo n_{k+1} come il primo dei naturali $l > n_k$ tali che $x_l \in S_d(a_0, 1) \cap S_d(a_2, 1/2) \cap \cdots \cap S_d(a_{k+1}, 1/2^{k+1})$; la successione (x_{n_k}) è di Cauchy.)

8. Anelli e spazi topologici

In tutta questa sezione A e B indicheranno anelli commutativi. Vogliamo associare ad ogni anello commutativo uno spazio topologico, molto usato nella geometria algebrica.

Definizione 8.1. Un ideale I dell'anello commutativo A si dice:
(a) *primo* se $I \neq A$ e, per ogni $a, b \in A$, da $ab \in I$ segue $a \in I$ oppure $b \in I$;
(b) *massimale* se $I \neq A$ e, se J è un ideale di A con $J \supset I$, allora $J = A$.
Notiamo che gli ideali massimali e primi sono, per definizione, propri. □

In altre parole, un ideale è massimale se è tale nell'insieme degli ideali propri di A, ordinato per inclusione.
Ricordiamo alcuni fatti fondamentali sugli ideali primi e massimali.

Proposizione 8.2. *Sia I un ideale dell'anello commutativo A. Allora:*
(1) *I è primo se e solo se A/I è un dominio;*
(2) *I è massimale se e solo se A/I è un campo.*
Di conseguenza, ogni ideale massimale è primo. □

Indicheremo con $\operatorname{Spec}(A)$ e con $\operatorname{Max}(A)$, rispettivamente, l'insieme degli ideali primi e degli ideali massimali di A. Questi insiemi non sono vuoti e sono chiamati lo *spettro primo* e lo *spettro massimale* di A.

Lemma 8.3. *Sia A un anello commutativo. Se J è un ideale proprio di A, esiste un ideale massimale I di A tale che $J \subseteq I$.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{J}$ l'insieme degli ideali *propri* di A contenenti J, ordinato per inclusione; allora $\mathscr{J}$ non è vuoto e l'unione di una catena in $\mathscr{J}$ è ancora un elemento di $\mathscr{J}$. Infatti è un ideale (esercizio) ed è proprio: un ideale K di A è proprio se e solo se $1 \notin K$. Per il lemma di Zorn, $\mathscr{J}$ possiede elementi massimali, che sono quindi ideali massimali di A. □

Se $E \subseteq A$, poniamo $\mathscr{V}(E) = \{\, P \in \operatorname{Spec}(A) : E \subseteq P \,\}$ e $\mathscr{O}(E) = \{\, P \in \operatorname{Spec}(A) : E \nsubseteq P \,\}$. Indicheremo con EA l'ideale *generato* da E, cioè l'intersezione di tutti gli ideali contenenti E. È chiaro, ad esempio, che $\emptyset A = \{0\}$, mentre $EA = A$, ogni volta che E contiene un elemento invertibile in A. Se $E = \{x\}$, allora $EA = xA$ è l'ideale principale generato da x.

Proposizione 8.4. *Se $E \subseteq A$ non è vuoto, allora EA è l'insieme degli elementi di A della forma*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

dove $n \in \mathbf{N}$, $x_i \in E$ e $a_i \in A$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Se I e J sono ideali di A, indichiamo con IJ l'insieme degli elementi della forma

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

dove $n \in \mathbf{N}$, $x_i \in I$ e $y_i \in J$. È facile vedere che IJ è un ideale di A; inoltre $IJ \subseteq I \cap J$, che a sua volta è un ideale di A. Analogamente, $I + J$ è l'insieme degli elementi della forma $x + y$, con $x \in I$ e $y \in J$. È facile vedere che $I + J$ è un ideale, anzi che $I + J = (I \cup J)A$. Perciò $I + J$ è il minimo ideale che contiene sia I che J.

Lemma 8.5. *Sia P un ideale proprio di A. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) *P è primo;*

(b) *se I e J sono ideali di A, da $IJ \subseteq P$ segue $I \subseteq P$ oppure $J \subseteq P$.*

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Supponiamo $IJ \subseteq P$ e $I \nsubseteq P$. Fissiamo $x \in I \setminus P$ e sia $y \in J$; allora $xy \in IJ$, quindi $xy \in P$. Perciò $y \in P$, perché P è primo.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Siano $x, y \in A$ tali che $xy \in P$. Allora $(xA)(yA) \subseteq P$. □

Diremo che un sottoinsieme $S \subseteq A$ è un *insieme di denominatori* se $1 \in S$ e, dati $s, t \in S$, abbiamo $st \in S$. Questo concetto è molto usato in geometria algebrica: si adopera soprattutto per costruire nuovi anelli in cui gli elementi di S diventino invertibili. La procedura è simile alla costruzione dei razionali a partire dagli interi, prendendo come S gli interi positivi.

Un modo per costruire insiemi di denominatori è quello di prendere i complementari di ideali primi. Inoltre, se S e T sono insiemi di denominatori in A, allora $S \cdot T = \{\, st : s \in S, t \in T \,\}$ è ancora un insieme di denominatori.

Il lemma che segue è una generalizzazione di 8.3, prendendo $S = \{1\}$. Li enunciamo separatamente per due motivi: il lemma 8.3 vale anche per anelli non commutativi e inoltre dà un'informazione maggiore, perché in un anello commutativo esistono, in generale, ideali primi che non sono massimali.

Lemma 8.6. *Sia S un insieme di denominatori in A. Se I è un ideale di A e $I \cap S = \emptyset$, allora esiste un ideale primo P di A tale che $I \subseteq P$ e $P \cap S = \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{J}$ l'insieme degli ideali J di A tali che $I \subseteq J$ e $J \cap S = \emptyset$. Allora $I \in \mathscr{J}$ e, ordinando $\mathscr{J}$ per inclusione, otteniamo che ogni catena ha un maggiorante: basta prendere l'unione della catena, proprio come nella dimostrazione di 8.3. Sia P un elemento massimale di $\mathscr{J}$, la cui esistenza è garantita dal lemma di Zorn. Affermiamo che P è primo.

Supponiamo, per assurdo, che esistano $a, b \notin P$ tali che $ab \in P$. Per la massimalità di P, $P + aA$ e $P + bA$ non appartengono a $\mathscr{S}$; quindi esistono $x, y \in P$ e $a', b' \in A$ tali che $x + aa'$ e $y + bb'$ appartengono a S. Ma allora

$$S \ni (x + aa')(y + bb') = xy + x(bb') + y(aa') + ab(a'b') \in P.$$

Contraddizione. □

Proposizione 8.7. *Sia A un anello commutativo. Siano $E \subseteq A$, $E_\lambda \subseteq A$, per $\lambda \in \Lambda$; siano poi I_1 e I_2 ideali di A. Allora:*
(1) $\mathscr{V}(E) = \mathscr{V}(EA)$;
(2) $\mathscr{V}(E) = \emptyset$ *se e solo se* $EA = A$;
(3) $\mathscr{V}(I_1 I_2) = \mathscr{V}(I_1) \cup \mathscr{V}(I_2)$;
(4) $\bigcap\{\, \mathscr{V}(E_\lambda) : \lambda \in \Lambda \,\} = \mathscr{V}(E)$, *dove* $E = \bigcup\{\, E_\lambda : \lambda \in \Lambda \,\}$.

Dimostrazione. (1) Se un ideale $P \in \operatorname{Spec}(A)$ contiene E, allora necessariamente contiene EA.
(2) Se $EA = A$, allora $\mathscr{V}(E) = \mathscr{V}(A) = \emptyset$, perché gli ideali primi sono, per definizione, propri. Se $EA \neq A$, per il lemma 8.3, esiste un ideale massimale, in particolare primo, che contiene EA.
(3) Immediata, per il lemma 8.5.
(4) Ovvio. □

Il contenuto della proposizione precedente è che gli insiemi della forma $\mathscr{V}(E)$ possono essere presi come la famiglia dei chiusi per una topologia su $\operatorname{Spec}(A)$; gli aperti sono, evidentemente, gli insiemi della forma $\mathscr{O}(E)$. Questa topologia si chiama *topologia di Zariski*. Considereremo sempre $\operatorname{Max}(A)$ come sottospazio di $\operatorname{Spec}(A)$. Notiamo che la topologia di Zariski non è, in generale, di Hausdorff. Una base per la topologia di Zariski è data dagli insiemi della forma $\mathscr{O}(a) = \mathscr{O}(\{a\})$, al variare di $a \in A$. Porremo anche $\mathscr{V}(a) = \mathscr{V}(\{a\})$; notiamo che $\mathscr{V}(a) \cup \mathscr{V}(b) = \mathscr{V}(ab)$.

Teorema 8.8. *Gli spazi topologici* $\operatorname{Spec}(A)$ *e* $\operatorname{Max}(A)$ *sono compatti.*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione per $\operatorname{Spec}(A)$. Sia $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di ideali di A tale che

$$\bigcap\{\, \mathscr{V}(I_\lambda) : \lambda \in \Lambda \,\} = \emptyset.$$

Consideriamo il sottoinsieme I di A così definito: $a \in I$ se e solo se esiste un sottinsieme finito F di Λ e, per $\lambda \in F$, esistono $x_\lambda \in I_\lambda$ tali che

$$a = \sum_{\lambda \in F} x_\lambda.$$

Questo insieme è, chiaramente, un ideale di A; inoltre, per ogni λ, $I_\lambda \subseteq I$. Perciò $\mathscr{V}(I) \subseteq \mathscr{V}(I_\lambda)$. In particolare $\mathscr{V}(I) = \emptyset$, quindi $I = A$. Ma allora esistono un sottoinsieme finito F di Λ e $x_\lambda \in I_\lambda$ ($\lambda \in F$) tali che $1 = \sum_{\lambda \in F} x_\lambda$. Ne segue facilmente che

$$\bigcap\{\, \mathscr{V}(I_\lambda) : \lambda \in F \,\} = \emptyset$$

e quindi la tesi. □

In alcuni casi importanti, $\operatorname{Max}(A)$ è uno spazio di Hausdorff. Prima di vedere quando, studiamo ancora un po' di algebra.

Indicheremo con $\operatorname{nilrad} A$ l'intersezione di tutti gli ideali primi di A (il *nilradicale*) e con $\operatorname{rad} A$ l'intersezione di tutti gli ideali massimali di A (il *radicale di Jacobson*). Chiaramente, $\operatorname{nilrad} A \subseteq \operatorname{rad} A$.

Proposizione 8.9. *Un elemento $a \in A$ appartiene a $\operatorname{nilrad} A$ se e solo se a è nilpotente, cioè esiste $n > 0$ con $a^n = 0$. Un elemento $a \in A$ appartiene a $\operatorname{rad} A$ se e solo se, per ogni $b \in A$, $1 + ab$ è invertibile.*

Dimostrazione. Sia $a \in A$; se a non è nilpotente, l'insieme $S = \{a^n : n > 0\}$ è un insieme di denominatori e $0 \notin S$. Allora, per 8.6 esiste un ideale primo P tale che $P \cap S = \emptyset$, in particolare $a \notin P$. Viceversa, se $a^n = 0$, per un certo $n > 0$, allora, per ogni ideale primo P, dobbiamo avere $a \in P$.

Supponiamo ora che $x = 1 + ab$ non sia invertibile, per qualche $b \in A$. Allora xA è un ideale proprio ed è contenuto in un ideale massimale $\mathfrak{m}$. Se fosse $a \in \operatorname{rad} A$, avremmo $1 = x - ab \in \mathfrak{m}$: assurdo. Viceversa, se a non appartiene ad un certo ideale massimale $\mathfrak{m}$, allora $aA + \mathfrak{m} = A$, quindi esistono $b \in A$ e $x \in \mathfrak{m}$ tali che $1 = x - ab$. Ma allora $1 + ab = x \in \mathfrak{m}$ non è invertibile. □

Teorema 8.10. *Sia A un anello commutativo; le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) $\operatorname{Max}(A)$ *è uno spazio di Hausdorff;*
(b) *dati $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \operatorname{Max}(A)$, con $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, esistono $a \in A \setminus \mathfrak{m}$ e $b \in A \setminus \mathfrak{n}$ tali che $ab \in \operatorname{rad} A$;*
(c) *ogni ideale primo di A che contiene $\operatorname{rad} A$ è contenuto in un unico ideale massimale.*

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Se $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ esistono due aperti di base le cui intersezioni con $\operatorname{Max}(A)$ forniscono intorni disgiunti di $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$. Quindi esistono $a, b \in A$ tali che: (1) $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A) \setminus \mathscr{V}(a)$; (2) $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max}(A) \setminus \mathscr{V}(b)$; (3) $(\operatorname{Max}(A) \setminus \mathscr{V}(a)) \cap (\operatorname{Max}(A) \setminus \mathscr{V}(b)) = \emptyset$.

La condizione (1) dice che $a \notin \mathfrak{m}$, la (2) che $b \notin \mathfrak{n}$. La condizione (3) dice che $\operatorname{Max}(A) \subseteq \mathscr{V}(a) \cup \mathscr{V}(b) = \mathscr{V}(ab)$, quindi che ab appartiene ad ogni ideale massimale, cioè appartiene a $\operatorname{rad} A$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Si percorre a ritroso la dimostrazione precedente.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Sia P un ideale primo di A con $\operatorname{rad} A \subseteq P$. Supponiamo che $P \subseteq \mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$, dove $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \operatorname{Max}(A)$. Se $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, possiamo prendere $a \in A \setminus \mathfrak{m}$ e $b \in A \setminus \mathfrak{n}$ tali che $ab \in \operatorname{rad} A$. Poiché $\operatorname{rad} A \subseteq P$, abbiamo $ab \in P$ e quindi $a \in P$ oppure $b \in P$. In ogni caso segue un assurdo.

(c) $\Longrightarrow$ (b) Siano $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \operatorname{Max}(A)$ distinti. Se poniamo $S = A \setminus \mathfrak{m}$ e $T = A \setminus \mathfrak{n}$, allora S e T sono insiemi di denominatori. Supponiamo $(S \cdot T) \cap \operatorname{rad} A = \emptyset$; allora, per 8.6, esiste un ideale primo P tale che $\operatorname{rad} A \subseteq P$ e $P \cap (S \cdot T) = \emptyset$. Questo implica $P \cap S = P \cap T = \emptyset$ e quindi che $P \subseteq \mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$: assurdo. □

L'ipotesi di questo teorema è soddisfatta in un caso che ci interesserà molto.

Corollario 8.11. *Sia A un anello commutativo. Allora $\operatorname{Spec}(A)$ è uno spazio di Hausdorff se e solo se ogni ideale primo di A è massimale.*

Dimostrazione. Se ogni ideale primo di A è massimale, le condizioni del teorema precedente sono soddisfatte; perciò $\mathrm{Max}(A) = \mathrm{Spec}(A)$ è di Hausdorff.

Viceversa, sia P un ideale primo e sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale tale che $P \subset \mathfrak{m}$. Se $\mathscr{V}(E)$ è un chiuso di $\mathrm{Spec}(A)$ che contiene P, abbiamo $E \subseteq P$, quindi anche $\mathfrak{m} \in \mathscr{V}(E)$. Perciò $\{P\}$ non è chiuso in $\mathrm{Spec}(A)$. □

Terminiamo questa sezione facendo vedere che ogni omomorfismo di anelli $\varphi\colon A \to B$ dà origine ad un'applicazione continua $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ (notiamo che la direzione della freccia è "rovesciata").

Proposizione 8.12. *Sia $\varphi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli. Allora, per ogni ideale primo P di B, $\varphi^{\leftarrow}(P)$ è un ideale primo di A.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in A$ con $xy \in \varphi^{\leftarrow}(P)$. Allora $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \in P$ e quindi $\varphi(x) \in P$ oppure $\varphi(y) \in P$. □

Notiamo che la stessa cosa non vale per gli ideali massimali: $\{0\}$ è un ideale massimale in $\mathbf{R}$, ma non è massimale in $\mathbf{Z}$.

Teorema 8.13. *Sia $\varphi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli; allora l'applicazione*

$$\mathrm{Spec}(\varphi) = \varphi^{\sharp}\colon\ \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$$

definita da $\varphi^{\sharp}(P) = \varphi^{\leftarrow}(P)$ è continua. Inoltre, se $\psi\colon B \to C$ è un altro omomorfismo di anelli, $\mathrm{Spec}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Spec}(\varphi) \circ \mathrm{Spec}(\psi)$. *Vale anche che* $\mathrm{Spec}(id_A) = id_{\mathrm{Spec}(A)}$.

Dimostrazione. Basta dimostrare la continuità; il resto è un facile esercizio.

Sia $E \subseteq A$; allora

$$(\varphi^{\sharp})^{\leftarrow}(\mathscr{V}(E)) = \{\, P \in \mathrm{Spec}(B) : \varphi^{\sharp}(P) \in \mathscr{V}(E) \,\} = \{\, P \in \mathrm{Spec}(B) : E \subseteq \varphi^{\leftarrow}(P) \,\} = \mathscr{V}(\varphi^{\rightarrow}(E))$$

è chiuso in $\mathrm{Spec}(B)$. □

Esercizi

8.1. Sia $\mathscr{X} \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ non vuoto. Allora $\mathrm{Cl}(\mathscr{X}) = \mathscr{V}(\bigcap \mathscr{X})$ (*formula della chiusura*). Dimostrare poi che dati $P, Q \in \mathrm{Spec}(A)$, se $P \neq Q$, esiste un intorno di P che non contiene Q *oppure* esiste un intorno di Q che non contiene P.

8.2. Dati $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathrm{Max}(A)$, esistono un intorno di $\mathfrak{m}$ che non contiene $\mathfrak{n}$ *e* un intorno di $\mathfrak{n}$ che non contiene $\mathfrak{m}$ (intorni in $\mathrm{Max}(A)$, ovviamente).

8.3. Determinare gli ideali primi e gli ideali massimali in $\mathbf{C}[x]$, dove $\mathbf{C}$ è il campo complesso. (Ricordare che ogni ideale di $\mathbf{C}[x]$ è principale e che vale il *teorema fondamentale dell'algebra*.) Se $a \in \mathbf{C}$, si ponga $\mathfrak{m}_a = \{\, f \in \mathbf{C}[x] : f(a) = 0 \,\}$. Dimostrare che $\mathfrak{m}_a$ è un ideale massimale di $\mathbf{C}[x]$ e che l'applicazione $\mathbf{C} \to \mathrm{Max}(\mathbf{C}[x])$ definita da $a \mapsto \mathfrak{m}_a$ è biiettiva. È continua? È un omeomorfismo?

9. Spazi booleani — Reticoli

D'ora in poi tutti gli spazi topologici considerati saranno, a meno che non si dica il contrario, di Hausdorff.

Definizione 9.1. Un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice *chiusaperto* se è sia chiuso che aperto. Uno spazio topologico compatto si dice *booleano* se i suoi sottoinsiemi chiusi e aperti formano una base della topologia. □

Esempi banali di chiusaperti in X sono $\emptyset$ e X. È chiaro che unioni e intersezioni finite di chiusaperti sono chiusaperti. Inoltre, immagini inverse tramite applicazioni continue di chiusaperti sono chiusaperti.

È anche immediato verificare che uno spazio compatto è booleano se e solo se la sua topologia ha una base formata da chiusaperti.

Notiamo che, se $\mathscr{T}$ è una topologia su X, l'insieme dei chiusaperti di X è sempre una base per una topologia $\mathscr{T}_0$ su X, che tuttavia non è necessariamente di Hausdorff; chiaramente $\mathscr{T}_0 \subseteq \mathscr{T}$. Se $X, \mathscr{T}$ è compatto, le due topologie coincidono se e solo se $\mathscr{T}_0$ è di Hausdorff, per 7.15. Quindi, dati due punti distinti $x, y \in X$, esistono A e B chiusaperti in X disgiunti tali che $a \in A$ e $y \in B$.

Proposizione 9.2. *Uno spazio booleano è totalmente sconnesso.*

Dimostrazione. Sia X booleano. Allora, per la discussione precedente, dati $x, y \in X$ distinti, esiste A chiusaperto in X tale che $x \in A$ e $y \notin A$. Ma allora $B = X \setminus A$ è chiusaperto e A e B formano una sconnessione di X. Dunque la componente connessa di x è $\{x\}$. □

Dimostriamo una proprietà che ci sarà utile in seguito.

Proposizione 9.3. *Sia X uno spazio booleano; siano C un chiuso di X e $x \in X \setminus C$. Allora esiste un chiusaperto U di X tale che $C \subseteq U$ e $x \notin U$.*

Dimostrazione. Per ogni $c \in C$, fissiamo U_c chiusaperto di X tale che $x \notin U_c$ e $c \in U_c$; questi formano un ricoprimento aperto di C, il quale è compatto. Quindi esistono $c_1, c_2, \dots, c_n$ tali che $C \subseteq U = U_{c_1} \cup \dots \cup U_{c_n}$ e $x \notin U$. □

Indicheremo con $\mathbf{2}$ lo spazio topologico (discreto) $\mathbf{2} = \{0, 1\}$.

Proposizione 9.4. *Se Λ è un insieme, allora $\mathbf{2}^\Lambda$ è uno spazio booleano.*

Dimostrazione. Il prodotto $\mathbf{2}^\Lambda$ è compatto per il teorema di Tychonov. Indicando con $p_\lambda \colon \mathbf{2}^\Lambda \to \mathbf{2}$ le proiezioni, sappiamo che una base per la topologia su $\mathbf{2}^\Lambda$ è data dalle intersezioni finite degli insiemi della forma $p_\lambda^\leftarrow(U)$, dove U è un aperto di $\mathbf{2}$. Ci basta perciò dimostrare che $p_\lambda^\leftarrow(\{0\})$ è chiusaperto. Questo è ora ovvio, perché p_λ è continua: per definizione, l'immagine inversa di un chiusaperto tramite un'applicazione continua è un chiusaperto. □

Proposizione 9.5. *Sia X uno spazio booleano e sia Y un chiuso di X. Allora Y, con la topologia relativa, è booleano.*

Dimostrazione. Poiché Y è chiuso, Y è compatto. Inoltre una base della topologia relativa si ottiene intersecando con Y gli elementi di una base della topologia su X. Sia allora U un chiusaperto di X; abbiamo che $U \cap Y$ è chiuso in X, quindi anche in Y. Perciò $U \cap Y$ è sia chiuso che aperto in Y. Dunque la topologia su Y ha una base formata da chiusaperti. □

Gli spazi booleani hanno questo nome perché l'insieme dei chiusaperti in essi è un'algebra di Boole. Ricordiamo alcune definizioni.

Definizione 9.6. Un insieme parzialmente ordinato $L, \leq$ si dice un *reticolo* se, dati $x, y \in L$, esistono $\sup_\leq\{x, y\}$ e $\inf_\leq\{x, y\}$. □

Una definizione equivalente è tramite due operazioni.

Definizione 9.7. Un insieme L dotato di due operazioni $\vee$ e $\wedge$ si dice un *reticolo* se, per ogni $x, y, z \in L$,

$(1_\vee)$	$x \vee x = x,$	$(1_\wedge)$	$x \wedge x = x,$
$(2_\vee)$	$x \vee y = y \vee x,$	$(2_\wedge)$	$x \wedge y = y \wedge x,$
$(3_\vee)$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$	$(3_\wedge)$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z),$
$(4_\vee)$	$x \vee (x \wedge y) = x,$	$(4_\wedge)$	$x \wedge (x \vee y) = x.$

Le proprietà si dicono, rispettivamente, proprietà di *idempotenza*, proprietà *commutatività*, proprietà *associatività* e proprietà di *assorbimento*. □

Le definizioni sono equivalenti perché, se in un reticolo secondo la prima definizione poniamo $x \vee y = \sup_\leq\{x, y\}$ e $x \wedge y = \inf_\leq\{x, y\}$, le due operazioni soddisfano le richieste della seconda definizione.

Viceversa, se abbiamo un reticolo per la seconda definizione, è facile vedere che

$$x \vee y = y \qquad \text{se e solo se} \qquad x \wedge y = x;$$

se poniamo

$$x \leq y \qquad \text{per} \qquad x \vee y = y,$$

la relazione così ottenuta è una relazione d'ordine e, per ogni x e y,

$$\sup_\leq\{x, y\} = x \vee y \qquad \text{e} \qquad \inf_\leq\{x, y\} = x \wedge y.$$

Nel seguito, useremo una o l'altra formulazione, a seconda della convenienza.

Se in un reticolo $L, \leq$ esistono il minimo o il massimo, vengono indicati rispettivamente con 0 e con 1 (a meno che non esistano nomi specifici per tali elementi).

Esempio 9.8. L'insieme $\mathsf{P}(X)$ delle parti di X, ordinato per inclusione, è un reticolo, con minimo $\emptyset$ e massimo X. Dati $A, B \in \mathsf{P}(X)$, $\sup_{\subseteq}\{A, B\} = A \cup B$ e $\inf_{\subseteq}\{A, B\} = A \cap B$. □

Proposizione 9.9. *Sia $L, \vee, \wedge$ un reticolo. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(a) *per ogni $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;*
(b) *per ogni $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Un reticolo in cui vale una delle due condizioni precedenti si dice *distributivo*.

Sia $L, \leq$ un reticolo con minimo 0 e massimo 1. Dato $x \in L$, un elemento $y \in L$ si dice un *complemento* di x se

$$x \vee y = 1 \qquad \text{e} \qquad x \wedge y = 0.$$

Un reticolo è *complementato* se ogni elemento ha un complemento.

Proposizione 9.10. *Sia $L, \leq$ un reticolo distributivo con minimo* 0 *e massimo* 1*. Se $x \in L$ ha un complemento, questo è unico.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Quando il complemento di un elemento x di un reticolo esiste ed è unico, esso si indica con x^*.

Definizione 9.11. Un reticolo con minimo e massimo, distributivo e complementato si chiama un'*algebra di Boole*. □

Esempio 9.12. L'insieme dei divisori di $n > 0$, ordinato per divisibilità, è un'algebra di Boole. L'insieme dei naturali, ordinato per divisibilità, non è un'algebra di Boole. □

Esiste un'altra formulazione del concetto di algebra di Boole.

Definizione 9.13. Un anello A si dice un *anello booleano* se, per ogni $a \in A$, $a^2 = a$. □

Le seguenti proprietà sono (o dovrebbero essere) ben note.

Proposizione 9.14. *Sia A un anello booleano. Allora, per ogni $a \in A$, $2a = a + a = 0$; inoltre A è commutativo.*

Dimostrazione. Abbiamo $a + a = (a + a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a + a + a + a$, da cui $a + a = 0$ e quindi $-a = a$.

Inoltre $a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b$, da cui $ab + ba = 0$, cioè $ba = -ab = ab$. □

Sia A un anello booleano; poniamo, per $a, b \in A$,

$$a \vee b = a + b + ab \qquad \text{e} \qquad a \wedge b = ab.$$

È facile verificare che queste operazioni soddisfano le condizioni che fanno di $A, \vee, \wedge$ un reticolo. Inoltre questo reticolo è distributivo ed ha minimo 0 e massimo 1. Ogni elemento a ha un complemento $a^* = 1 + a$. La relazione d'ordine è:

$$a \leq b \iff ab = a \iff a + b + ab = b.$$

(Esercizio.)

Viceversa, se $L, \leq$ è un'algebra di Boole, possiamo definire, per $x, y \in L$,

$$x + y = (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y) \qquad \text{e} \qquad xy = x \wedge y,$$

ottenendo un anello booleano (esercizio). Abbiamo anche $x + y = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)^*$ (esercizio).

Teorema 9.15. *Sia X uno spazio booleano. Allora l'insieme $\mathsf{B}(X)$ dei chiusaperti di X, ordinato per inclusione, è un'algebra di Boole.*

Dimostrazione. È chiaro che $\mathsf{B}(X)$ è un sottoreticolo di $\mathsf{P}(X)$, il quale è un'algebra di Boole. L'unica verifica da fare è che il complementare di un chiusaperto è un chiusaperto: ciò è ovvio. $\square$

Indicheremo le operazioni di $\mathsf{B}(X)$ come unione e intersezione; il complementare di U sarà indicato con $X \setminus U$ o anche con U^*, se il contesto è chiaro. Inoltre porremo

$$U \vartriangle V = (U \cap (X \setminus V)) \cup (V \cap (X \setminus U)) = (U \cup V) \setminus (U \cap V)$$

(*differenza simmetrica* di U e V). Perciò, vedendo $\mathsf{B}(X)$ come anello booleano, l'addizione corrisponde alla differenza simmetrica e la moltiplicazione all'intersezione.

Il teorema appena dimostrato è il fondamento della dualità di Stone. Esiste una descrizione diversa di $\mathsf{B}(X)$, utile quando si devono eseguire operazioni algebriche. Ricordiamo che, se A è un sottoinsieme di X, la *funzione caratteristica* di A è $\chi_A \colon X \to \mathbf{2}$, dove $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$.

L'insieme $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ può essere considerato un anello booleano, identificandolo con $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. In particolare, l'insieme $\mathbf{2}^X$ di tutte le applicazioni $X \to \mathbf{2}$ è un anello, dove si ponga, per $\alpha, \beta \in \mathbf{2}^X$,

$$\alpha + \beta : x \mapsto \alpha(x) + \beta(x), \qquad \alpha\beta : x \mapsto \alpha(x)\beta(x).$$

Se X è uno spazio booleano, l'insieme di tutte le funzioni caratteristiche dei chiusaperti coincide con l'insieme di tutte le applicazioni continue $X \to \mathbf{2}$, e viene denotato con $\mathsf{C}(X)$. È chiaro che $\mathsf{C}(X)$ è un sottoanello di $\mathbf{2}^X$ e, come tale, un anello booleano.

Proposizione 9.16. *Se X è uno spazio booleano, allora $\mathsf{B}(X)$ e $\mathsf{C}(X)$ sono algebre di Boole isomorfe.*

Dimostrazione. Facciamo vedere che l'applicazione $\eta_X \colon U \mapsto \chi_U$ è un isomorfismo. Sappiamo già che è biiettiva. Basta allora vedere che è un isomorfismo di reticoli, cioè che sia η_X che la sua inversa rispettano l'ordinamento. L'inversa di η_X è $\alpha \mapsto \alpha^{\leftarrow}(\{1\})$.

Siano $U, V \in \mathsf{B}(X)$, con $U \subseteq V$. Allora è facile vedere che $\chi_U\chi_V = \chi_U$, cioè che $\chi_U \leq \chi_V$. Viceversa, siano $\alpha, \beta \in \mathsf{C}(X)$, con $\alpha \leq \beta$, cioè $\alpha\beta = \alpha$. Allora, se $U = \alpha^{\leftarrow}(\{1\})$ e $V = \beta^{\leftarrow}(\{1\})$, è immediato verificare che $U \subseteq V$. $\square$

Teorema 9.17. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua di spazi booleani; allora l'applicazione*
$$\mathsf{B}(f) = f^\flat\colon \mathsf{B}(Y) \to \mathsf{B}(X)$$
definita da $f^\flat(U) = f^\leftarrow(U)$ è un omomorfismo di anelli booleani. Inoltre, se $g\colon Y \to Z$ è un'altra applicazione continua di spazi booleani, $\mathsf{B}(g \circ f) = \mathsf{B}(f) \circ \mathsf{B}(g)$. Vale anche che $\mathsf{B}(id_X) = id_{\mathsf{B}(X)}$.

Dimostrazione. Facile applicazione delle formule delle immagini inverse. Notiamo solo che, se U è un chiusaperto di Y, $f^\leftarrow(U)$ è un chiusaperto di X. □

La medesima costruzione è possibile per le algebre $\mathsf{C}(X)$.

Teorema 9.18. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua di spazi booleani; allora l'applicazione*
$$\mathsf{C}(f)\colon \mathsf{C}(Y) \to \mathsf{C}(X)$$
definita da $\mathsf{C}(f)(\alpha) = \alpha \circ f$ è un omomorfismo di anelli booleani. Inoltre, se $g\colon Y \to Z$ è un'altra applicazione continua di spazi booleani, $\mathsf{C}(g \circ f) = \mathsf{C}(f) \circ \mathsf{C}(g)$. Vale anche che $\mathsf{C}(id_X) = id_{\mathsf{C}(X)}$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Gli isomorfismi η_X sono collegati fra loro: sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua di spazi booleani. Allora il diagramma
$$\begin{tikzcd}
\mathsf{B}(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[d, "\mathsf{B}(f)"'] & \mathsf{C}(Y) \arrow[d, "\mathsf{C}(f)"] \\
\mathsf{B}(X) \arrow[r, "\eta_X"] & \mathsf{C}(X)
\end{tikzcd}$$
è commutativo, cioè $\eta_X \circ \mathsf{B}(f) = \mathsf{C}(f) \circ \eta_Y$.

Esercizi

9.1. Sia E un insieme e sia $\mathsf{F}(E)$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti oppure a complementare finito di E. Allora $\mathsf{F}(E)$ è un'algebra di Boole, se ordinata per inclusione, ed è una sottoalgebra di $\mathsf{P}(E)$.

9.2. Sia A un'algebra di Boole e sia E un sottoinsieme (non vuoto) di A. La minima sottoalgebra di A contenente E è formata dagli elementi della forma
$$\bigvee_{i=1}^{m}\Bigl(\bigwedge_{j=1}^{n_i} x_{ij}\Bigr),$$
dove $x_{ij} \in E$ oppure $x_{ij}^* \in E$. Questa sottoalgebra si dice *generata* da E; la sottoalgebra di A generata da $\emptyset$ è $\{0, 1\}$.

Dimostrare che la sottoalgebra generata da E coincide anche con l'insieme degli elementi della forma
$$\bigwedge_{i=1}^{m}\Bigl(\bigvee_{j=1}^{n_i} x_{ij}\Bigr),$$
dove $x_{ij} \in E$ oppure $x_{ij}^* \in E$.

9.3. Sia B una sottoalgebra dell'algebra di Boole A. Se $a \in A$, la sottoalgebra di A generata da $B \cup \{a\}$ è formata dagli elementi della forma $(x \wedge a) \vee (y \wedge a^*)$, per $x, y \in A$. Dimostrare che questa sottoalgebra coincide con $\{ x + ya : x, y \in B \}$.

9.4. Sia A un'algebra di Boole e sia $E \subseteq A$; poniamo $E^* = \{ a^* : a \in E \}$. Se esiste $\sup E$, allora esiste anche $\inf E^*$ e si ha $\inf E^* = (\sup E)^*$. Inoltre, per ogni $a \in A$, esiste $\sup\{ a \wedge x : x \in E \}$ e coincide con $a \wedge (\sup E)$. Dualizzare.

10. Anelli booleani e algebre di Boole

Proposizione 10.1. *Sia A un anello booleano. Allora ogni ideale primo di A è massimale. Di conseguenza* $\operatorname{Spec}(A)$ *è uno spazio di Hausdorff.*

Dimostrazione. Sia P un ideale primo di A; allora A/P è un anello booleano e un dominio. Ci basta allora dimostrare che un anello booleano è un dominio se e solo se è un campo.

Sia A un dominio booleano: se $a \in A$, allora $a(1+a) = a + a^2 = a + a = 0$, quindi $a = 0$ oppure $a = 1$. Quindi $A = \{0, 1\} = \mathbf{2}$ è un campo. □

Notiamo che la stessa dimostrazione dice che l'unico elemento invertibile in un anello booleano A è 1. In realtà possiamo dimostrare qualcosa di più.

Lemma 10.2. *Sia A un anello booleano e sia $a \in A$.*

(1) *Se $a \neq 0$, esiste un ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A tale che $a \notin \mathfrak{m}$.*
(2) *Sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A; allora $\mathfrak{m}$ è massimale se e solo se $1 \notin \mathfrak{m}$ e, per ogni $a \in A$, $a \in \mathfrak{m}$ oppure $a^* \in \mathfrak{m}$.*
(3) *Se $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di A, allora $A/\mathfrak{m}$ è isomorfo a $\mathbf{2}$.*
(4) *Se $a \in A$, $a \neq 0$, esiste un omomorfismo $\varphi\colon A \to \mathbf{2}$ tale che $\varphi(a) = 1$.*

Dimostrazione. (1) Sia $a \in \operatorname{rad} A$; allora $1 + a$ è invertibile, per 8.9. Quindi $1 + a = 1$, cioè $a = 0$.

(2) ($\Rightarrow$) Sia $\mathfrak{m}$ massimale. Allora $1 \notin \mathfrak{m}$. Se $a \in A$ e $a^* \notin \mathfrak{m}$, abbiamo che, indicando con J l'ideale principale generato da a^*, $\mathfrak{m} + J = A$. In particolare, esistono $b \in \mathfrak{m}$ e $c \in A$ tali che $1 = b + a^*c$. Allora $a = a1 = ab + aa^*c = ab \in \mathfrak{m}$.

(2) ($\Leftarrow$) Sia J un ideale di A contenente propriamente $\mathfrak{m}$. Allora esiste $a \in J$ tale che $a \notin \mathfrak{m}$. Ma allora $a^* \in \mathfrak{m}$ e quindi $1 = a \vee a^* \in J$. Perciò $J = A$ e $\mathfrak{m}$ è massimale.

(3) Per la parte (2), l'anello $A/\mathfrak{m}$ ha due elementi.

(4) Ovvio per le asserzioni precedenti. □

Teorema 10.3. *Sia A un anello booleano. Allora* $\operatorname{Spec}(A)$ *è uno spazio booleano.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che $\operatorname{Spec}(A)$ è compatto e di Hausdorff. Una base per la topologia su $\operatorname{Spec}(A)$ è formata dagli insiemi della forma $\mathscr{O}(a)$, per $a \in A$. Ora $\mathscr{O}(a) = \mathscr{V}(a^*)$, quindi è un chiusaperto. □

Siccome sappiamo che ogni anello booleano può essere visto come algebra di Boole, è interessante dare caratterizzazioni di vari concetti in termini delle operazioni booleane.

Proposizione 10.4. *Sia I un sottoinsieme dell'anello booleano A. Allora I è un ideale se e solo se:*
(Id-1) $0 \in I$*;*
(Id-2) *se* $a \in I$ *e* $b \leq a$*, allora* $b \in I$*;*
(Id-3) *se* $a, b \in I$*, allora* $a \vee b \in I$*.*

Dimostrazione. (⇒) Sia I un ideale; allora $0 \in I$. Siano $a \in I$ e $b \leq a$; allora, per definizione, $ba = b$. Ma $ba \in I$. Per finire, se $a, b \in I$, allora $a + b \in I$ e $ab \in I$. Ora $a \vee b = a + b + ab \in I$.

(⇐) Siano $a, b \in I$. Allora

$$a - b = a + b = (a \vee b) \wedge (a \wedge b)^* \leq a \vee b \in I$$

e quindi $a + b \in I$. Inoltre, se $a \in I$ e $b \in A$, $ab \leq a \in I$ e quindi $ab \in I$. □

Notiamo che la condizione (Id-1) può essere sostituita da $I \neq \emptyset$.

In modo analogo, possiamo caratterizzare i sottoanelli di A: sono esattamente i sottoreticoli che contengono il minimo e il massimo e sono chiusi rispetto ai complementi.

Proposizione 10.5. *Sia B un sottoinsieme dell'anello booleano A. Allora B è un sottoanello di A se e solo se:*
(SA-1) $1 \in B$*;*
(SA-2) *se* $a \in B$*, allora* $a^* \in B$*;*
(SA-3) *se* $a, b \in B$*, allora* $a \vee b \in B$ *e* $a \wedge b \in B$*.*

Dimostrazione. (⇒) Sia B un sottoanello. Allora $1 \in B$ e $a \wedge b = ab \in B$, per definizione. Inoltre $a^* = 1 + a \in B$. Abbiamo poi $a \vee b = a + b + ab \in B$.

(⇐) Basta dimostrare che B è chiuso per la somma. Siano $a, b \in B$. Allora

$$a + b = (a \wedge b^*) \vee (a^* \wedge b)$$

e quindi $a + b \in B$, essendo tutti gli elementi a secondo membro elementi di B. □

Per ragioni storiche, piuttosto che di ideali, negli anelli booleani si preferisce parlare di filtri.

Definizione 10.6. Sia A un'algebra di Boole. Un sottoinsieme $\mathfrak{F}$ di A è un *filtro* se:
(Fil-1) $1 \in \mathfrak{F}$;
(Fil-2) se $a \in \mathfrak{F}$ e $b \leq a$, allora $b \in \mathfrak{F}$;
(Fil-3) se $a, b \in \mathfrak{F}$, allora $a \wedge b \in \mathfrak{F}$.
Notiamo che la condizione (Fil-1) può essere espressa come $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. □

La somiglianza con le condizioni della proposizione 10.4 dovrebbero essere evidenti. Naturalmente, parlando di ideale in un'algebra di Boole, si intende un ideale nell'anello booleano associato.

Se $X \subseteq A$, poniamo $X^* = \{ x^* : x \in X \}$.

Proposizione 10.7. *Sia A un'algebra di Boole e sia $\mathfrak{F} \subseteq A$. Allora $\mathfrak{F}$ è un filtro in A se e solo se $\mathfrak{F}^*$ è un ideale in A. L'applicazione $\mathfrak{F} \mapsto \mathfrak{F}^*$ è una biiezione dell'insieme dei filtri in A con l'insieme degli ideali di A, che conserva l'inclusione.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Come A è un ideale, allora $A = A^*$ è anche un filtro, che chiameremo filtro *improprio*. Conveniamo fin d'ora che tutti i filtri che considereremo saranno *propri*.

Definizione 10.8. Un filtro $\mathfrak{U}$ nell'algebra di Boole A si dice un *ultrafiltro* se è massimale nell'insieme dei filtri (propri) in A, ordinato per inclusione. □

Segue dalla proposizione precedente che $\mathfrak{U}$ è un ultrafiltro se e solo se $\mathfrak{U}^*$ è un ideale massimale. Possiamo allora enunciare un risultato che si ricava direttamente da queste considerazioni e dal lemma 10.2.

Proposizione 10.9. *Sia A un'algebra di Boole e sia $a \in A$.*

(1) *Se $\mathfrak{F}$ è un filtro in A, esiste un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ in A tale che $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$.*
(2) *Se $a \neq 1$, esiste un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ in A tale che $a \notin \mathfrak{U}$.*
(3) *Sia $\mathfrak{F}$ un filtro in A; allora $\mathfrak{F}$ è un ultrafiltro se e solo se, per ogni $a \in A$, $a \in \mathfrak{F}$ oppure $a^* \in \mathfrak{F}$.* □

Abbiamo già usato implicitamente gli ultrafiltri; precisamente, l'insieme $\mathscr{F}$ nella dimostrazione del teorema di Tychonov è un ultrafiltro.

Se $a \in A$, il *filtro generato* da a è $\mathfrak{F}_a = \{\, x \in A : x \geq a \,\}$; naturalmente, per avere un filtro proprio, occorre $a \neq 0$. È chiaro che $\mathfrak{F}_a = (a^*A)^*$. Poiché da $b \leq a$ segue che $\mathfrak{F}_a \subseteq \mathfrak{F}_b$, abbiamo che $\mathfrak{F}_a$ è un ultrafiltro se e solo se a è un *atomo*, cioè un elemento minimale di $A \setminus \{0\}$.

Anche il fatto che ogni ideale massimale è primo ha una controparte per gli ultrafiltri.

Proposizione 10.10. *Sia $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro in A. Se $a, b \in A$ e $a \vee b \in \mathfrak{U}$, allora $a \in \mathfrak{U}$ oppure $b \in \mathfrak{U}$.*

Dimostrazione. È possibile dare una dimostrazione diretta della proposizione. Ne preferisco una che usi la dualità fra filtri e ideali 10.7.

Se $\mathfrak{U}$ è un ultrafiltro, allora $I = \mathfrak{U}^*$ è un ideale massimale di A. Ora $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^* = (1 + a)(1 + b) \in I$ e quindi $1 + a = a^* \in I$ oppure $1 + b = b^* \in I$. □

Indicheremo con $\mathsf{S}(A)$ l'insieme degli ultrafiltri sull'anello booleano A.

Dato $a \in A$, poniamo $\mathscr{W}(a) = \{\, \mathfrak{U} \in \mathsf{S}(A) : a \in \mathfrak{U} \,\}$.

Lemma 10.11. *Sia A un'algebra di Boole e siano $a, b \in A$. Allora*

(1) $\mathscr{W}(0) = \emptyset$ *e* $\mathscr{W}(1) = \mathsf{S}(A)$*;*
(2) $\mathscr{W}(a) \cup \mathscr{W}(b) = \mathscr{W}(a \vee b)$*;*
(3) $\mathscr{W}(a \wedge b) = \mathscr{W}(a) \cap \mathscr{W}(b)$*;*
(4) $\mathscr{W}(a^*) = \mathsf{S}(A) \setminus \mathscr{W}(a)$*;*
(5) $\mathscr{W}(a) \subseteq \mathscr{W}(b)$ *se e solo se* $a \leq b$*.*

Dimostrazione. (1) Ovvio.

(3) Sia $\mathfrak{U} \in \mathscr{W}(a) \cap \mathscr{W}(b)$; allora $a \in \mathfrak{U}$ e $b \in \mathfrak{U}$; quindi $a \wedge b \in \mathfrak{U}$ e $\mathfrak{U} \in \mathscr{W}(a \wedge b)$. Viceversa, sia $\mathfrak{U} \in \mathscr{W}(a \wedge b)$; allora $a \geq a \wedge b \in \mathfrak{U}$ e $a \in \mathfrak{U}$; analogamente $b \in \mathfrak{U}$.

(4) Supponiamo $a \leq b$; allora $\mathscr{W}(a) = \mathscr{W}(a \wedge b) = \mathscr{W}(a) \cap \mathscr{W}(b)$ e quindi $\mathscr{W}(a) \subseteq \mathscr{W}(b)$. Viceversa, supponiamo $a \nleq b$; allora $b \vee a^* \neq 1$, altrimenti

$$b \vee a = (b \vee a) \wedge 1 = (b \vee a) \wedge (b \vee a^*) = b \vee (a \wedge a^*) = b \vee 0 = b$$

cioè $a \leq b$. Di conseguenza, esiste un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ tale che $a \vee b^* \notin \mathfrak{U}$. Pertanto, $a \notin \mathfrak{U}$ e $b^* \notin \mathfrak{U}$, quindi $b \in \mathfrak{U}$.

(2) e (5) Esercizio. □

Conseguenza di questo lemma è che gli insiemi $\mathscr{W}(a)$ formano una base per una topologia su $\mathsf{S}(A)$. L'insieme $\mathsf{S}(A)$ con questa topologia si dice lo *spazio booleano* di A.

Osservazione 10.12. Abbiamo in realtà definito due volte la stessa cosa. Infatti l'applicazione $\iota\colon \operatorname{Spec}(A) \to \mathsf{S}(A)$ definita da $\iota(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^*$ è un omeomorfismo. In particolare, abbiamo che $\mathsf{S}(A)$ *è uno spazio booleano*. □

In base a questa osservazione, possiamo definire, dato un omomorfismo $\varphi\colon A \to B$ di anelli booleani, un'applicazione continua $\mathsf{S}(\varphi)\colon \mathsf{S}(B) \to \mathsf{S}(A)$, ponendo, per $\mathfrak{U} \in \mathsf{S}(B)$,

$$\mathsf{S}(\varphi)(\mathfrak{U}) = \varphi^{\leftarrow}(\mathfrak{U}).$$

Abbiamo anche subito l'analogo del teorema 8.13.

Teorema 10.13. *Sia $\varphi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli; allora l'applicazione*

$$\mathsf{S}(\varphi) = \varphi^{\sharp}\colon \mathsf{S}(B) \to \mathsf{S}(A)$$

definita da $\varphi^{\sharp}(U) = \varphi^{\leftarrow}(U)$ è continua. Inoltre, se $\psi\colon B \to C$ è un altro omomorfismo di anelli, $\mathsf{S}(\psi \circ \varphi) = \mathsf{S}(\varphi) \circ \mathsf{S}(\psi)$. Vale anche che $\mathsf{S}(id_A) = id_{\mathsf{S}(A)}$. □

Esercizi

10.1. Gli ideali primi in $\mathbf{Z}$ sono $0\mathbf{Z}$ e $p\mathbf{Z}$, per p numero primo. Quali sono gli ideali massimali?

10.2. Sia X uno spazio topologico e sia $C(X)$ l'insieme delle funzioni continue $X \to \mathbf{R}$. Se $f, g \in C(X)$ definiamo $f + g\colon x \mapsto f(x) + g(x)$ e $fg\colon x \mapsto f(x)g(x)$. Allora $C(X)$ è un anello commutativo. Possiamo perciò considerare $\operatorname{Max}(C(X))$. Dimostrare che, per $x \in X$, l'ideale $\mathfrak{m}_x = \{ f \in C(X) : f(x) = 0 \}$ è un ideale massimale e che l'applicazione $\omega_X\colon X \to \operatorname{Max}(C(X))$ definita da $\omega_X(x) = \mathfrak{m}_x$ è continua. (Per dimostrare la massimalità di $\mathfrak{m}_x$, si dimostri che $f \mapsto f(x)$ è un omomorfismo $C(X) \to \mathbf{R}$, con nucleo $\mathfrak{m}_x$.)

10.3. Sia X uno spazio compatto; allora ω_X è un omeomorfismo tra X e $\operatorname{Max}(C(X))$. Infatti:

(a) se $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di $C(X)$, si consideri $U = \{ x \in X : f(x) = 0, \text{per ogni } f \in \mathfrak{m} \}$; se U è vuoto, per ogni $x \in X$, esiste $f_x \in \mathfrak{m}$ tale che $f_x(x) \neq 0$; essendo f_x continua, esiste un intorno aperto U_x di x dove f_x non si annulla; allora $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$, perché X è compatto; ne segue che $f = f_{x_1}^2 + \dots + f_{x_n}^2 \in C(X)$ e $f(x) \neq 0$, per ogni $x \in X$; ora $f \in \mathfrak{m}$ ed è invertibile nell'anello $C(X)$; ne segue che $U \neq \emptyset$; se $x \in U$, si ha $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$;

(b) per l'iniettività, si deve usare il *lemma di Urysohn*: se $x, y \in X$ e $x \neq y$, esiste $f \in C(X)$ tale che $f(x) \neq f(y)$ (la dimostrazione del lemma non è richiesta: è piuttosto complicata!);
(c) basta ora provare che ω_X è continua e che $\mathrm{Max}(C(X))$ è di Hausdorff.

11. La dualità di Stone

La dualità di Stone consiste, inizialmente, nell'osservazione che ad ogni algebra di Boole A è possibile associare uno spazio booleano $\mathsf{S}(A)$ e, ad ogni spazio booleano X un'algebra di Boole $\mathsf{B}(X)$. Dimostreremo che $\mathsf{B}(\mathsf{S}(A))$ è isomorfa ad A e $\mathsf{S}(\mathsf{B}(X))$ è omeomorfo a X. Questo permette di dimostrare fatti algebrici usando metodi topologici.

Facciamo un riassunto di quanto provato in precedenza.

(1) Se A è un'algebra di Boole, allora $\mathsf{S}(A)$ è uno spazio booleano.
(2) Se $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo di algebre di Boole, allora $\mathsf{S}(\varphi)\colon \mathsf{S}(B) \to \mathsf{S}(A)$ è un'applicazione continua.
(3) Se $\varphi\colon A \to B$ e $\psi\colon B \to C$ sono omomorfismi di algebre di Boole, allora $\mathsf{S}(\psi \circ \varphi) = \mathsf{S}(\varphi) \circ \mathsf{S}(\psi)$.
(4) Se A è un'algebra di Boole, allora $\mathsf{S}(id_A) = id_{\mathsf{S}(A)}$.
(5) Se X è uno spazio booleano, allora $\mathsf{B}(X)$ è un'algebra di Boole.
(6) Se $f\colon X \to Y$ è un'applicazione continua, allora $\mathsf{B}(f)\colon \mathsf{B}(Y) \to \mathsf{B}(X)$ è un omomorfismo di algebre di Boole.
(7) Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ sono applicazioni continue, allora $\mathsf{B}(g \circ f) = \mathsf{B}(f) \circ \mathsf{B}(g)$.
(8) Se X è uno spazio booleano, allora $\mathsf{B}(id_X) = id_{\mathsf{B}(X)}$.

Dimostriamo ora la prima parte della dualità di Stone: ogni spazio booleano X è omeomorfo allo spazio di Stone di un anello booleano e precisamente dell'anello booleano $\mathsf{B}(X)$.

Teorema 11.1. *Sia X uno spazio booleano. Allora esiste un omeomorfismo $\omega_X\colon X \to \mathsf{S}(\mathsf{B}(X))$.*

Dimostrazione. Definiamo

$$\omega_X(x) = \hat{x} = \{\, U \in \mathsf{B}(X) : x \in U \,\}.$$

È chiaro che $\hat{x}$ è un filtro in $\mathsf{B}(X)$; è anche un ultrafiltro perché, se $U \in \mathsf{B}(X)$, abbiamo $x \in U$ oppure $x \notin U$, cioè $U \in \hat{x}$ oppure $U \notin \hat{x}$.

Verifichiamo che ω_X è iniettiva. Infatti, se $x \neq y$, sappiamo che esiste $U \in \mathsf{B}(X)$ tale che $x \in U$ e $y \notin U$. Ma allora $U \in \hat{x}$ e $U \notin \hat{y}$ e quindi $\hat{x} \neq \hat{y}$.

Dimostriamo ora che ω_X è continua. È sufficiente dimostrare che $\omega_X^{\leftarrow}(\mathscr{W}(U))$ è aperto in X, per ogni $U \in \mathsf{B}(X)$. Ma

$$\omega_X^{\leftarrow}(\mathscr{W}(U)) = \{\, x \in X : \hat{x} \in \mathscr{W}(U) \,\} = \{\, x \in X : U \in \hat{x} \,\} = U.$$

Per finire dimostriamo che l'immagine di ω_X è densa in $\mathsf{S}(\mathsf{B}(X))$, cioè che ha intersezione non vuota con ogni aperto non vuoto di $\mathsf{S}(\mathsf{B}(X))$. Ovviamente è sufficiente verificarlo per gli aperti non vuoti della forma $\mathscr{W}(U)$, dove $U \in \mathsf{B}(X)$. Ora, dire che $\mathscr{W}(U) \neq \emptyset$, equivale a dire che $U = \emptyset$, per il lemma 10.11. Se $x \in U \neq \emptyset$, allora $\hat{x} \in \mathscr{W}(U)$, per definizione.

Ciò che abbiamo visto dice allora che la chiusura dell'immagine di ω_X è $\mathsf{S}(\mathsf{B}(X))$. Ma X è compatto, quindi $\omega_X^{\rightarrow}(X)$ è compatta, dunque chiusa in $\mathsf{S}(\mathsf{B}(X))$. Ne concludiamo che ω_X è suriettivo.

Abbiamo allora un'applicazione continua e biiettiva di uno spazio compatto in uno spazio di Hausdorff. Perciò ω_X è un omeomorfismo per 7.15. □

Veniamo alla seconda parte della dualità di Stone: ogni anello booleano A è isomorfo all'anello booleano $\mathsf{B}(X)$, per un opportuno spazio booleano X; precisamente A è isomorfo a $\mathsf{B}(\mathsf{S}(A))$.

Cominciamo con un lemma, che è una versione "modulo 2" del famoso teorema di Stone-Weierstrass: se un'algebra A di funzioni reali continue su uno spazio compatto X contiene le funzioni costanti e separa i punti (cioè, dati $x, y \in X$, con $x \neq y$, esiste $f \in A$ tale che $f(x) \neq f(y)$), allora ogni funzione reale e continua su X è limite uniforme di funzioni in A. Il teorema fu dapprima dimostrato da Weierstrass nella forma: ogni funzione reale e continua sull'intervallo chiuso $[a, b]$ è limite uniforme di polinomi. Altre versioni di questo teorema sono utili, ad esempio per l'analisi di Fourier.

Per rafforzare la somiglianza con il teorema di Stone-Weierstrass, enunciamo il lemma seguente per $\mathsf{C}(X)$. Occorre ricordare poi che $\mathsf{C}(X)$ è isomorfo a $\mathsf{B}(X)$. Qui la condizione "A contiene le costanti" diventa banale e "A separa i punti" diventa quella dell'enunciato seguente; infatti, la funzione $1 - f$ vale 0 su x e 1 su y e $1 - f \in A$, se $f \in A$.

Lemma 11.2. *Sia X uno spazio booleano e sia B un sottoanello di $\mathsf{C}(X)$ tale che, dati $x, y \in X$, con $x \neq y$, esiste $g \in B$ tale che $g(x) = 1$ e $g(y) = 0$. Allora $B = \mathsf{C}(X)$.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathsf{C}(X)$; se $f = 0$, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $f \neq 0$ e poniamo $U = f^{\leftarrow}(\{0\})$. Fissiamo $x \in X$ tale che $f(x) = 1$. Per ogni $y \in U$, esiste $g_y \in B$ tale che $g_y(x) = 1$ e $g_y(y) = 0$. Allora gli insiemi $g_y^{\leftarrow}(\{0\})$ formano un ricoprimento aperto di U, che è compatto, quindi esistono $y_1, y_2, \dots, y_n \in U$ tali che

$$U \subseteq g_{y_1}^{\leftarrow}(\{0\}) \cap g_{y_2}^{\leftarrow}(\{0\}) \cap \dots \cap g_{y_n}^{\leftarrow}(\{0\}).$$

Sia $h_x = g_{y_1} g_{y_2} \dots g_{y_n}$; allora $h_x \in B$ e $h_x(x) = 1$, $h_x(y) = 0$, per ogni $y \in U$.

Gli insiemi $h_x^{\leftarrow}(\{1\})$ formano un ricoprimento aperto di $X \setminus U$, che è compatto. Esistono allora $x_1, x_2, \dots, x_m \in X \setminus U$ tali che

$$X \setminus U \subseteq h_{x_1}^{\leftarrow}(\{1\}) \cap h_{x_2}^{\leftarrow}(\{1\}) \cap \dots \cap h_{x_m}^{\leftarrow}(\{1\}).$$

Poniamo $h = h_{x_1} \vee h_{x_2} \vee h_{x_m}$; allora $h \in B$. Se $x \in X \setminus U$, abbiamo

$$h(x) = h_{x_1}(x) \vee h_{x_2}(x) \vee h_{x_m}(x) = 1;$$

se $y \in U$, abbiamo

$$h(y) = h_{x_1}(y) \vee h_{x_2}(y) \vee h_{x_m}(y) = 0.$$

In definitiva $f = h \in B$. □

Questo lemma è un passo chiave per la dimostrazione del teorema seguente. Tuttavia ci occorrerà la versione per $\mathsf{B}(X)$.

Lemma 11.3. *Sia X uno spazio booleano e sia B un sottoanello di $\mathsf{B}(X)$ tale che, dati $x, y \in X$, con $x \neq y$, esiste $U \in B$ tale che $x \in U$ e $y \notin U$. Allora $B = \mathsf{B}(X)$.*

Dimostrazione. Basta ricordare come è definito l'isomorfismo tra $\mathsf{C}(X)$ e $\mathsf{B}(X)$. □

Teorema 11.4. *Sia A un anello booleano. Allora esiste un isomorfismo di anelli booleani $\omega_A \colon A \to \mathsf{B}(\mathsf{S}(A))$.*

Dimostrazione. Definiamo, per $a \in A$,

$$\omega_A(a) = \mathscr{W}(a) = \{\, \mathfrak{U} \in \mathsf{S}(A) : a \in \mathfrak{U} \,\}.$$

Di fatto, sappiamo che $\omega_A(a) = \mathscr{W}(a)$ è un chiusaperto. Dunque ω_A è ben definito.

Il lemma 10.11 dimostra che ω_A è un omomorfismo di algebre di Boole.

Sia $a \in \ker \omega_A$ =: allora $\omega_A(a) = \emptyset$, cioè nessun ultrafiltro su A contiene a. Questo implica $a = 0$.

Per dimostrare che ω_A è suriettivo, basta vedere che $\omega_A^{\to}(A)$ soddisfa le ipotesi del lemma 11.3.

È chiaro che $\omega_A^{\to}(A)$ è un sottoanello di $\mathsf{B}(\mathsf{S}(A))$. Dobbiamo verificare che, dati $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \mathsf{S}(A)$, $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{V}$, esiste $a \in A$ tale che $\mathfrak{U} \in \omega_A(a)$ e $\mathfrak{V} \notin \omega_A(a)$. Questo equivale a cercare $a \in A$ tale che $a \in \mathfrak{U}$ e $a \notin \mathfrak{V}$. □

Notiamo che la corrispondenza così stabilita va "all'indietro", cioè rovescia la direzione delle frecce. Tuttavia, se applichiamo il B a $\mathsf{S}(\psi)$, otteniamo un omomorfismo $\mathsf{B}(\mathsf{S}(\psi)) \colon \mathsf{B}(\mathsf{S}(A)) \to \mathsf{B}(\mathsf{S}(B))$. Analogamente avremo $\mathsf{S}(\mathsf{B}(f)) \colon \mathsf{S}(\mathsf{B}(X)) \to \mathsf{S}(\mathsf{B}(Y))$.

Teorema 11.5. *Siano $\psi \colon A \to B$ un omomorfismo di anelli booleani e $f \colon X \to Y$ un'applicazione continua di spazi booleani. Allora i diagrammi*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\omega_A} & \mathsf{B}(\mathsf{S}(A)) \\ {\scriptstyle\psi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{B}(\mathsf{S}(\psi))} \\ B & \xrightarrow{\omega_B} & \mathsf{B}(\mathsf{S}(B)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\omega_X} & \mathsf{S}(\mathsf{B}(X)) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{S}(\mathsf{B}(f))} \\ Y & \xrightarrow{\omega_Y} & \mathsf{S}(\mathsf{B}(Y)) \end{array}$$

sono commutativi, cioè $\omega_B \circ \psi = \mathsf{B}(\mathsf{S}(\psi)) \circ \omega_A$ e $\omega_Y \circ f = \mathsf{S}(\mathsf{B}(f)) \circ \omega_X$.

Inoltre $\mathsf{S}(\omega_A) \circ \omega_{\mathsf{S}(A)} = id_{\mathsf{S}(A)}$ e $\mathsf{B}(\omega_X) \circ \omega_{\mathsf{B}(X)} = id_{\mathsf{B}(X)}$, cioè i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{S}(A) & \xrightarrow{\omega_{\mathsf{S}(A)}} & \mathsf{S}(\mathsf{B}(\mathsf{S}(A))) \\ & {\scriptstyle id_{\mathsf{S}(A)}}\searrow & \big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{S}(\omega_A)} \\ & & \mathsf{S}(A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{B}(X) & \xrightarrow{\omega_{\mathsf{B}(X)}} & \mathsf{B}(\mathsf{S}(\mathsf{B}(X))) \\ & {\scriptstyle id_{\mathsf{B}(X)}}\searrow & \big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{B}(\omega_X)} \\ & & \mathsf{B}(X) \end{array}$$

sono commutativi.

Dimostrazione. Esercizio. □

12. Applicazioni

Studiamo alcuni fatti importanti legati alla dualità di Stone.

Lemma 12.1. *Sia A un sottoanello dell'anello booleano B. Se $A \neq B$ e $\varphi\colon A \to \mathbf{2}$ è un omomorfismo, esistono un sottoanello C di B, con $A \subset C \subseteq B$ ed un omomorfismo $\psi\colon C \to \mathbf{2}$ che ristretto ad A coincide con φ.*

Dimostrazione. Sia $b \in B \setminus A$. Consideriamo $I = \{ x \in A : x \leq b \}$; abbiamo due casi: (1) $\varphi(x) = 0$, per ogni $x \in I$, oppure $\varphi(\bar{x}) = 1$ per un $\bar{x} \in I$.

Supponiamo di essere nel primo caso. L'insieme

$$A + bA = \{ x + by : x, y \in A \}$$

è un sottoanello di B che contiene propriamente A (esercizio). Definiamo $\psi\colon A + bA \to \mathbf{2}$ ponendo $\psi(x + by) = \varphi(x)$. Se dimostriamo che questa è una "buona definizione", cioè che non dipende dal particolare modo di scrivere un elemento in $A + bA$, è chiaro che abbiamo un omomorfismo di anelli, e quindi la tesi.

Sia $x_1 + by_1 = x_2 + by_2$; allora $x_1 + x_2 = b(y_1 + y_2)$ e quindi $x_1 + x_2 \leq b$, da cui $x_1 + x_2 \in I$. Segue dall'ipotesi che $\varphi(x_1 + x_2) = 0$, cioè che $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

Supponiamo di essere nel secondo caso. Poiché $\varphi(\bar{x}) = 1$ e $\bar{x} \leq b$, per ogni $z \in A$, con $z \geq b$, abbiamo necessariamente $\varphi(z) \geq \varphi(\bar{x}) = 1$. Quindi $\varphi(z) = 1$. Ma allora, se $J = \{ x \in A : x \leq b^* \}$, abbiamo che, per ogni $x \in J$, $\varphi(x) = 0$. Infatti $x \leq b^*$ vale se e solo se $1 + x = x^* \geq b$. Dunque $1 = \varphi(1 + x) = 1 + \varphi(x)$ e $\varphi(x) = 0$. Perciò ci siamo ridotti al caso precedente. □

Teorema 12.2. *Sia A un sottoanello dell'anello booleano B. Se $A \neq B$ e $\varphi\colon A \to \mathbf{2}$ è un omomorfismo, esiste un omomorfismo $\psi\colon B \to \mathbf{2}$ che ristretto ad A coincide con φ.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{A}$ l'insieme delle coppie (C, ψ), dove C è un sottoanello di B contenente A e $\psi\colon C \to \mathbf{2}$ è un omomorfismo che ristretto ad A coincide con φ. Ordiniamo $\mathfrak{A}$ ponendo $(C', \psi') \leq (C'', \psi'')$ quando $C' \subseteq C''$ e ψ'' ristretto a C' coincide con ψ': che questo sia un ordine parziale è evidente.

Sia $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ una catena e consideriamo C, unione delle prime componenti degli elementi di $\mathfrak{B}$; è ovvio che C è un sottoanello di B: infatti le condizioni da verificare riguardano al massimo due elementi e, dati $x, y \in C$, esiste $(C', \psi') \in Y$ tale che $x, y \in C'$. Possiamo definire un'applicazione

$\psi\colon C \to \mathbf{2}$ ponendo $\psi(x) = \psi'(x)$, dove $(C', \psi') \in \mathfrak{B}$ è tale che $x \in C'$. Poiché $\mathfrak{B}$ è una catena, ψ è ben definito ed è un omomorfismo. In definitiva $(C, \psi) \in \mathfrak{A}$ ed è un maggiorante della catena.

Per il lemma di Zorn, $\mathfrak{A}$ ammette un elemento massimale (B_0, ψ). Ma il lemma precedente impone che $B_0 = B$: l'esistenza di $b \in B \setminus B_0$ contraddice infatti la massimalità. $\square$

12.3. Cerchiamo di caratterizzare gli omomorfismi iniettivi o suriettivi di anelli booleani senza usare gli elementi.

Chiamiamo *mono* un omomorfismo $\varphi\colon A \to B$ con la seguente proprietà:

> se $\chi, \psi\colon C \to A$ sono omomorfismi di anelli booleani e $\varphi \circ \chi = \varphi \circ \psi$, allora $\chi = \psi$.

È chiaro che ogni omomorfismo iniettivo è mono. Supponiamo viceversa che φ sia mono e sia $a \in \ker\varphi$. Allora $C = \{0, a, a^*, 1\}$ è un sottoanello di A. Chiamiamo χ l'inclusione di C in A e definiamo $\psi\colon C \to A$ con $\psi(0) = \psi(a) = 0$ e $\psi(a^*) = \psi(1) = 1$. Allora χ e ψ sono omomorfismi e $\varphi \circ \chi = \varphi \circ \psi$. Ma allora $\chi = \psi$ e quindi $a = 0$. Dunque φ è iniettivo.

Chiamiamo *epi* un omomorfismo $\varphi\colon A \to B$ con la seguente proprietà:

> se $\chi, \psi\colon B \to C$ sono omomorfismi di anelli booleani e $\chi \circ \varphi = \psi \circ \varphi$, allora $\chi = \psi$.

È chiaro che ogni omomorfismo suriettivo è epi. Rimanderemo a più tardi la dimostrazione che un epi è suriettivo.[2]

Ci limitiamo ad osservare che, dato $\varphi\colon A \to B$, possiamo sempre considerare $\bar{A} = \varphi^{\to}(A)$ e fattorizzare $\varphi = j \circ \bar{\varphi}$, dove $\bar{\varphi}\colon A \to \bar{A}$ è definito in modo ovvio e $j\colon \bar{A} \to B$ è l'inclusione; entrambi sono omomorfismi. Allora φ è epi se e solo se j è epi (esercizio). $\square$

12.4. Cerchiamo di caratterizzare le applicazioni continue iniettive o suriettive di spazi booleani senza usare gli elementi.

Chiamiamo *mono* un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ con la seguente proprietà:

> se $g, h\colon Z \to X$ sono applicazioni continue di spazi booleani e $f \circ g = f \circ h$, allora $g = h$.

È chiaro che ogni applicazione iniettiva è mono. Viceversa, sia f mono e siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Allora il sottospazio $Z = \{x_1, x_2\}$ di X è uno spazio booleano e possiamo definire $g\colon Z \to X$ con $g(x_1) = x_1$, $g(x_2) = x_2$ e ancora $h\colon Z \to X$ con $h(x_1) = h(x_2) = x_2$. Entrambe sono applicazioni continue e $f \circ g = f \circ h$. Ne segue che $g = h$ e quindi $x_1 = x_2$, cioè f è iniettiva.

Chiamiamo *epi* un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ con la seguente proprietà:

> se $g, h\colon Y \to Z$ sono applicazioni continue di spazi booleani e $g \circ f = h \circ f$, allora $g = h$.

È chiaro che ogni applicazione suriettiva è epi. Viceversa, sia f epi e supponiamo $f^{\to}(X) \neq Y$. Allora esiste $y \in Y \setminus f^{\to}(X)$. Per 9.3, esiste un chiusaperto U di Y tale che $y \notin U$ e $f^{\to}(X) \subseteq U$.

---

[2] Devo ammettere che ho cercato a lungo una dimostrazione di questo fatto che non usi la dualità di Stone; non ci sono riuscito.

Definiamo ora un nuovo spazio topologico Z: poniamo $Z = (Y \setminus U) \cup \{\infty\}$, dove ∞ è un elemento non in Y. Vogliamo definire una topologia $\mathscr{T}$ su Z che lo renda uno spazio booleano.

Diciamo che un sottoinsieme V di Z è in $\mathscr{T}$ se $V \setminus \{\infty\}$ è aperto in Y: questo ha senso perché $V \setminus \{\infty\} \subseteq Y$.

Verifichiamo le proprietà (Ap-1–4). Che $\emptyset$ e Z siano aperti è ovvio. Siano V_1 e V_2 aperti: allora

$$(V_1 \cap V_2) \setminus \{\infty\} = (V_1 \setminus \{\infty\}) \cap (V_2 \setminus \{\infty\})$$

è aperto in Y. Se $\mathscr{X}$ è un sottoinsieme di $\mathscr{T}$, allora

$$(\bigcup \mathscr{X}) \setminus \{\infty\} = \bigcup \{\, V \setminus \{\infty\} : V \in \mathscr{X} \,\}$$

è aperto in Y. Che Z sia uno spazio booleano è lasciato per esercizio.

Possiamo definire ora due applicazioni $g\colon Y \to Z$ e $h\colon Y \to Z$: $g(y) = \infty$, se $y \in U$ e $g(y) = y$ se $y \notin U$; $h(y) = \infty$, per ogni $y \in Y$. Si verifichi che g e h sono applicazioni continue.

Ora, è chiaro che $g \circ f = h \circ f$, quindi, per ipotesi, $g = h$. Ne segue che $U = Y$, cioè $f^{\to}(X) = Y$ e f è suriettivo. □

Il vantaggio di queste formulazioni dovebbe essere evidente una volta che si esamini (e si completi) la dimostrazione del teorema che segue. Prima però occorre un lemma.

Lemma 12.5. *Siano $\varphi_1, \varphi_2\colon A \to B$ omomorfismi di anelli booleani. Allora $\varphi_1 = \varphi_2$ se e solo se $\mathsf{S}(\varphi_1) = \mathsf{S}(\varphi_2)$.*

Siano $f_1, f_2\colon X \to Y$ applicazioni continue di spazi booleani. Allora $f_1 = f_2$ se e solo se $\mathsf{B}(f_1) = \mathsf{B}(f_2)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathsf{S}(\varphi_1) = \mathsf{S}(\varphi_2)$; allora $\mathsf{B}(\mathsf{S}(\varphi_1)) = \mathsf{B}(\mathsf{S}(\varphi_2))$ e quindi

$$\varphi_1 = \omega_B^{-1} \circ \mathsf{B}(\mathsf{S}(\varphi_1)) \circ \omega_A = \omega_B^{-1} \circ \mathsf{B}(\mathsf{S}(\varphi_2)) \circ \omega_A = \varphi_2.$$

La seconda asserzione si dimostra allo stesso modo. □

Teorema 12.6. *Sia $\varphi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli booleani; allora:*

(1) *φ è iniettivo se e solo se $\mathsf{S}(\varphi)\colon \mathsf{S}(B) \to \mathsf{S}(A)$ è suriettivo;*

(2) *φ è suriettivo se e solo se $\mathsf{S}(\varphi)\colon \mathsf{S}(B) \to \mathsf{S}(A)$ è iniettivo.*

Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua di spazi booleani; allora:

(3) *f è iniettiva se e solo se $\mathsf{B}(f)\colon \mathsf{B}(Y) \to \mathsf{B}(X)$ è suriettiva;*

(4) *f è suriettiva se e solo se $\mathsf{B}(f)\colon \mathsf{B}(Y) \to \mathsf{B}(X)$ è iniettiva.*

Dimostrazione. (1 ($\Rightarrow$)) Siccome φ è iniettivo, esso è mono. Allora $f = \mathsf{S}(\varphi)$ è epi: infatti, se $g, h\colon \mathsf{S}(A) \to Z$ sono applicazioni continue di spazi booleani tali che $g \circ f = h \circ f$, possiamo applicare B, ottenendo che $\mathsf{B}(f) \circ \mathsf{B}(g) = \mathsf{B}(f) \circ \mathsf{B}(h)$ e quindi

$$\varphi \circ \omega_A^{-1} \circ \mathsf{B}(g) = \varphi \circ \omega_A^{-1} \circ \mathsf{B}(h).$$

Poiché φ è mono, otteniamo

$$\omega_A^{-1} \circ \mathsf{B}(g) = \omega_A^{-1} \circ \mathsf{B}(h)$$

e quindi $\mathsf{B}(g) = \mathsf{B}(h)$. Ma allora $g = h$, per il lemma precedente. Poiché allora $\mathsf{S}(\varphi)$ è epi, è suriettiva.

(2 ($\Rightarrow$)), (3 ($\Rightarrow$)) e (4 ($\Rightarrow$)) si dimostrano allo stesso modo.

(1 ($\Leftarrow$)) Supponiamo $\mathsf{S}(\varphi)$ suriettiva. Allora $\mathsf{B}(\mathsf{S}(\varphi))$ è iniettiva, per la (4 ($\Rightarrow$)). Poiché $\varphi = \omega_B^{-1} \circ \mathsf{BS}(\varphi) \circ \omega_A$, abbiamo la tesi.

(3 ($\Leftarrow$)) e (4 ($\Leftarrow$)) si dimostrano allo stesso modo.

(2 ($\Leftarrow$)) Supponiamo $\mathsf{S}(\varphi)$ iniettivo. Allora $\mathsf{S}(\varphi)$ è mono, quindi $\mathsf{S}(\varphi)$ è epi. Ci basta allora vedere che un epi iniettivo è un isomorfismo, per l'osservazione fatta prima. Sia $\varphi\colon A \to B$ un epi iniettivo; allora $\mathsf{S}(\varphi)$ è mono e epi, quindi biiettivo. Dunque $\mathsf{S}(\varphi)$ è un'applicazione continua e biiettiva di un compatto in un Hausdorff, quindi è un omeomorfismo. Ne segue che $g = (\mathsf{S}(\varphi))^{-1}$ è continua e $\mathsf{S}(\varphi) \circ g = id$. Ma allora $\mathsf{B}(g) \circ \mathsf{B}(\mathsf{S}(\varphi)) = id_{\mathsf{B}(\mathsf{S}(A))}$ e quindi

$$\mathsf{B}(g) \circ \omega_B \circ \varphi \circ \omega_A^{-1} = id_{\mathsf{B}(\mathsf{S}(A))}.$$

Basta allora dimostrare che $\mathsf{B}(g)$ è un isomorfismo. Tuttavia sappiamo già che $\mathsf{B}(\mathsf{S}(\varphi))$ è un'inversa sinistra di $\mathsf{B}(g)$. Inoltre

$$\mathsf{B}(g) \circ \mathsf{B}(\mathsf{S}(\varphi)) = \mathsf{B}(\mathsf{S}(\varphi) \circ g) = \mathsf{B}(id) = id.$$

La dimostrazione è conclusa. □

Un'applicazione importante della dualità di Stone è che ogni algebra di Boole è (isomorfa ad) una sottoalgebra di $\mathsf{P}(E)$, per un opportuno insieme E.

Teorema 12.7. *Sia A un anello booleano. Esistono allora un insieme X ed un omomorfismo iniettivo di anelli booleani $j\colon A \to \mathsf{P}(X)$.*

Dimostrazione. Sia $X = \mathsf{S}(A)$. Allora $\omega_A\colon A \to \mathsf{B}(X)$ è un isomorfismo, e $\mathsf{B}(X)$ è chiaramente un sottoanello di $\mathsf{P}(X)$. □

Definizione 12.8. Un'algebra di Boole si dice *completa* se ogni sottoinsieme di A ha estremo superiore. □

Può sembrare che la definizione data sia asimmetrica. Usando la dualità (o l'esercizio 9.4) si dimostra subito l'asserzione seguente.

Proposizione 12.9. *Un'algebra di Boole è completa se e solo se ogni suo sottoinsieme ha estremo inferiore.* □

Vogliamo vedere quale proprietà topologica corrisponde alla completezza.

Definizione 12.10. Uno spazio topologico X si dice *estremamente sconnesso* se la chiusura di ogni aperto in X è un aperto (in particolare un chiusaperto). □

Proposizione 12.11. *Sia X uno spazio topologico estremamente sconnesso; allora X è totalmente sconnesso.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$, con $x \neq y$. Allora esiste un aperto U contenente x ma non y. Ne segue che $y \notin \mathrm{Cl}(U)$ e quindi abbiamo ottenuto una separazione di x e y. □

Teorema 12.12. *Un'algebra di Boole A è completa se e solo se $\mathsf{S}(A)$ è estremamente sconnesso.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia U un aperto di $\mathsf{S}(A)$; poniamo $E = \{ a \in A : \mathscr{W}(a) \subseteq U \}$. Allora $U = \bigcup\{ \mathscr{W}(a) : a \in E \}$, perché gli insiemi $\mathscr{W}(a)$ formano una base della topologia di $\mathsf{S}(A)$.

Essendo A completa, esiste $s = \sup E$. Affermiamo che $\mathrm{Cl}(U) = \mathscr{W}(s)$: ciò proverà la tesi.

Per prima cosa, se $\mathscr{W}(a) \subseteq U$, allora $a \leq s$ e quindi $\mathscr{W}(a) \subseteq \mathscr{W}(s)$. Quindi $U \subseteq \mathscr{W}(s)$ e, di conseguenza, $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathscr{W}(s)$.

Supponiamo, per assurdo, che $\mathscr{W}(s) \setminus \mathrm{Cl}(U) \neq \emptyset$. Allora l'aperto $\mathscr{W}(s) \setminus \mathrm{Cl}(U)$ contiene un chiusaperto non vuoto V. Quindi $\mathscr{W}(s) \setminus V$ è un chiusaperto che contiene U ed esiste $t \in A$ tale che $\mathscr{W}(s) \setminus V = \mathscr{W}(t)$. Ne segue che $t < s$ e, per ogni $a \in E$, $a \leq t$, perché $\mathscr{W}(a) \subseteq \mathscr{W}(t)$: assurdo.

($\Leftarrow$) Sia $E \subseteq A$; allora $U = \bigcup\{ \mathscr{W}(a) : a \in E \}$ è aperto in $\mathsf{S}(A)$. Perciò la sua chiusura è un chiusaperto di $\mathsf{S}(A)$, dunque $\mathrm{Cl}(U) = \mathscr{W}(s)$, per un opportuno $s \in A$. Per $a \in E$, $\mathscr{W}(a) \subseteq \mathscr{W}(s)$, quindi $a \leq s$. Perciò s è un maggiorante di E. Se t è un maggiorante di E, abbiamo che $\mathscr{W}(t)$ è un chiusaperto che contiene U, quindi anche $\mathrm{Cl}(U) = \mathscr{W}(s)$. Ma allora $s \leq t$. □

Teorema 12.13. *Sia A un anello booleano finito. Allora A è isomorfo a $\mathsf{P}(\mathsf{S}(A))$, in particolare $|A| = 2^{|\mathsf{S}(A)|}$. Due anelli booleani finiti sono isomorfi se e solo se hanno la stessa cardinalità.*

Dimostrazione. Poiché A è finito, $\mathsf{S}(A)$ è finito, quindi discreto. Ma allora $\mathsf{B}(\mathsf{S}(A)) = \mathsf{P}(\mathsf{S}(A))$.

Supponiamo $|A_1| = |A_2|$. Allora

$$|A_1| = 2^{|\mathsf{S}(A_1)|} = 2^{|\mathsf{S}(A_2)|} = |A_2|,$$

quindi $\mathsf{S}(A_1)$ e $\mathsf{S}(A_2)$ sono spazi discreti con la stessa cardinalità e perciò omeomorfi. □

Esempio 12.14. Sia X un insieme infinito. Consideriamo l'algebra di Boole $\mathsf{F}(X)$ dei finiti-cofiniti di X. Abbiamo chiaramente un'applicazione

$$j\colon X \to \mathsf{S}(\mathsf{F}(X))$$

definita, per $x \in X$, da $j(x) = \{ E \in \mathsf{F}(X) : x \in E \}$. Ovviamente $j(x)$ è un elemento di $\mathsf{S}(\mathsf{F}(X))$, cioè un ultrafiltro in $\mathsf{F}(X)$.

Possiamo anche considerare $\mathfrak{U}_\infty$, che consiste dei sottoinsiemi a complementare finito di X. Anche $\mathfrak{U}_\infty$ è un ultrafiltro in $\mathsf{F}(X)$.

Evidentemente, $j(x) \neq \mathfrak{U}_\infty$, per ogni $x \in X$.

Sia $\mathfrak{U} \in \mathsf{S}(\mathsf{F}(X))$; abbiamo due casi.

Primo caso: $E \notin \mathfrak{U}$, per ogni sottoinsieme finito E di X. Allora ogni insieme a complementare finito appartiene a $\mathfrak{U}$ e quindi $\varphi = \varphi_\infty$.

Secondo caso: esiste $E_0 \subseteq X$, E_0 finito, tale che $E_0 \in \mathfrak{U}$. Se $E_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, abbiamo

$$\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\} \in \mathfrak{U}$$

quindi esiste $x \in E_0$ tale che $\{x\} \in \mathfrak{U}$. Facciamo vedere che $\mathfrak{U} = j(x)$.

Sia $E \in \mathsf{F}(X)$; se $x \in E$, è $\{x\} \subseteq E$, quindi $E \in \mathfrak{U}$. Se $x \notin E$, allora $x \in X \setminus E$ e quindi $X \setminus E \in \mathfrak{U}$, da cui $E \notin \mathfrak{U}$.

Abbiamo allora che $\mathsf{S}(\mathsf{F}(X)) = j^{\to}(X) \cup \{\varphi_\infty\}$.

Per esercizio si provi che la topologia indotta da $\mathsf{S}(\mathsf{F}(X))$ su $j^{\rightarrow}(X)$ è discreta e che gli intorni di φ_∞ sono i sottoinsiemi di $\mathsf{S}(\mathsf{F}(X))$ che contengono φ_∞ ed hanno complementare finito. In altre parole $\mathsf{S}(\mathsf{F}(X))$ è omeomorfo alla compattificazione di Aleksandrov dello spazio discreto X (si vedano gli esercizi 12.4 e 12.4). □

Esempio 12.15. Esistono altri modi di "immergere" uno spazio discreto X in uno spazio compatto; invece dell'algebra $\mathsf{F}(X)$ possiamo infatti considerare $\mathsf{P}(X)$ e porre $\beta(X) = \mathsf{S}(\mathsf{P}(X))$, che si chiama *compattificazione di Stone-Čech* di X. L'applicazione di immersione che identifica X con un sottospazio di $\beta(X)$ è

$$k\colon X \to \beta(X), \qquad k\colon x \mapsto k(x) = \{\, E \in \mathsf{P}(X) : x \in E \,\}.$$

Se Y è uno spazio compatto, $f\colon X \to Y$ è un'applicazione iniettiva e Y induce su X la topologia discreta, allora esistono e sono uniche due applicazioni $f_\alpha\colon Y \to \alpha(X)$ e $f_\beta\colon \beta(X) \to Y$ tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd}
& \beta(X) \arrow[d, "f_\beta"] \\
X \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j"'] & Y \arrow[d, "f_\alpha"] \\
& \alpha(X)
\end{tikzcd}$$

cioè $f_\beta \circ k = f$ e $f_\alpha \circ f = j$ (esercizio).

In questo senso quella di Stone-Čech è la "massima" compattificazione di X, mentre quella di Aleksandrov è la "minima". □

Esercizi

12.1. Dimostrare direttamente, usando solo le proprietà "algebriche" della dualità di Stone, che $\varphi\colon A \to B$ è un isomorfismo se e solo se $\mathsf{S}(\varphi)$ è un omeomorfismo.
12.2. Dimostrare direttamente, usando solo le proprietà "algebriche" della dualità di Stone, che $f\colon X \to Y$ è un omeomorfismo se e solo se $\mathsf{B}(f)$ è un isomorfismo.
12.3. Sia X uno spazio localmente compatto, cioè nel quale ogni punto ha almeno un intorno compatto. Sia ∞ un elemento non appartenente a X e definiamo su $\alpha(X) = X \cup \{\infty\}$ una topologia $\mathscr{T}$. Diciamo che un sottoinsieme U di $\alpha(X)$ appartiene a $\mathscr{T}$ se e solo se vale una delle condizioni seguenti:

(a) $\infty \notin U$ e U è aperto in X;
(b) $\infty \in U$ e $\alpha(X) \setminus U$ è compatto in X.

Si dimostri che $\mathscr{T}$ è una topologia e che $\alpha(X)$ è compatto. Si dimostri che $\alpha(X)$ induce su X la topologia originale; inoltre X è denso in $\alpha(X)$ se e solo se X non è compatto. Lo spazio $\alpha(X)$ si chiama *compattificazione di Aleksandrov* di X.
12.4. Sia X un insieme infinito, dotato della topologia discreta. Si provi che $\alpha(X)$ è omeomorfo a $\mathsf{S}(\mathsf{F}(X))$.

13. Algebre libere

Se A è un anello, ogni intersezione di sottoanelli di A è ancora un anello. Perciò, dato $E \subseteq A$, possiamo parlare del sottoanello di A *generato* da E: è l'intersezione di tutti i sottoanelli di A che contengono E.

Ad esempio, se A è un anello booleano e $E = \emptyset$, il sottoanello generato da E è $\{0, 1\}$. Abbiamo in realtà già usato il concetto nell'esercizio 9.2.

Definizione 13.1. Sia E un sottoinsieme dell'anello booleano A. Diremo che E è un *insieme di generatori* di A se il sottoanello di A generato da E è A. Se, inoltre, per ogni anello booleano B ed ogni applicazione $\alpha\colon E \to B$, esiste un omomorfismo di anelli $\varphi\colon A \to B$ che estende α (cioè tale che $\varphi(x) = \alpha(x)$, per ogni $x \in E$), diremo che E è un insieme *libero* di generatori.

Diremo che un anello booleano è *libero* se ammette un insieme libero di generatori. Naturalmente parleremo anche di algebre di Boole libere. □

Esempio 13.2. L'algebra **2** è libera, con $\emptyset$ come insieme libero di generatori. Più in generale, vedremo quali sono le algebre di Boole finite e libere. □

Proposizione 13.3. *Sia E un insieme di generatori dell'anello booleano A e siano $\varphi_1, \varphi_2\colon A \to B$ omomorfismi di anello. Se $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ per ogni $x \in E$, allora $\varphi_1 = \varphi_2$.*

Dimostrazione. L'insieme $\{\, a \in A : \varphi_1(a) = \varphi_2(a) \,\}$ è un sottoanello di A che contiene E (verificare). □

Segue da questo che l'omomorfismo che estende α della definizione 13.1 è unico. Vale anche un viceversa.

Proposizione 13.4. *Sia E un sottoinsieme dell'anello booleano A. Allora E è un insieme libero di generaori di A se e solo se, per ogni anello booleano B ed ogni applicazione $\alpha\colon E \to B$, esiste uno ed un solo omomorfismo $\varphi_\alpha\colon A \to B$ che estende α.*

Dimostrazione. Una direzione è già dimostrata. Per l'altra, sia C il sottoanello di A generato da E. Ci basta verificare che $C = A$.

Poiché $E \subseteq C$, esiste uno ed un solo omomorfismo $\varphi\colon A \to B$ tale che $\varphi(x) = x$, per ogni $x \in E$. Componiamo con l'inclusione $i\colon B \to A$. Allora $i \circ \varphi$ manda ogni elemento di E in sé, come l'identità. Per l'unicità dell'estensione, $i \circ \varphi$ è l'identità, quindi i è suriettiva. □

Il problema che ci poniamo ora è: esistono anelli booleani liberi? La risposta è sì. Anzi, per ogni anello booleano A esistono un anello boleano libero A' ed un omomorfismo suriettivo $A' \to A$.

La dimostrazione di questo fatto può essere data in termini puramente algebrici, ma risulta piuttosto complicata. Avendo a disposizione la dualità di Stone, possiamo caratterizzare invece quali sono gli spazi di Stone di un anello libero.

Se E è un insieme, sappiamo che $\mathbf{2}^E$ è uno spazio booleano. Inoltre esiste un'applicazione *iniettiva* $\lambda_E \colon E \to \mathsf{B}(\mathbf{2}^E)$, definita, per $x \in E$ da

$$\lambda_E(x) = \{\, \alpha \in \mathbf{2}^E : \alpha(x) = 1 \,\} = p_x^{\leftarrow}(\{1\}).$$

Sappiamo infatti che $p_x^{\leftarrow}(\{1\})$ è un chiusaperto di $\mathbf{2}^E$. Che λ_E sia iniettiva è evidente.

Teorema 13.5. *Se E è un insieme non vuoto, $\mathsf{B}(\mathbf{2}^E)$ è un anello booleano libero; un insieme libero di generatori è $\lambda_E^{\rightarrow}(E)$.*

Dimostrazione. Invece di estensioni ad omomorfismi di applicazioni $\alpha \colon \lambda_E^{\rightarrow}(E) \to B$, cercheremo omomorfismi $\psi \colon \mathsf{B}(\mathbf{2}^E) \to B$ tali che $\psi \circ \lambda_E = \alpha$: per l'iniettività di E, questo è irrilevante, ma risulta conveniente tecnicamente.

Sia B un anello booleano e sia $\alpha \colon E \to B$ un'applicazione. Definiamo $f \colon \mathsf{S}(B) \to \mathbf{2}^E$ con

$$f(\mathfrak{U})(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha(x) \in \mathfrak{U}; \\ 0 & \text{se } \alpha(x) \notin \mathfrak{U}. \end{cases} \qquad (\mathfrak{U} \in \mathsf{S}(B),\ x \in E).$$

Dimostriamo che f è continua: basta verificare che, per ogni $x \in E$, l'immagine inversa tramite f di $p_x^{\leftarrow}(\{1\})$ è aperta. Ma

$$f^{\leftarrow}(p_x^{\leftarrow}(\{1\})) = \{\, \mathfrak{U} \in \mathsf{S}(B) : f(\mathfrak{U}) \in p_x^{\leftarrow}(\{1\}) \,\} = \mathscr{W}(\alpha(x)).$$

Possiamo quindi considerare $\mathsf{B}(f) \colon \mathsf{B}(2^E) \to \mathsf{B}(\mathsf{S}(B))$ e $\psi = \omega_B^{-1} \circ \mathsf{B}(f) \colon \mathsf{B}(2^E) \to B$. Vogliamo verificare che, per $x \in E$, $\psi \circ \lambda_E(x) = \alpha(x)$, cioè che $\mathsf{B}(f) \circ \lambda_E = \omega_B \circ \alpha$. Sia $x \in E$: allora

$$\begin{aligned}(\mathsf{B}(f) \circ \lambda_E)(x) = \mathsf{B}(f)(\lambda_E(x)) = f^{\leftarrow}(\lambda_E(x)) = \\ = \{\, \mathfrak{U} \in \mathsf{S}(B) : f(\mathfrak{U}) \in \lambda_E(x) \,\} = \{\, \mathfrak{U} \in \mathsf{S}(B) : \alpha(x) \in \mathfrak{U} \,\}\end{aligned}$$

che coincide con $\omega_B \circ \alpha(x)$, per definizione di ω_B.

Abbiamo perciò trovato l'estensione che cercavamo. Basta allora provare che $\lambda_E^{\rightarrow}(E)$ è un insieme di generatori per $\mathsf{B}(\mathbf{2}^E)$.

Una base della topologia su $\mathbf{2}^E$ è data dagli insiemi della forma $\bigcap_{j=1}^{n} \lambda_E(x_j)$. Se U è un chiusaperto in $\mathbf{2}^E$, U è unione di aperti della base. Ma, essendo chiuso e quindi compatto, U deve essere unione finita di elementi della base. Perciò

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} \Bigl(\bigcap_{j=1}^{n_i} \lambda_E(x_{ij}) \Bigr)$$

e, per l'esercizio 9.2, abbiamo finito. □

Un semplice calcolo di cardinalità applicato all'esercizio 9.2 dimostra che, se A è un anello booleano con un insieme di generatori numerabile, allora A è numerabile. In particolare esistono algebre di Boole che non sono isomorfe a $\mathsf{P}(X)$, per alcun insieme X. Infatti, ad esempio, $\mathsf{B}(\mathbf{2}^{\mathbf{N}})$ è un'algebra libera con un insieme libero di generatori numerabile, quindi è numerabile. Un noto teorema di Cantor asserisce che $\mathsf{P}(X)$ non può essere numerabile.

Proposizione 13.6. *Sia A un anello booleano libero. Allora $\mathsf{S}(A)$ è omeomorfo a $\mathbf{2}^E$, dove E è un insieme libero di generatori di A.*

Dimostrazione. L'applicazione $f\colon \mathsf{S}(A) \to \mathbf{2}^E$ definita da $\mathfrak{U} \mapsto \mathfrak{U}_E$, dove $\mathfrak{U}_E : E \to \mathbf{2}$ è definita da $\mathfrak{U}_E(x) = 1$ se $x \in \mathfrak{U}$ e $\mathfrak{U}_E(x) = 0$ se $x \notin \mathfrak{U}$. L'applicazione f è continua (verificare). È suriettiva, perché E è un insieme di generatori; è iniettiva perché E è libero. □

Corollario 13.7. *Un'algebra di Boole finita A è libera se e solo se $|A| = 2^{2^n}$, per qualche $n \geq 0$.*

Dimostrazione. Se E è un insieme libero di generatori di A e $|E| = n$, allora A è isomorfo a $\mathsf{B}(\mathbf{2}^E)$. Ora $\mathbf{2}^E$ è discreto, quindi ogni sottoinsieme è chiusaperto e $\mathsf{B}(\mathbf{2}^E) = \mathsf{P}(\mathbf{2}^E)$ ha 2^{2^n} elementi.

Viceversa, sia $|A| = 2^{2^n}$; allora A è isomorfa a $\mathsf{P}(\mathbf{2}^E)$, dove E è un insieme con n elementi. Questa algebra è libera. □

Teorema 13.8. *Se A è un anello booleano, esistono un'algebra libera A' ed un omomorfismo suriettivo $A' \to A$.*

Dimostrazione. Ci basta trovare, per ogni spazio booleano X, un'applicazione continua e iniettiva $X \to \mathbf{2}^E$, per un opportuno E.

Prendiamo $E = \mathsf{C}(X)$: abbiamo $j\colon X \to \mathbf{2}^{\mathsf{C}(X)}$ definita da $j(x) = \tilde{x}$, dove $\tilde{x}(\alpha) = \alpha(x)$.

(1) L'applicazione j è iniettiva perché dati $x, y \in X$, $x \neq y$, esiste $\alpha\colon X \to \mathbf{2}$ con $\alpha(x) \neq \alpha(y)$.

(2) L'applicazione j è continua, perché

$$j^{\leftarrow}(p_\alpha^{\leftarrow}(\{1\}) = \alpha^{\leftarrow}(\{1\}).$$

Completare i dettagli. □

La teoria degli isomorfismi di anelli booleani liberi è particolarmente semplice.

Teorema 13.9. *Siano A e B anelli booleani liberi, con insiemi liberi di generatori rispettivamente E e F. Allora A e B sono isomorfi se e solo se $|E| = |F|$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\alpha\colon E \to F$ sia biiettiva. Allora, se consideriamo l'inclusione $j\colon F \to B$, abbiamo un (unico) omomorfismo $\varphi\colon A \to B$ che estende $j \circ \alpha$. Allora $\varphi^{\to}(A) \supseteq F$, quindi φ è suriettivo. Possiamo applicare la stessa tecnica a α^{-1} e all'inclusione $i\colon E \to A$. Otteniamo un'estensione $\psi\colon B \to A$. Ora, se $x \in E$, abbiamo che $\psi(\varphi(x)) = x$. Per l'unicità delle estensioni, $\psi \circ \varphi$ è l'identità. Analogamente $\varphi \circ \psi$ è l'identità.

Il viceversa discende da considerazioni di cardinalità.

Supponiamo dapprima che A sia finita; allora $|A| = 2^{2^n}$, dove n è il numero di elementi di un insieme libero di generatori, per 13.7. Quindi ogni insieme libero di generatori deve avere n elementi. Usando 12.13, abbiamo la tesi.

Se A è infinita, l'esercizio 9.2 dice che $|A| = |E|$. □

Terminiamo questa parte facendo vedere che si può semplificare la verifica che un anello boleano è libero.

Teorema 13.10. *Sia A un anello booleano e sia $E \subseteq A$. Allora E è un insieme libero di generatori di A se e solo se ogni applicazione $\alpha\colon E \to \mathbf{2}$ si estende in modo unico ad un omomorfismo $\varphi_\alpha\colon A \to \mathbf{2}$.*

Dimostrazione. Una direzione è ovvia. Viceversa, sia B il sottoanello generato da E e consideriamo le inclusioni $i\colon E \to B$ e $j\colon B \to A$.

Se $\mathfrak{U} \in \mathsf{S}(A)$, possiamo definire un omomorfismo $\hat{\mathfrak{U}}\colon A \to \mathbf{2}$ con

$$\hat{\mathfrak{U}}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in \mathfrak{U}; \\ 0 & \text{se } a \notin \mathfrak{U}. \end{cases}$$

Che $\hat{\mathfrak{U}}$ sia un omomorfismo è ovvio.

Dimostriamo che $\mathsf{S}(j)$ è iniettiva. Se $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \mathsf{S}(A)$ e $\mathsf{S}(j)(\mathfrak{U}) = \mathsf{S}(j)(\mathfrak{V})$, allora $j^{\leftarrow}(\mathfrak{U}) = j^{\leftarrow}(\mathfrak{V})$. In particolare $\hat{\mathfrak{U}} \circ j \circ i = \hat{\mathfrak{V}} \circ j \circ i = \alpha$. Ma allora sia $\hat{\mathfrak{U}}$ che $\hat{\mathfrak{V}}$ estendono α, quindi coincidono. Perciò $\mathsf{S}(j)$ è iniettiva e quindi j è suriettiva, cosicché $B = A$.

Consideriamo ora $f\colon \mathbf{2}^E \to \mathsf{S}(A)$ definita da $f(\alpha) = \{\, a \in A : \varphi_\alpha(a) = 1 \,\}$. È facile vedere che, in effetti, $f(\alpha)$ è un ultrafiltro e che f è biiettiva.

Per dimostrare che f è continua, proviamo che, per ogni $a \in A$, $f^{\leftarrow}(\mathscr{W}(a))$ è aperto in $\mathbf{2}^E$. Ancora per l'esercizio 9.2, ogni elemento $a \in A$ si può scrivere come

$$a = \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

ed è ovvio allora che

$$f^{\leftarrow}(\mathscr{W}(a)) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n_i} f^{\leftarrow}(\mathscr{W}(x_{ij}))$$

che è aperto in $\mathbf{2}^E$ (esercizio). □

14. Algebre atomiche

Abbiamo già detto che cos'è un *atomo* in un'algebra di Boole: un elemento minimale fra quelli non nulli. Vediamo subito l'importanza degli atomi; occorre però osservare che non è detto che un'algebra di Boole abbia atomi.

Diamo una facile caratterizzazione degli atomi.

Lemma 14.1. *Sia $a \in A$, $a \neq 0$. Allora a è un atomo se e solo se, per ogni $b \in A$, $a \wedge b = 0$ oppure $a \wedge b = a$.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Proposizione 14.2. *Sia a un atomo dell'algebra di Boole A. Allora esiste uno ed un solo ultrafiltro $\mathfrak{U}_a$ in A tale che $a \in \mathfrak{U}_a$.*

Dimostrazione. La minimalità di a in $A \setminus \{0\}$ dice subito che $\mathfrak{U}_a = \{\, x \in A : a \leq x \,\}$ è un ultrafiltro: infatti, se $\mathfrak{F}$ è un filtro che contiene propriamente $\mathfrak{U}_a$, allora esiste $b \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{U}_a$, quindi $a \nleq b$. Ma allora $a \wedge b = 0 \in \mathfrak{F}$: assurdo.

Sia $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro contenente a; allora, se $a \nleq b$, abbiamo $a \wedge b = 0$ e quindi $b \notin \mathfrak{F}$. □

In particolare, se a è un atomo, $\mathscr{W}(a)$ contiene un solo elemento, che quindi è un punto isolato di $\mathsf{S}(A)$.

Definizione 14.3. Un'algebra di Boole A si dice *atomica* se, per ogni $x \in A$, $x \neq 0$, esiste un atomo a tale che $a \leq x$. □

Proposizione 14.4. *Sia A un'algebra di Boole. Allora A è atomica se e solo se $\mathsf{S}(A)$ ha un insieme denso di punti isolati.*

Dimostrazione. Indichiamo con E l'insieme dei punti isolati di $\mathsf{S}(A)$.

($\Rightarrow$) Dobbiamo verificare che, per ogni $x \in A$, $x \neq 0$, $E \cap \mathscr{W}(x) \neq \emptyset$. Ora, esiste un atomo a con $a \leq x$, cosicché $\mathscr{W}(a) \subseteq \mathscr{W}(x)$. Per l'osservazione precedente, $\mathscr{W}(a)$ contiene un unico punto isolato.

($\Leftarrow$) Sia $x \in A$, $x \neq 0$. Allora $E \cap \mathscr{W}(x)$ contiene un punto isolato di $\mathsf{S}(A)$, sia esso $\mathfrak{U}$. Esiste pertanto un aperto $\mathscr{W}(a)$ della base tale che $\mathscr{W}(a) = \{\mathfrak{U}\}$, e quindi $a \leq x$. Affermiamo che a è un atomo. Se non lo fosse, esisterebbe $b \in A$ con $0 < b < a$. Ne segue $\emptyset \neq \mathscr{W}(b) \subset \mathscr{W}(a)$: assurdo. □

Un esempio ovvio di algebra atomica è $\mathsf{P}(X)$: gli atomi sono gli insiemi con un solo elemento. Ogni algebra finita è atomica: fissato $x \neq 0$, l'insieme (non vuoto) degli elementi $x \wedge y \neq 0$ ha un elemento minimale. Notiamo che ciascuna delle algebre menzionate è completa. Questo non è casuale, perché l'essere atomica caratterizza le algebre complete come nel teorema che segue.

Teorema 14.5. *Sia A un'algebra di Boole completa. Allora A è atomica se e solo se A è isomorfa a $\mathsf{P}(E)$, per un insieme E.*

Dimostrazione. Supponiamo A atomica e completa. Allora il sottoinsieme E dei punti isolati di $\mathsf{S}(A)$ è denso e $\mathsf{S}(A)$ è estremamente sconnesso.

Sia allora X uno spazio booleano estrememente sconnesso nel quale l'insieme E dei punti isolati è denso. Dimostriamo che l'applicazione $\varphi\colon \mathsf{B}(X) \to \mathsf{P}(E)$ definita da $U \mapsto U \cap E$ è un isomorfismo di algebre di Boole. Questo basterà a provare la tesi.

Che φ sia un omomorfismo è ovvio. Sia U un chiusaperto di X; allora $U \subseteq \mathrm{Cl}(E \cap U)$, per l'esercizio 3.4, in quanto U è aperto. Ma U è anche chiuso e, da $E \cap U \subseteq U$ segue $\mathrm{Cl}(E \cap U) \subseteq U$. Abbiamo allora $U = \mathrm{Cl}(E \cap U)$,

Basta allora vedere che, per ogni sottoinsieme Z di E, $\mathrm{Cl}(Z)$ è un chiusaperto di X (esercizio).

Quindi abbiamo trovato l'inversa di φ. □

Non è facile dare esempi di algebre non atomiche.

Definizione 14.6. Sia X uno spazio topologico e sia $E \subseteq X$. L'*interno* di X è $\mathrm{Int}(E) = X \setminus (\mathrm{Cl}(X \setminus E))$; in altre parole, $\mathrm{Int}(E)$ è il più grande aperto contenuto in E (esercizio). In particolare, E è aperto se e solo se $E = \mathrm{Int}(E)$. □

L'operazione di prendere l'interno ha dunque proprietà duali di quelle di un operatore di chiusura (definizione 3.5).

Proposizione 14.7. *Sia X uno spazio topologico. Allora, se $E, E' \subseteq X$, abbiamo:*

(OI-1) $\mathrm{Int}(X) = X$;
(OI-2) $\mathrm{Int}(E) \subseteq E$;
(OI-3) $\mathrm{Int}(E) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(E))$;
(OI-4) $\mathrm{Int}(E \cap E') = \mathrm{Int}(E) \cap \mathrm{Int}(E')$. □

Notiamo che la (OI-2) insieme alla (OI-3) dicono che $\mathrm{Int}(E) = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(E))$. La (OI-4) dice anche che, se $E \subseteq E'$, allora $\mathrm{Int}(E) \subseteq \mathrm{Int}(E')$. Come per gli operatori di chiusura, se è definita un'operazione su $\mathsf{P}(X)$ con le proprietà della proposizione precedente, allora è possibile definire un'unica topologia su X tale che gli aperti siano gli insiemi uguali al loro interno (esercizio).

Definizione 14.8. Un aperto U dello spazio topologico X si dice *regolare* se $U = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U))$. □

I chiusaperti di uno spazio topologico sono sempre aperti regolari.

Dato $E \subseteq X$, poniamo $\check{E} = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(E))$.

Proposizione 14.9. *Sia X uno spazio topologico. Per ogni aperto U di X, l'aperto $\check{U}$ è regolare; inoltre, $U \subseteq \check{U}$. Se V è un altro aperto di X e $U \subseteq V$, allora $\check{U} \subseteq \check{V}$.*

Dimostrazione. Poiché U è aperto, da $U \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ segue $U = \mathrm{Int}(U) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) = \check{U}$. Ne segue allora $\check{U} \subseteq \check{\check{U}}$.

Inoltre $\check{U} \subseteq \mathrm{Cl}(U)$, quindi $\mathrm{Cl}(\check{U}) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$, da cui $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{U})) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U))$, cioè l'altra inclusione.

Per finire, da $U \subseteq V$ segue $\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Cl}(V)$ e quindi anche $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V))$. □

Chiameremo $\check{U}$ la *regolarizzazione* di U. Indicheremo poi con $\mathsf{R}(X)$ l'insieme degli aperti regolari di X, che è ovviamente ordinato per inclusione. Notiamo che $\emptyset$ e X sono aperti regolari.

Teorema 14.10. *Sia X uno spazio topologico; allora* $\mathsf{R}(X)$ *è un'algebra di Boole completa.*

Dimostrazione. Dati $U, V \in \mathsf{R}(X)$, poniamo

$$U \wedge V = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U \cap V)) \qquad \text{e} \qquad U \vee V = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U \cup V)).$$

Verifichiamo che, effettivamente, $U \wedge V$ è il massimo dei minoranti di $\{U, V\}$ in $\mathsf{R}(X)$. Per 14.9, $U \wedge V \in \mathsf{R}(X)$. Inoltre $U \cap V \subseteq U$, quindi $\mathrm{Cl}(U \cap V) \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ e, di conseguenza,

$$U \wedge V = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U \cap V)) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) = U.$$

Analogamente, $U \wedge V \subseteq V$.

Sia ora $W \in \mathsf{R}(X)$ un minorante di $\{U, V\}$. Allora $W \subseteq U \cap V$, quindi $W = \check{W} \subseteq U \wedge V$.

La dimostrazione che $U \vee V$ è il minimo dei maggioranti di $\{U, V\}$ è analoga. Perciò $\mathsf{R}(X)$ è un reticolo con minimo e massimo.

Lasciamo come esercizio la verifica che $\mathsf{R}(X)$ è un reticolo distributivo.

Il complemento di $U \in \mathsf{R}(X)$ è $U^* = X \setminus \mathrm{Cl}(U)$. Occorre vedere che $X \setminus \mathrm{Cl}(U) \in \mathsf{R}(X)$, dopo di che $U \cap U^* = \emptyset$, quindi $U \wedge V = \emptyset$; inoltre $U \cup U^* = U \cup (X \setminus \mathrm{Cl}(U)) = X \setminus (\mathrm{Cl}(U) \setminus U)$; basta allora osservare che questo insieme è denso in X per ottenere che $U \vee U^* = X$. Ora nessun aperto di X può essere contenuto in $\mathrm{Cl}(U) \setminus U$, per definizione di chiusura.

Dimostriamo allora che $X \setminus \mathrm{Cl}(U)$ è regolare. Poiché U è regolare, $U = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U))$; per la definizione di $\mathrm{Int}(E)$, questo equivale a $X \setminus U = \mathrm{Cl}(X \setminus \mathrm{Cl}(U))$. Ora

$$\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(X \setminus \mathrm{Cl}(U))) = \mathrm{Int}(X \setminus U) = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus (X \setminus U)) = X \setminus \mathrm{Cl}(U).$$

Il fatto che $\mathsf{R}(X)$ è completa discende dall'osservazione che, se $\mathscr{X} \subseteq \mathsf{R}(X)$, allora $\sup \mathscr{X}$ è la regolarizzazione di $\bigcup \mathscr{X}$. Questo si dimostra allo stesso modo usato prima per due aperti. □

Possiamo allora presentare una vasta classe di algebre di Boole non atomiche.

Teorema 14.11. *Sia X uno spazio topologico in cui* $\mathsf{R}(X)$ *è una base. Allora* $\mathsf{R}(X)$ *è atomica se e solo se X è discreto.*

Dimostrazione. Sia $U \in \mathsf{R}(X)$ e siano $x, y \in U$, $x \neq y$. Allora esistono aperti regolari $V, W \in \mathsf{R}(X)$ tali che $x \in V$, $y \in W$ e $V \cap W = \emptyset$ (ricordiamo che X è di Hausdorff). Allora $x \in U \cap V$ e quindi $x \in U \wedge V$. Inoltre $y \notin \mathrm{Cl}(U \cap V)$, perché $W \cap (U \cap V) = \emptyset$, quindi $y \notin U \wedge V$. Allora $\emptyset U \wedge V \neq U$ e quindi U non è un atomo.

Questo prova che $U \in \mathsf{R}(X)$ è un atomo se e solo se $U = \{x\}$ ha un solo elemento e, in tal caso, x è un punto isolato di X. Allora $\mathsf{R}(X)$ è atomica se e solo se ogni aperto regolare è unione di insiemi di punti isolati (infatti è completa). Ne segue che X è discreto. □

Esempio 14.12. L'algebra $\mathsf{R}([0,1])$ è non atomica; più in particolare, nessun suo elemento è un atomo. □

Esiste, nel caso di un spazio booleano X una connessione fra $\mathsf{B}(X)$ e $\mathsf{R}(X)$.

Definizione 14.13. Una sottoalgebra B dell'algebra di Boole A è *densa* se e solo se, per ogni $a \in A$, $a \neq 0$, esiste $B \in B$, $b \neq 0$ tale che $b \leq a$. □

Al solito, la definizione sembra asimmetrica, ma non lo è. Supponiamo B densa in A; se $a \in A$, $a \neq 1$, allora $a^* \neq 0$ ed esiste $b \in B$, $b \neq 0$ tale che $b \leq a^*$. Perciò $a \leq b^*$ e $b^* \neq 1$.

Se siamo nella situazione di B sottoalgebra di A, dato $E \subseteq B$, indichiamo rispettivamente con $\sup_B E$ e $\sup_A E$ gli estremi superiori di E calcolati in B e in A (ammesso che esistano). In generale, se questi estremi superiori esistono, si ha $\sup_A E \leq \sup_B E$.

Proposizione 14.14. *Sia B una sottoalgebra densa dell'algebra di Boole A e sia $E \subseteq B$. Allora $\sup_B E$ esiste se e solo se esiste $\sup_A E$ e $\sup_A E \in B$; in tal caso $\sup_B E = \sup_A E$.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista $\sup_B E = b$. Questo non è l'estremo superiore calcolato in A se e solo se esiste un maggiorante $a \in A$ di E con $a < b$. Se questo è il caso, consideriamo $x = a + b \in A$; allora $x = a + b \neq 0$, quindi esiste $y \in B$, $y \neq 0$, con $y \leq x$.

(1) Vale $y = ay + by$: infatti, questo è $yx = y$.

(2) Abbiamo $a \leq b + y$. Infatti $a(b + y) = ab + ay = a + ay = a + a(ay + by) = a + a^2y + aby = a + ay + ay = a$.

(3) Di conseguenza, $b + y \in B$ è un maggiorante di E; questo è assurdo, perché $b + y \neq b$ e inoltre

$$(b + y)b = b + by = b + b(ay + by) = b + aby + b^2y = b + ay + by = b + y,$$

cioè $b + y \leq b$.

Viceversa, se $\sup_A E$ esiste e appartiene a B, è ovvio che non può esistere in B un maggiorante di E minore di questo. □

Proposizione 14.15. *Sia X uno spazio booleano. Allora $\mathsf{B}(X)$ è una sottoalgebra densa di $\mathsf{R}(X)$.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che ogni chiusaperto è un aperto regolare. Quindi $\mathsf{B}(X)$ è una sottoalgebra di $\mathsf{R}(X)$. Inoltre, se U è un aperto regolare di X, U è unione di chiusaperti. □

15. Topologia e filtri

Alcuni teoremi di topologia ammettono una dimostrazione più “semplice” se introduciamo la nozione di *filtro convergente*.

Definizione 15.1. Sia X un insieme e sia $\mathfrak{F}$ un (ultra)filtro in $\mathsf{P}(X)$: diremo che $\mathfrak{F}$ è un *(ultra)filtro su X*. Se $\mathscr{T}$ è una topologia su X e $x \in X$ diremo che $\mathfrak{F}$ *converge a x* se $\mathscr{T}_x \subseteq \mathfrak{F}$.

Abbiamo bisogno di qualche fatto elementare.

Proposizione 15.2. *Sia $\mathscr{X} \subseteq \mathsf{P}(X)$. Allora esiste un filtro contenente $\mathscr{X}$ se e solo se $\mathscr{X}$ ha la* PIF.

Dimostrazione. Certamente, se $\mathscr{X}$ non ha la PIF, non può essere contenuto in alcun filtro. Viceversa, se $\mathscr{X}$ ha la PIF, possiamo considerare

$$\mathfrak{F} = \{\, E \in \mathsf{P}(X) : \text{esiste } A \in \mathscr{X} \text{ con } A \subseteq E \,\}$$

e verificare che $\mathfrak{F}$ è un filtro. □

Il filtro $\mathfrak{F}$ definito nella dimostrazione precedente si dirà *generato da $\mathscr{X}$*.

Ricordiamo anche che ogni filtro su X è contenuto in un ultrafiltro, per 10.9.

Diamo allora alcuni esempi di come i filtri possono essere usati in topologia.

Proposizione 15.3. *Sia X uno spazio topologico. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *X è di Hausdorff;*
(b) *un filtro su X converge al più a un punto;*
(c) *un ultrafiltro su X converge al più a un punto.*

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Sia $\mathfrak{F}$ convergente a $x \in X$ e sia $y \in X$, $x \neq y$. Allora esistono U intorno di x e V intorno di y tali che $U \cap V = \emptyset$. Poiché $\mathfrak{F}$ converge a x, abbiamo $U \in \mathfrak{F}$; allora $V \notin \mathfrak{F}$ che quindi non converge a y.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Ovvio.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Siano $x, y \in X$, con $x \neq y$. Se $U \cap V \neq \emptyset$, per ogni scelta di U intorno di x e di V intorno di y, la famiglia $\{\, U \cap V : U \in \mathscr{T}_x, V \in \mathscr{T}_y \,\}$ ha la PIF, e quindi è contenuta in un ultrafiltro, il quale allora converge sia a x che a y. Assurdo. □

Abbiamo una caratterizzazione anche della compattezza.

Proposizione 15.4. *Sia X uno spazio topologico. Allora X è compatto se e solo se ogni ultrafiltro su X è convergente.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro su X; supponiamo, per assurdo, che $\mathfrak{U}$ nn converga ad alcun $x \in X$. Ciò significa che, per ogni $x \in X$, esiste un intorno aperto U_x di x tale che $U_x \notin \mathfrak{U}$. Per la compattezza, esistono $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tali che $X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}$; poiché $X \in \mathfrak{U}$, questo implica $U_{x_i} \in \mathfrak{U}$, per almeno un i, per 10.10: contraddizione.

($\Leftarrow$) Sia $\mathscr{F}$ una famiglia di chiusi di X avente la PIF. Allora esiste un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ che contiene $\mathscr{F}$; questo ultrafiltro converge ad un punto $x \in X$. Siano ora U un intorno di x e $F \in \mathscr{F}$: sia U che F appartengono a $\mathfrak{U}$ e quindi $U \cap F \neq \emptyset$. Ma allora $x \in \mathrm{Cl}(F) = F$ e $\mathscr{F}$ ha intersezione non vuota. □

Per caratterizzare la continuità, dobbiamo dare una nuova definizione.

Definizione 15.5. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione e sia $\mathfrak{F}$ un filtro su X. Allora $f[\mathfrak{F}]$ denota il filtro generato da

$$\{\, f^{\rightarrow}(F) : F \in \mathfrak{F} \,\}$$

che è una famiglia con la PIF in Y.

Proposizione 15.6. *Siano X e Y spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione. Fissiamo $x \in X$. Allora f è continua in x se e solo se, per ogni filtro $\mathfrak{F}$ in X convergente a x, il filtro $f[\mathfrak{F}]$ converge a $f(x)$.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Basta considerare come $\mathfrak{F}$ il filtro degli intorni di x.

($\Rightarrow$) Sia $\mathfrak{F}$ convergente a x e sia V un intorno di $f(x)$. Allora $f^{\leftarrow}(V) \in \mathfrak{F}$; allora $V \supseteq f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(V))$ e quindi $V \in f[\mathfrak{F}]$. □

Possiamo studiare anche i prodotti.

Proposizione 15.7. *Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di spazi topologici e sia $\alpha \in X = \prod_\lambda X_\lambda$. Un filtro $\mathfrak{F}$ su X converge a α se e solo se, per ogni λ, $p_\lambda[\mathfrak{F}]$ converge a $\alpha(\lambda)$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Le applicazioni p_λ sono continue e possiamo applicare 15.6.

($\Leftarrow$) Sia U un intorno di α; allora esistono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e V_{λ_i} intorni aperti di $\alpha(\lambda_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), tali che

$$U \supseteq \bigcap \{\, p_{\lambda_i}^{\leftarrow}(V_{\lambda_i}) : i = 1, 2, \dots, n \,\}.$$

Per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, $V_{\lambda_i} \in p_{\lambda_i}[\mathfrak{F}]$, quindi troviamo $U_{\lambda_i} \in \mathfrak{F}$ tale che $p_{\lambda_i}^{\rightarrow}(U_{\lambda_i}) \subseteq V_{\lambda_i}$. Prendendo $U' = \bigcap\{\, U_{\lambda_i} : i = 1, 2, \dots, n \,\}$, abbiamo che $U' \in \mathfrak{F}$ e che $U \supseteq U'$. Ma allora $U \in \mathfrak{F}$. □

Il teorema di Tychonov si può allora dimostrare facilmente con i filtri.

Lemma 15.8. *Sia $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro su X e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione suriettiva. Allora $f[\mathfrak{U}]$ è un ultrafiltro su Y.*

Dimostrazione. Sia $E \subseteq Y$. Allora, per 10.9, $f^{\leftarrow}(E) \in \mathfrak{U}$ oppure $X \setminus f^{\leftarrow}(E) = f^{\leftarrow}(Y \setminus E) \in \mathfrak{U}$. Sia allora $E \subseteq Y$ tale che $f^{\leftarrow}(E) \in \mathfrak{U}$: abbiamo che $E = f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(E)) \in f[\mathfrak{F}]$. □

Teorema 15.9. *Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di spazi topologici compatti e sia $\alpha \in X = \prod_\lambda X_\lambda$. Allora X è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro su X; allora, per ogni λ, $p_\lambda[\mathfrak{U}]$ è un ultrafiltro su X_λ, quindi converge a $x_\lambda \in X_\lambda$. Definiamo $\alpha \in X$ con $\alpha\colon \lambda \mapsto x_\lambda$. Allora $\mathfrak{U}$ converge a α, per 15.7. □