DUALITÀ DI MORITA E DI PONTRYAGIN

Enrico Gregorio

1. Convenzioni

Gli anelli che considereremo hanno tutti unità. Indicheremo con Mod-A e A-Mod le categorie dei moduli (unitari) destri e sinistri sull'anello A.

I morfismi tra moduli saranno scritti dalla parte opposta agli scalari. Così, se $f\colon M \to M'$ è un morfismo in Mod-A e $x \in M$, scriveremo $f(x)$ per denotare la sua immagine in M'. Se invece $g\colon N \to N'$ è un morfismo in A-Mod e $y \in N$, scriveremo $(y)g$ per denotare la sua immagine in N'.

La composizione fra morfismi seguirà questa convenzione. Può sembrare bizzarro, ma è una prassi accettata perché semplifica molte situazioni. Per esempio, se M_A è un modulo destro su A e $B = \operatorname{End}(M_A)$ è il suo anello degli endomorfismi, allora M è in modo naturale un modulo sinistro su B. Se poi consideriamo $C = \operatorname{End}({}_BM)$, allora M è un modulo destro su C e l'applicazione $a \mapsto \mu_a$, dove $(x)\mu_a = xa$, è un omomorfismo di anelli $A \to C$. Di fatto poi ${}_BM_A$ è un bimodulo, come si verifica facilmente.

Come caso particolare, consideriamo il modulo regolare sinistro ${}_AA$ e il suo anello degli endomorfismi $B = \operatorname{End}({}_AA)$. Se $f \in B$, possiamo considerare $(1)f \in A$. Questa applicazione $f \mapsto \widehat{f} = (1)f$ è un *isomorfismo* di anelli; sarebbe un *antiisomorfismo* (cioè scambierebbe l'ordine dei fattori in una moltiplicazione) se scrivessimo gli endomorfismi di ${}_AA$ a sinistra.

Si verifichi che l'applicazione $g \mapsto \widehat{g} = g(1)$ di $\operatorname{End}(A_A) \to A$ è anch'essa un isomorfismo di anelli.

Le sottocategorie che useremo saranno piene e *astratte*, cioè contenenti ogni oggetto isomorfo a uno in esse. Tutti i funtori che considereremo saranno additivi.

2. Dualità negli spazi vettoriali

Sia k un anello con divisione. Possiamo allora definire le categorie Mod-k e k-Mod degli spazi vettoriali destri e sinistri rispettivamente su k. Siccome ${}_k k_k$ è un bimodulo, sono ben definiti i funtori controvarianti

$$\Delta_r = \operatorname{Hom}_k(\cdot, k) \colon \text{Mod-}k \to k\text{-Mod}, \qquad \Delta_s = \operatorname{Hom}_k(\cdot, k) \colon k\text{-Mod} \to \text{Mod-}k.$$

È facile vedere che questi funtori sono aggiunti sulla destra, cioè che esistono isomorfismi naturali

$$\varphi_{M,N} \colon \operatorname{Hom}_k(N, \Delta_r(M)) \to \operatorname{Hom}_k(M, \Delta_s(N))$$

per ogni $M \in$ Mod-k e ogni $N \in k$-Mod. Per esempio, dato $f \in \operatorname{Hom}_k(M, \Delta_s(N))$, possiamo definire $\varphi_{M,N}(f) = g$, dove, per $y \in N$ e $x \in M$,

$$g(y) \colon x \in M \mapsto f(x)(y).$$

Il fatto che i funtori siano aggiunti permette di definire, per $M \in$ Mod-k,

$$\omega_M = \varphi_{M,\Delta_r(M)}(1_{\Delta_r(M)}) \colon M \to \Delta_s \Delta_r(M),$$

ed è un facile esercizio verificare che, per $x \in M$,

$$\omega_M(x) = \hat{x} \colon \xi \mapsto (\xi)\hat{x} = \xi(x).$$

Analogamente si definisce $\omega_N \colon N \to \Delta_r \Delta_s(N)$.

Diremo che uno spazio vettoriale (destro o sinistro) L è *riflessivo* se ω_L è un isomorfismo.

L'esistenza di basi per ogni spazio vettoriale dice immediatamente che ω_L è iniettivo, per ogni L (esercizio). Dunque L è riflessivo se e solo se ω_L è suriettivo. Purtroppo questo avviene solo per gli spazi di dimensione finita.

Non è troppo complicato infatti verificare che il duale di uno spazio vettoriale di dimensione infinita λ ha dimensione $\mu > \lambda$ (un po' come l'insieme delle parti ha cardinalità maggiore).

In generale, perciò, trattando di dualità fra categorie di moduli, non ci potremo aspettare che ogni modulo sia riflessivo. Anzi, un teorema di Barbara Osofsky esclude questa possibilità in ipotesi molto meno restrittive di quelle che faremo.

3. Dualità di Morita

Cominceremo con uno sguardo in astratto. Fisseremo due anelli A e B e supporremo che esistano sottocategorie piene ${}_A\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}_B$ di A-Mod e Mod-B e funtori controvarianti $D_1\colon {}_A\mathscr{C} \to \mathscr{C}_B$, $D_2\colon \mathscr{C}_B \to {}_A\mathscr{C}$ con le seguenti proprietà:

(i) ${}_A\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}_B$ sono chiuse per somme dirette finite, sottomoduli e quozienti;
(ii) ${}_AA \in {}_A\mathscr{C}$ e $B_B \in \mathscr{C}_B$;
(iii) D_1 e D_2 sono una dualità fra ${}_A\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}_B$.

Sotto queste ipotesi diremo che i funtori D_1 e D_2 definiscono una dualità di Morita fra A e B.

In virtù delle condizioni imposte, ogni modulo finitamente generato in A-Mod appartiene a ${}_A\mathscr{C}$ e lo stesso vale per $\mathscr{C}_B$. La condizione (iii) dice che i funtori D_1 e D_2 sono aggiunti sia sulla destra che sulla sinistra e che i morfismi di aggiunzione (per esempio sulla destra) sono isomorfismi naturali

$$\chi\colon \mathrm{id}_{{}_A\mathscr{C}} \to D_2D_1, \qquad \psi\colon \mathrm{id}_{\mathscr{C}_B} \to D_1D_2.$$

Il funtore D_1 è pieno e fedele; perciò esso induce un isomorfismo di gruppi abeliani

$$\mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_AA) \to \mathrm{Hom}_B(D_1(A), D_1(A))$$

che di fatto è un isomorfismo fra gli anelli $\mathrm{End}({}_AA)$ e $\mathrm{End}(D_1(A)_B)$, quindi fra A e $\mathrm{End}(U_B)$, dove $U = D_1(A)$. Il fatto che scriviamo gli endomorfismi di U_B a sinistra permette senza dubbio di affermare che ${}_AU_B$ è un bimodulo.

Questo bimodulo definisce allora due funtori controvarianti:

$$\mathrm{Hom}_A(\cdot\,, U)\colon A\text{-Mod} \to \text{Mod-}B, \qquad \mathrm{Hom}_B(\cdot\,, U)\colon \text{Mod-}B \to A\text{-Mod}.$$

Il risultato che segue è cruciale nello sviluppo della teoria. Ai fini di esso considereremo il funtore D_1 come a valori in Mod-B e $\mathrm{Hom}_A(\cdot\,, U)$ con dominio ${}_A\mathscr{C}$.

Proposizione 3.1 (Morita [5])**.** *Esiste un isomorfismo di funtori* $D_2 \to \mathrm{Hom}_B(\cdot\,, U)$.

Dimostrazione. Osserviamo che, per ogni modulo $M \in A$-Mod, abbiamo

$$M \cong \mathrm{Hom}_A(A, M)$$

tramite l'applicazione $x \mapsto \tilde{x}$, dove $(a)\tilde{x} = ax$. L'inversa di questa applicazione è, ovviamente, $f \mapsto (1)f$. Si tratta di un isomorfismo di gruppi abeliani, ma anche di moduli su A, se consideriamo $\mathrm{Hom}_A(A, \cdot)\colon A\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$, tenendo conto della struttura di A-A-bimodulo che A possiede.

Sia $M = D_2(N)$; allora, in virtù della dualità, abbiamo anche l'isomorfismo di gruppi abeliani

$$\mathrm{Hom}_A(A, D_2(N)) \cong \mathrm{Hom}_B(N, D_1(A)) = \mathrm{Hom}_B(N, U).$$

Scriviamolo esplicitamente: se $f\colon A \to D_2(N)$, allora $D_1(f)\colon D_1D_2(N) \to D_1(A)$ e quindi $D_1(f)\circ\psi_N\colon N \to D_1(A) = U$. Componendo con l'isomorfismo $D_2(N) \to \mathrm{Hom}_A(A, D_2(N))$, abbiamo in definitiva un isomorfismo di gruppi abeliani

$$\beta_N\colon D_2(N) \to \mathrm{Hom}_B(N, U).$$

Basta verificare che si tratta anche di un morfismo di moduli su A. $\square$

La fine della dimostrazione precedente è tecnica e seguirla passo passo è solo un noioso esercizio di calcolo di composizioni e di aggiunzioni.

Molto più interessante è notare che, per simmetria, ponendo $V = D_2(B_B)$, otteniamo un bimodulo ${}_AV_B$ e l'analogo isomorfismo di funtori

$$\alpha\colon D_1 \to \operatorname{Hom}_A(\cdot, V).$$

Il gioco è fatto se dimostriamo (con conti analoghi ai precedenti) che ${}_AU_B$ e ${}_AV_B$ sono isomorfi come *bimoduli*.

Teorema 3.2 (Morita [5])**.** *Data la dualità di Morita*

$$D_1\colon {}_A\mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{C}_B : D_2$$

esistono un bimodulo ${}_AU_B$ e isomorfismi di funtori

$$\alpha\colon D_1 \to \operatorname{Hom}_A(\cdot, U), \qquad \beta\colon D_2 \to \operatorname{Hom}_B(\cdot, U)$$

e, per ogni $M \in {}_A\mathscr{C}$ e $N \in \mathscr{C}_B$, i morfismi di valutazione

$$M \to \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(M,U),U), \qquad N \to \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_B(N,U),U)$$

sono isomorfismi. In particolare i funtori D_1 e D_2 possono essere estesi a una coppia di funtori aggiunti sulla destra

$$\operatorname{Hom}_A(\cdot, U)\colon A\text{-Mod} \rightleftarrows \text{Mod-}B : \operatorname{Hom}_B(\cdot, U).$$

Ci interessa studiare le proprietà dei due *moduli canonici* della dualità, cioè dei moduli ${}_AU$ e U_B. Ne tratteremo solo uno, la simmetria permette di ottenere le stesse conclusioni sull'altro. D'ora in poi identificheremo i funtori D con i corrispondenti funtori $\operatorname{Hom}(\cdot, U)$.

Teorema 3.3. *Il modulo canonico ${}_AU$ di una dualità di Morita è un cogeneratore iniettivo fedelmente bilanciato di A-*Mod.

Dimostrazione. (1) ${}_AU$ è iniettivo. Sia infatti I un ideale sinistro di A e sia $f\colon I \to U$. Dualizziamo ottenendo $D_1(f)\colon D_1(U) \to D_1(I)$. Componendo con l'isomorfismo ω_B abbiamo allora $g\colon B \to D_1(I)$. Siccome B_B è proiettivo, possiamo sollevare g a un morfismo $g'\colon B \to D_1(A)$ in modo che il diagramma

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "g'"'] \arrow[d, "g"] & \\ D_1(A) \arrow[r] & D_1(I) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Dualizzando questo diagramma e usando i morfismi di aggiunzione, troviamo un morfismo $f'\colon A \to U$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} & U & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[u, "f"] & A \arrow[ul, "f'"'] \end{tikzcd}$$

e il criterio di Baer dice che ${}_AU$ è iniettivo.

(2) ${}_AU$ è un cogeneratore. Occorre vedere che, per ogni $M \in A$-Mod e ogni $x \in M$, $x \neq 0$, esiste $f\colon M \to U$ tale che $(x)f \neq 0$.

Il sottomodulo ciclico Ax di M è isomorfo a $A/\operatorname{Ann}_A(x)$, quindi appartiene a ${}_A\mathscr{C}$. Il morfismo di valutazione $\omega_{Ax}\colon Ax \to \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(Ax,U),U)$ è un isomorfismo, quindi esiste un morfismo $f'\colon Ax \to U$ tale che $(x)f' \neq 0$. Usando il fatto che ${}_AU$ è iniettivo, possiamo concludere.

(3) L'anello degli endomorfismi di U_B è canonicamente isomorfo a A. Questo discende dalla definizione di U_B. □

Quanto abbiamo fatto si può ora rovesciare: una dualità di Morita definisce un bimodulo con certe proprietà. Ebbene, ogni bimodulo con le stesse proprietà definisce a sua volta una dualità di Morita.

Definizione 3.4. Un *bimodulo di Morita* ${}_AU_B$ è un bimodulo fedelmente bilanciato da ambo le parti tale che ${}_AU$ e U_B siano cogeneratori iniettivi di A-Mod e Mod-B rispettivamente.

Abbiamo quindi visto che il bimodulo canonico di una dualità di Morita è un bimodulo di Morita. Ogni bimodulo di Morita definisce una dualità di Morita attraverso i corrispondenti funtori Hom.

Definizione 3.5. Se ${}_AU_B$ è un bimodulo, diremo che un modulo $M \in A$-Mod è *U-riflessivo* se il morfismo di valutazione $M \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,U),U)$ è un isomorfismo. Analogamente per $N \in$ Mod-B. Indicheremo con $\mathscr{R}({}_AU)$ e con $\mathscr{R}(U_B)$ le classi dei moduli riflessivi in A-Mod e Mod-B rispettivamente.

Teorema 3.6. *Sia ${}_AU_B$ un bimodulo di Morita. Allora i funtori*

$$\mathrm{Hom}_A(\cdot\,,U)\colon A\text{-Mod} \rightleftarrows \text{Mod-}B : \mathrm{Hom}_B(\cdot\,,U)$$

inducono una dualità di Morita fra le sottocategorie $\mathscr{R}({}_AU)$ e $\mathscr{R}(U_B)$.

Dimostrazione. Il fatto che ${}_AU_B$ sia fedelmente bilanciato dice innanzitutto che ${}_AA \in \mathscr{R}({}_AU)$ e $B_B \in \mathscr{R}(U_B)$. Vediamo che $\mathscr{R}({}_AU)$ è chiusa per somme dirette finite, sottomoduli e quozienti. La chiusura per somme dirette finite è ovvia.

Per brevità porremo $D_1 = \mathrm{Hom}_A(\cdot\,,U)$ e $D_2 = \mathrm{Hom}_B(\cdot\,,U)$. Consideriamo una successione esatta

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

in A-Mod, con $M \in \mathscr{R}({}_AU)$. Applicando D_1 otteniamo ancora una successione esatta

$$0 \to D_1(N) \to D_1(M) \to D_1(L) \to 0$$

poiché D_1 è esatto, infatti ${}_AU$ è un modulo iniettivo. Ma anche U_B è iniettivo, quindi otteniamo un diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_2D_1(L) \arrow[r] & D_2D_1(M) \arrow[r] & D_2D_1(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove le frecce verticali sono i morfismi di valutazione. Quello $M \to D_2D_1(M)$ è, per ipotesi, un isomorfismo, gli altri due sono iniettivi perché ${}_AU$ è un cogeneratore. Con una semplice “caccia nel diagramma” si verifica che anch’essi sono biiettivi. □

Osserviamo alcune conseguenze del fatto che ${}_AU_B$ sia un bimodulo di Morita. Dapprima dimostriamo un paio di fatti tecnici.

Un insieme $\mathscr{F}$ di sottomoduli di M_A si dice *filtrante crescente* se, dati $L_1, L_2 \in \mathscr{F}$, esiste $L \in \mathscr{F}$ con $L_1 + L_2 \subseteq L$. Con $\sum \mathscr{F}$ denoteremo il minimo sottomodulo di M che contiene tutti gli elementi di $\mathscr{F}$.

Lemma 3.7. *Un modulo M_A è finitamente generato se e solo se, per ogni insieme filtrante crescente $\mathscr{F}$ di sottomoduli di M, da $\sum \mathscr{F} = M$ segue che $M \in \mathscr{F}$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Siano $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ generatori. Allora, per il fatto che $\sum \mathscr{F} = M$, esistono $L_i \in \mathscr{F}$ tali che $x_i \in L_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Per induzione, esiste $L \in \mathscr{F}$ tale che $L_1 + L_2 + \dots + L_n \subseteq L$; dunque $L = M$.

($\Leftarrow$) Sia $\mathscr{F}$ l’insieme dei sottomoduli finitamente generati di M. Allora $\mathscr{F}$ è filtrante crescente e $\sum \mathscr{F} = M$; quindi, per ipotesi, $M \in \mathscr{F}$. □

Dualizzando questo risultato, Sharpe e Vámos hanno introdotto la nozione di modulo finitamente cogenerato. Un insieme $\mathscr{F}$ di sottomoduli di M si dice *filtrante decrescente* se, dati $L_1, L_2 \in \mathscr{F}$, esiste $L \in \mathscr{F}$ con $L \subseteq L_1 \cap L_2$.

Un modulo M si dice *finitamente cogenerato* se, per ogni insieme filtrante decrescente $\mathscr{F}$ di sottomoduli di M, da $\bigcap \mathscr{F} = \{0\}$ segue che $\{0\} \in \mathscr{F}$.

Lemma 3.8. *Il modulo M è finitamente cogenerato se e solo se* $\mathrm{Soc}(M)$ *è finitamente cogenerato ed essenziale in M.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Ricordiamo che $\mathrm{Soc}(M)$, lo zoccolo di M, è la somma dei sottomoduli semplici di M. È un facile esercizio dimostrare che ogni sottomodulo di un modulo finitamente cogenerato è anch’esso finitamente cogenerato. Dunque lo zoccolo di M è finitamente cogenerato.

Quanto all'essenzialità, ci basta vedere che ogni sottomodulo non nullo L di M ha sottomoduli minimali. Sia $\mathscr{F}$ l'insieme dei sottomoduli non nulli di L che ordiniamo per inclusione inversa. Prendiamo una catena $\mathscr{F}'$ in $\mathscr{F}$; questo è allora in modo evidente un insieme di sottomoduli di M filtrante decrescente e, visto che per ipotesi $\{0\} \notin \mathscr{F}'$, dobbiamo avere $\bigcap \mathscr{F}' \neq \{0\}$. Dunque $\bigcap \mathscr{F}'$ è un maggiorante di $\mathscr{F}'$ e, per il lemma di Zorn, $\mathscr{F}$ ha almeno un elemento massimale S. Questo è evidentemente un sottomodulo semplice di L.

($\Leftarrow$) Assumiamo che $\mathrm{Soc}(M)$ sia finitamente cogenerato ed essenziale. Sia $\mathscr{F}$ un insieme filtrante decrescente di sottomoduli di M tale che $\bigcap \mathscr{F} = \{0\}$. L'insieme $\mathscr{F}' = \{L \cap \mathrm{Soc}(M) : L \in \mathscr{F}\}$ è filtrante decrescente in $\mathrm{Soc}(M)$ e ha intersezione $\{0\}$. Quindi $\{0\} = L \cap \mathrm{Soc}(M)$ per un certo $L \in \mathscr{F}$; per l'essenzialità, $L = \{0\}$. □

Segue dalla teoria dei moduli semisemplici che per un modulo semisemplice sono equivalenti l'essere: (1) finitamente generato, (2) noetheriano, (3) artiniano, (4) finitamente cogenerato. Si dimostri per esercizio che un modulo M è finitamente generato se e solo se il suo radicale $\mathrm{rad}(M)$ è inessenziale e $M/\mathrm{rad}(M)$ è finitamente generato. Ricordiamo che $\mathrm{rad}(M)$ è l'intersezione dei sottomoduli massimali di M (ed è M se esso non ha sottomoduli massimali); un sottomodulo L si dice inessenziale se, per ogni sottomodulo X di M, da $L + X = M$ segue $X = M$.

Vediamo ora che una dualità di Morita induce una biiezione che inverte l'ordine fra i sottomoduli di $M \in \mathscr{R}({}_AU)$ e quelli di $\mathrm{Hom}_A(M,U) = D_1(M)$.

Se L è un sottomodulo di M, poniamo $L^\perp = \{\xi \in D_1(M) : (L)\xi = 0\}$. È evidente che $L^\perp$ è un sottomodulo di $D_1(M)$ e che questa corrispondenza inverte l'ordine. Analogamente, se X è un sottomodulo di $D_1(M)$, poniamo

$$X^\perp = \{x \in M : (x)\xi = 0, \text{ per ogni } \xi \in X\}.$$

Allora $X^\perp$ è un sottomodulo di M e, chiaramente, $L^{\perp\perp} \supseteq L$. Inoltre è chiaro che queste corrispondenze invertono l'ordine. Dunque $L^{\perp\perp\perp} = L^\perp$ e $X^{\perp\perp\perp} = X^\perp$.

Consideriamo l'inclusione $i \colon L \to L^{\perp\perp}$ e applichiamo $D_1 = \mathrm{Hom}_A(\cdot, U)$. Si verifichi che, dal fatto che $L^{\perp\perp\perp} = L^\perp$, segue che $D_1(i)$ è un isomorfismo; ma allora anche i è un isomorfismo e quindi

$$L = L^{\perp\perp}$$

per ogni sottomodulo L di M. Analogamente $X = X^{\perp\perp}$, per ogni sottomodulo X di $D_1(M)$.

Queste corrispondenze sono antiisomorfismi di reticoli e di conseguenza

$$(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp, \qquad (L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp,$$

quando L_1 e L_2 sono sottomoduli di M o di $D_1(M)$.

Proposizione 3.9. *Sia ${}_AU_B$ un bimodulo di Morita e sia $M \in A$-*Mod.

(1) *Se M è finitamente generato (cogenerato), allora* $\mathrm{Hom}_A(M,U)$ *è finitamente cogenerato (generato).*
(2) *Se M è noetheriano (artiniano), allora* $\mathrm{Hom}_A(M,U)$ *è artiniano (noetheriano).*
(3) *In A-*Mod *esiste, a meno di isomorfismi, solo un numero finito di moduli semplici.*

Dimostrazione. Per le affermazioni (1) e (2) basta applicare l'antiisomorfismo di reticoli.

(3) Poiché ${}_AU = D_2(B)$ e B_B è finitamente generato, ${}_AU$ è finitamente cogenerato. Inoltre è iniettivo, quindi è estensione essenziale del suo zoccolo, che è finitamente (co)generato. Ogni modulo semplice in A-Mod può essere immerso in ${}_AU$ che è un cogeneratore.

Ora, se $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia di moduli semplici in A-Mod a due a due non isomorfi, fissiamo per ogni λ un'immersione $i_\lambda \colon S_\lambda \in U$. Questi morfismi definiscono un morfismo $f \colon \bigoplus_\lambda S_\lambda \in U$ che è iniettivo (esercizio). Se allora Λ non è finito, si ha una contraddizione. □

Quest'ultimo risultato permette di dire che un anello come $\mathbf{Z}$ non possiede dualità di Morita, perché esistono infiniti gruppi abeliani semplici a due a due non isomorfi. Tuttavia la condizione che ci sia solo un numero finito di semplici a meno di isomorfismi non è sufficiente per l'esistenza di una dualità di Morita.

Una condizione necessaria e sufficiente è dovuta a Bruno J. Müller.

Una *varietà lineare* in un modulo M è un sottoinsieme della forma $x + L$, dove $x \in M$ e L è un sottomodulo di M. Un insieme di varietà lineari ha la *proprietà dell'intersezione finita* (PIF) se ogni suo sottoinsieme finito ha intersezione non vuota.

Diremo che M è *linearmente compatto* se ogni insieme di varietà lineari con la PIF ha intersezione non vuota.

Esiste un modo diverso di caratterizzare la compattezza lineare con i limiti inversi. Supponiamo che $\mathscr{F}$ sia un insieme filtrante decrescente di sottomoduli di M; allora possiamo considerare il sistema inverso $(M/L)_{L\in\mathscr{F}}$ e il suo limite inverso

$$\lim_{L\in\mathscr{F}} M/L.$$

Per definizione di limite inverso esiste un unico morfismo $M \to \lim_{L\in\mathscr{F}} M/L$ che fattorizza le proiezioni $M \to M/L$.

Proposizione 3.10. *Un modulo M è linearmente compatto se e solo se, per ogni insieme filtrante decrescente $\mathscr{F}$ di sottomoduli di M, il morfismo canonico $M \to \lim_{L\in\mathscr{F}} M/L$ è suriettivo.*

Teorema 3.11 (Müller [6])**.** *Un anello A ammette una dualità di Morita se e solo se ${}_AA$ e il cogeneratore iniettivo minimale ${}_AU$ di A-*Mod *sono entrambi linearmente compatti.*

Teorema 3.12 (Pham Ngoc Ánh [2])**.** *Un anello commutativo A ammette una dualità di Morita se e solo se ${}_AA$ è linearmente compatto.*

Come corollario dell'ultimo teorema possiamo allora dire che l'anello J_p degli interi p-adici ammette una dualità di Morita. Infatti i suoi ideali sono tutti e soli della forma $p^n J_p$ ed è facile allora vedere che è linearmente compatto. Poiché è un anello locale, ha un unico modulo semplice, il cui inviluppo iniettivo è il gruppo di Prüfer $\mathbf{Z}(p^\infty)$ che è artiniano (in particolare linearmente compatto).

4. Dualità di Azumaya

Esistono casi particolari della dualità di Morita. Il teorema 3.6 dice che un bimodulo di Morita induce una dualità fra le categorie formate dai moduli riflessivi, che sono le più grandi possibili. È allora interessante vedere quando esso induce una dualità fra le categorie più piccole possibile, quelle dei moduli finitamente generati. Si parla in questo caso di dualità di Azumaya.

Notiamo che, in generale, il duale di un modulo finitamente generato non è finitamente generato: questo è il caso di J_p, perché $\mathbf{Z}(p^\infty)$ non è finitamente generato.

Definizione 4.1. Un bimodulo di Morita ${}_AU_B$ si dice un *bimodulo di Azumaya* se, per ogni $M \in A$-Mod ($N \in$ Mod-B) finitamente generato, $\mathrm{Hom}_A(M,U)$ (rispettivamente $\mathrm{Hom}_B(N,U)$) è finitamente generato.

Notiamo che non si richiede che la classe dei moduli finitamente generati in A-Mod sia chiusa per sottomoduli (cioè che A sia noetheriano a sinistra). Questo tuttavia è una conseguenza.

Proposizione 4.2. *Se ${}_AU_B$ è un bimodulo di Azumaya, allora A è artiniano a sinistra e B è artiniano a destra.*

Dimostrazione. Sia ${}_AM$ un modulo finitamente generato e sia L un suo sottomodulo. Se dualizziamo la successione esatta $0 \to L \to M \to M/L \to 0$, otteniamo la successione esatta

$$0 \to D_1(M/L) \to D_1(M) \to D_1(L) \to 0$$

e quindi, per ipotesi, $D_1(L)$ è finitamente generato. Ma allora anche $L \cong D_2D_1(L)$ è finitamente generato. Dunque M è noetheriano. Questo vale ovviamente anche partendo da un modulo $N \in$ Mod-B finitamente generato. Poiché $M \cong D_2D_1(M)$ e $D_1(M)$ è finitamente generato, quindi noetheriano, segue che M è artiniano. □

Esempi di dualità di Azumaya sono le algebre di dimensione finita su un campo k. Sia infatti A una tale algebra e sia $M \in A$-Mod. Possiamo considerare M anche come spazio vettoriale su k e il suo duale $M^* = \mathrm{Hom}_k(M,k)$. Ora, M^* è in modo naturale un modulo destro su A, definendo, per $\xi \in M^*$ e $a \in A$,

$$\xi a\colon x \in M \mapsto \xi(ax) \in k.$$

Analogamente, se $N \in$ Mod-A, N^* è un modulo sinistro su A ponendo, per $\eta \in N^*$ e $a \in A$,

$$a\eta\colon y \in N \mapsto \eta(ya) \in k.$$

Possiamo evidentemente estendere questo a funtori controvarianti A-Mod $\to$ Mod-A e Mod-$A \to A$-Mod.

Se M è finitamente generato su A, allora ha dimensione finita su k (esercizio) e chiaramente $M \cong M^{**}$ come moduli su A (esercizio). Dunque la k-dualità definisce una dualità di Morita su A. Poiché moduli finitamente generati vanno in moduli finitamente generati, questa è anche una dualità di Azumaya.

5. Anelli di Kasch e quasi-Frobenius

Un campo k ha la proprietà che il bimodulo ${}_k k_k$ è di Morita. Appare naturale domandarsi quali anelli abbiano la stessa proprietà.

Definizione 5.1. Un anello A si dice di *Kasch* se il bimodulo ${}_A A_A$ è un bimodulo di Morita. Si dice *quasi-Frobenius* se ${}_A A_A$ è un bimodulo di Azumaya.

Ovviamente il bimodulo ${}_A A_A$ è fedelmente bilanciato, per ogni anello A.

Teorema 5.2. *Per l'anello A le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) *A è di Kasch;*

(b) *${}_A A$ e A_A sono cogeneratori iniettivi;*

(c) *${}_A A$ e A_A sono cogeneratori.*

Dimostrazione. (a) $\iff$ (b) e (b) $\implies$ (c) sono evidenti.

(c) $\implies$ (b) Dimostriamo che ${}_A A$ è iniettivo. Sia E un modulo iniettivo che contenga ${}_A A$; poiché ${}_A A$ è un cogeneratore, possiamo identificare E con un sottomodulo di un prodotto A^Λ. Per ogni $\lambda \in \Lambda$, sia $\pi_\lambda \colon A^\Lambda \to A$ la proiezione sulla coordinata corrispondente.

Poniamo $e_\lambda = (1)\pi_\lambda \in A$ e sia $I = \sum_\lambda e_\lambda A$, che è un ideale destro di A. Se $I \neq A$, esisterebbe un morfismo non nullo $A/I \to A$, poiché A_A è un cogeneratore, quindi un morfismo $A \to A$ che annulla I. Ma gli endomorfismi di A_A sono le moltiplicazioni per gli elementi di A, quindi esisterebbe $a \in A$, $a \neq 0$, tale che $aI = 0$. In particolare

$$0 = ae_\lambda = a(1)\pi_\lambda = (a)\pi_\lambda.$$

Questo elemento $a \in A$ va a zero con ogni proiezione, quindi è zero, contraddizione.

Abbiamo perciò $I = A$ e quindi $1 = \sum_{\lambda\in F} e_\lambda a_\lambda$, per un certo insieme finito $F \subseteq \Lambda$ e opportuni a_λ. Possiamo allora definire un morfismo

$$E \to A, \qquad x \mapsto \sum_{\lambda\in F} (x)\pi_\lambda a_\lambda$$

che è suriettivo. Siccome A è proiettivo, questo morfismo spezza e A è addendo diretto di un modulo iniettivo, quindi iniettivo. $\square$

Teorema 5.3. *Per l'anello A le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) *A è quasi-Frobenius;*

(b) *A è di Kasch e artiniano a destra (o a sinistra);*

(c) *${}_A A$ e A_A sono iniettivi e A è artiniano a destra (o a sinistra);*

(d) *ogni modulo iniettivo in* Mod-A *è proiettivo;*

(e) *ogni modulo proiettivo in* Mod-A *è iniettivo;*

(f) *ogni modulo iniettivo in* A-Mod *è proiettivo;*

(g) *ogni modulo proiettivo in* A-Mod *è iniettivo.*

6. Dualità di Lefschetz

Esiste un modo di estendere la dualità degli spazi vettoriali, purché si considerino topologie. Se V è uno spazio vettoriale destro sull'anello con divisione k (il quale sarà sempre pensato con la topologia discreta), possiamo considerare su $V^* = \operatorname{Hom}_k(V, k)$ la topologia della convergenza puntuale: gli intorni di zero sono perciò i sottoinsiemi di V^* che contengono un intorno di base della forma

$$\mathscr{W}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{\xi \in V^* : \xi(x_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Alternativamente, dato $X \subseteq V^*$, $\xi \in V^*$ appartiene alla chiusura di X se e solo se, per ogni $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$, esiste $\eta \in X$ tale che

$$\eta(x_i) = \xi(x_i), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Per indicare che su V^* poniamo una topologia, useremo la notazione $V^\#$.

Notiamo che, siccome k è discreto, $V^\#$ è uno spazio di Hausdorff. Se V ha dimensione finita, evidentemente la topologia su $V^\#$ è discreta; infatti se $x_1, \dots, x_n$ formano una base di V,

$$\mathscr{W}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{0\}.$$

Questo non è più vero quando la dimensione di V è infinita. La topologia così definita rende continue le operazioni di spazio vettoriale. Se poi diciamo che una rete (ξ_δ) è di Cauchy quando, per ogni $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$, esiste $\bar{\delta}$ tale che

$$\delta_1, \delta_2 \geq \bar{\delta} \implies \xi_{\delta_1} - \xi_{\delta_2} \in \mathscr{W}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

abbiamo che $V^\#$ è completo, nel senso che ogni rete di Cauchy converge (esercizio).

Attenzione: questo concetto di spazio vettoriale topologico non coincide con l'usuale quando k è il campo dei numeri reali. Ai nostri fini k ha sempre la topologia discreta.

Analizziamo meglio la topologia su $V^\#$. Abbiamo già osservato che è di Hausdorff e completa. Inoltre gli intorni di base dello zero che abbiamo fissato sono sottospazi *di codimensione finita.* Infatti il nucleo del morfismo

$$V^\# \to k^n \qquad \xi \mapsto (\xi(x_1), \xi(x_2), \dots, \xi(x_n))$$

è proprio $\mathscr{W}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Poiché un sottospazio di $V^\#$ è aperto se e solo se contiene un intorno di zero, abbiamo che, ogni sottospazio aperto di $V^\#$ ha codimensione finita.

Definizione 6.1. Uno spazio vettoriale sinistro V sull'anello con divisione k dotato di una topologia si dice *linearmente compatto* se

(1) è di Hausdorff;
(2) esiste una base di intorni di zero formata da sottospazi di V;
(3) per ogni sottospazio aperto U di V, $\dim V/U$ è finita;
(4) la topologia su V è completa.

Per quanto osservato, ogni $V^\#$ è linearmente compatto. Questa definizione in realtà è un'estensione di quella data in precedenza, dove la topologia considerata era quella discreta. È facile estendere la funzione sugli oggetti $V \mapsto V^\#$ a un funtore dalla categoria degli spazi vettoriali destri Mod-k a quella degli spazi vettoriali sinistri linearmente compatti k-LC (con le applicazioni lineari continue come morfismi).

Se ora V è uno spazio vettoriale sinistro linearmente compatto, possiamo considerare $V^\# = \operatorname{Chom}_k(V, k)$, lo spazio vettoriale destro dei morfismi *continui* di V in k (che è un sottospazio dello spazio duale usuale). Questo è estendibile in modo ovvio a un funtore dalla categoria degli spazi vettoriali sinistri linearmente compatti k-LC a quella degli spazi vettoriali destri Mod-k.

Lemma 6.2. *Se V è uno spazio vettoriale destro su k, esiste un morfismo naturale $\omega_V\colon V \to V^{\#\#}$ che è iniettivo.*

Dimostrazione. Definiamo $\omega_V(x) = \hat{x}$, dove $(\xi)\hat{x} = \xi(x)$. Che si tratti di un morfismo naturale è evidente, una volta dimostrato che effettivamente $\hat{x} \in \mathrm{Chom}_k(V^{\#}, k)$.

Ma un morfismo $V^{\#} \to k$ è continuo se e solo se il suo nucleo è aperto, perché k è discreto; $\ker \hat{x} = \mathscr{W}(x)$.

L'iniettività si dimostra come in precedenza, perché ogni elemento non nullo di V è parte di una base. □

Lemma 6.3. *Se V è uno spazio vettoriale sinistro linearmente compatto, esiste un morfismo naturale* (*continuo*) *$\omega_V\colon V \to V^{\#\#}$ che è iniettivo.*

Dimostrazione. Sia $x \in V$ e definiamo $\hat{x}\colon \mathrm{Chom}_k(V,k) \to k$ ponendo

$$\hat{x}(\xi) = (x)\xi.$$

L'unico problema da porsi allora è che ω_V sia continuo. Un intorno di base dello zero del codominio è della forma $\mathscr{W}(\xi_1,\dots,\xi_n)$; allora

$$\omega_V^{-1}(\mathscr{W}(\xi_1,\dots,\xi_n)) = \{x \in V : \hat{x}(\xi_i) = 0, i = 1,2,\dots,n\} = \bigcap_{1\le i\le n} \ker \xi_i,$$

che è aperto per l'ipotesi che $\xi_i \in \mathrm{Chom}_k(V,k)$.

Sia ora $x \in V$, $x \neq 0$. Ci serve trovare $\xi \in \mathrm{Chom}_k(V,k)$ tale che $(x)\xi \neq 0$. Per ipotesi V è di Hausdorff e quindi esiste un sottospazio aperto U di V tale che $x \notin U$. Lo spazio V/U ha dimensione finita e quindi esiste un morfismo $\eta\colon V/U \to k$ per il quale $(x+U)\eta \neq 0$. Componendo con la proiezione abbiamo il morfismo desiderato: esso è continuo perché il suo nucleo contiene U, quindi è aperto. □

Ci manca solo di verificare che i morfismi ω_V, per $V \in$ Mod-k oppure $V \in k$-LC siano suriettivi. In tal modo avremmo ottenuto una dualità che estende quella degli spazi di dimensione finita.

La suriettività di ω_V per $V \in k$-LC è sufficiente infatti perché ω_V sia un isomorfismo topologico.

Lemma 6.4. *Siano V e W spazi linearmente compatti su k e sia $f\colon V \to W$ un morfismo continuo. Allora, per ogni sottospazio chiuso L di V, $(L)f$ è chiuso in W.*

Dimostrazione. Omissis. □

Corollario 6.5. *Siano V e W spazi linearmente compatti su k e sia $f\colon V \to W$ un morfismo continuo e biiettivo; allora f^{-1} è continuo.*

Dimostrazione. Sia U un sottospazio aperto di V; allora $(U)f$ è chiuso in W e ha codimensione finita. Essendo intersezione di un insieme di sottospazi aperti di W, ne basta un insieme finito, quindi anche $(U)f$ è aperto. □

Proposizione 6.6. *Sia $V \in k$-LC; allora $\omega_V\colon V \to V^{\#\#}$ è suriettivo.*

Dimostrazione. Ci basta dimostrare che l'immagine di ω_V è densa. Sia $\beta \in V^{\#\#}$ e consideriamo $\xi_1,\dots,\xi_n \in V^{\#}$. Dobbiamo trovare $x \in V$ tale che $\hat{x} - \beta \in \mathscr{W}(\xi_1,\dots,\xi_n)$.

Sia $X = \{((x)\xi_1,\dots,(x)\xi_n) : x \in V\}$, sottospazio di k^n e sia $y = (\beta(\xi_1),\dots,\beta(\xi_n)) \in k^n$. Se $y \notin X$, esiste $g\colon k^n \to k$ tale che $(X)g = 0$ e $(y)g \neq 0$. Tale morfismo è dato da

$$(t_1,\dots,t_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} t_i a_i,$$

per opportuni $a_1,\dots,a_n \in k$. Dunque, per $x \in V$,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (x)\xi_i a_i = (x)\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i.$$

Perciò il morfismo $\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$ è nullo. D'altra parte

$$0 \neq (y)g = \sum_{i=1}^{n} \beta(\xi_i)a_i = \sum_{i=1}^{n} \beta(\xi_i a_i) = \beta\Bigl(\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i\Bigr) = \beta(0) = 0,$$

contraddizione. □

Proposizione 6.7. *Per ogni* $V \in \text{Mod-}k$*, il morfismo* ω_V *è suriettivo.*

Dimostrazione. Se ω_V non è suriettivo, esiste $\beta\colon V^{\#\#} \to k$ tale che $\beta \neq 0$ e $\beta(\operatorname{Im}\omega_V) = 0$. Ora $\beta \in V^{\#\#\#}$ e, per quanto appena dimostrato, $\beta = (\xi)\omega_{V^\#} = \hat{\hat{\xi}}$, per un opportuno $\xi \in V^\#$. Se $x \in V$, abbiamo

$$\xi(x) = (\xi)\hat{x} = \hat{\hat{\xi}}(\hat{x}) = \beta(\hat{x}) = 0$$

quindi $\xi = 0$ e anche $\beta = 0$, contraddizione. □

7. Dualità di Pontryagin

Esiste una dualità molto simile a quella della sezione precedente, ma definita sui gruppi abeliani. Il gruppo additivo $\mathbf{R}$ dei numeri reali, con la topologia usuale, è localmente compatto e $\mathbf{Z}$ ne è un sottogruppo chiuso. È noto che $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, con la topologia quoziente, è topologicamente isomorfo al gruppo dei numeri complessi di modulo uno, che è compatto.

Tutti i gruppi che considereremo saranno denotati additivamente. In questa parte non abbiamo a che fare con anelli, quindi scriveremo tutti i morfismi a sinistra.

Definizione 7.1. Sia G un gruppo abeliano. Il duale (secondo Pontryagin) di G è il gruppo $G^* = \operatorname{Hom}(G, \mathbf{T})$ dotato della topologia della convergenza puntuale.

Una base di intorni di zero in G^* è data dagli insiemi della forma

$$\mathscr{W}(x_1, \dots, x_n; U) = \{\xi \in G^* : \xi(x_i) \in U, i = 1, \dots, n\}$$

per $n > 0$, dove $x_1, \dots, x_n \in G$ e U è un intorno di zero in $\mathbf{T}$ (cioè $U = \pi(U')$, dove $\pi \colon \mathbf{R} \to \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ è la proiezione e U' è un intorno di zero in $\mathbf{R}$).

Proposizione 7.2. *Se G è un gruppo abeliano, G^* è un gruppo topologico compatto.*

Dimostrazione. Lasciamo per esercizio la verifica che G^* è effettivamente un gruppo topologico. Inoltre l'applicazione

$$G^* \to \mathbf{T}^G, \qquad \xi \mapsto (\xi(x))_{x \in G}$$

è ovviamente un'applicazione continua, se su $\mathbf{T}^G$ poniamo la topologia prodotto. Si verifichi che è un'immersione topologica con immagine chiusa. Siccome $\mathbf{T}^G$ è compatto per il teorema di Tychonov, abbiamo la tesi. □

Proposizione 7.3. *Esiste un funtore controvariante dalla categoria* **Ab** *dei gruppi abeliani nella categoria dei gruppi abeliani compatti* **CAb**.

Lasciamo per esercizio di esplicitare la definizione.

Esempio 7.4. Calcoliamo alcuni duali facili. Il primo è banale: $\mathbf{Z}^*$ è topologicamente isomorfo a $\mathbf{T}$.

Esaminiamo il gruppo di Prüfer $\mathbf{Z}(p^\infty)$. Se $\xi \colon \mathbf{Z}(p^\infty) \to \mathbf{T}$, la sua immagine è un gruppo di torsione, quindi è contenuta in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Siccome poi $\mathbf{Z}(p^\infty)$ è un p-gruppo, l'immagine di ξ è contenuta proprio in $\mathbf{Z}(p^\infty)$, che è definito come l'insieme degli elementi di $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ annullati da una potenza di p. Dunque $\mathbf{Z}(p^\infty)^*$ coincide con il gruppo degli endomorfismi di $\mathbf{Z}(p^\infty)$, che è il gruppo degli interi p-adici J_p e che la topologia è proprio la topologia p-adica.

Con considerazioni analoghe, si vede che $\mathbf{Z}(p^n)^*$ è isomorfo al gruppo degli endomorfismi di $\mathbf{Z}(p^n)$ che si può identificare con $\mathbf{Z}(p^n)$ (finito, dunque discreto).

Il teorema di struttura dei gruppi abeliani finiti permette allora di dire che il duale di un gruppo finito G può essere identificato con G.

Definizione 7.5. Se G è un gruppo abeliano compatto, il suo duale è $G^* = \operatorname{Chom}(G, \mathbf{T})$, il gruppo dei morfismi continui $G \to \mathbf{T}$.

Anche questa corrispondenza sugli oggetti può essere facilmente estesa a un funtore **CAb** → **Ab**.

Preso G discreto (cioè in **Ab**), possiamo definire in modo analogo a quanto fatto in precedenza

$$\omega_G \colon G \to G^{**} \qquad x \mapsto \hat{x}, \qquad \hat{x} \colon \xi \in G^* \mapsto \xi(x) \in \mathbf{T}.$$

Effettivamente $\hat{x}$ è continuo (esercizio).

Allo stesso modo possiamo definire, per G compatto,

$$\omega_G \colon G \to G^{**} \qquad x \mapsto \hat{x}, \qquad \hat{x} \colon \xi \in G^* \mapsto \xi(x) \in \mathbf{T}$$

e questo morfismo è continuo. Se infatti $\xi \in G^*$ e U è un intorno di zero in $\mathbf{T}$, abbiamo

$$\omega_G^{-1}(\mathscr{W}(\xi; U)) = \{x \in G : \xi(x) \in U\} = \xi^{-1}(U)$$

che è un intorno di zero in G perché ξ è continuo.

Si dimostri che i due funtori appena costruiti sono aggiunti sulla destra. Abbiamo anche in questo caso una dualità: lo prova il teorema seguente la cui dimostrazione poggia sul teorema di estensione: *Se G è un gruppo compatto, H un sottogruppo chiuso, $x \in G \setminus H$ e $\xi \in \mathrm{Chom}(H, \mathbf{T})$, allora esiste $\eta \in \mathrm{Chom}(G, \mathbf{T})$ che estende ξ e tale che $\eta(x) \neq 0$.* La dimostrazione di questo risultato è troppo lunga per poter essere esposta qui. Non daremo nemmeno la dimostrazione del teorema seguente.

Teorema 7.6. *Se G è un gruppo abeliano discreto oppure compatto, il morfismo ω_G è un isomorfismo in* **Ab** *o in* **CAb** *rispettivamente.*

Questa dualità può essere estesa ai gruppi abeliani localmente compatti, definendo $G^* = \mathrm{Chom}(G, \mathbf{T})$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Se G è discreto, i suoi sottoinsiemi compatti sono finiti e si ritrova la topologia della convergenza puntuale; se G è compatto, la topologia che si ottiene è quella discreta: ciò si basa sull'osservazione $\mathbf{T}$ ha intorni di zero che non contengono alcun sottogruppo non nullo.

Si dimostra, per esempio, che $\mathbf{R}^*$ è identificabile con $\mathbf{R}$ stesso. Ovviamente, siccome $\mathbf{Z}^* = \mathbf{T}$, avremo che $\mathrm{Chom}(\mathbf{T}, \mathbf{T})$ è canonicamente isomorfo a $\mathbf{Z}$, cioè gli endomorfismi continui di $\mathbf{T}$ sono le moltiplicazioni per i numeri interi.

Ancora, per proprietà funtoriali, il duale di un prodotto topologico di gruppi compatti è isomorfo alla somma diretta dei duali.

Vediamo alcune applicazioni. Una topologia di gruppo su G si dice precompatta se, per ogni intorno di zero U, esistono $x_1, \dots, x_n \in G$ tali che

$$G = (x_1 + U) \cup (x_2 + U) \cup \cdots \cup (x_n + U).$$

Per chi conosce la teoria dei gruppi abeliani topologici, questo equivale al fatto che il completamento di G è compatto.

Teorema 7.7. *Ogni gruppo abeliano ammette una topologia di Hausdorff precompatta.*

Dimostrazione. Consideriamo il gruppo $H = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{T})$, ma con la topologia discreta. Il gruppo H^* è compatto e il morfismo $b_G \colon G \to H^*$ definito da $b_G(x) = \hat{x}$, dove al solito $\hat{x}(\xi) = \xi(x)$, è iniettivo. La chiusura dell'immagine di b_G è allora un gruppo topologico compatto e b_G definisce su G una topologia precompatta e di Hausdorff. □

La chiusura dell'immagine di b_G si chiama *compattificazione di Bohr* di G e si indica con bG. Essa è la minima, nel senso seguente.

Teorema 7.8. *Sia G un gruppo abeliano discreto e sia $f \colon G \to H$ un morfismo nel gruppo compatto H. Allora esiste un unico morfismo continuo $g \colon bG \to H$ tale che $g \circ b_g = f$.*

Dimostrazione. Siccome l'immagine di b_G è densa, l'unicità è ovvia. Avendo $f \colon G \to H$, possiamo definire $f^* \colon H^* \to \mathrm{Hom}(G, \mathbf{T})$ e ottenere il morfismo continuo $f^{**} \colon \mathrm{Hom}(G, \mathbf{T})^* \to H^{**}$.

Abbiamo allora il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b_G"'] & H \arrow[d, "\omega_H", "\cong"'] \\
\mathrm{Hom}(G,\mathbf{T})^* \arrow[r, "f^{**}"'] \arrow[ur, dashed] & H^{**}
\end{tikzcd}$$

e, prendendo come g la restrizione di $\omega_H^{-1} \circ f^{**}$, abbiamo la tesi. □

Questa è una proprietà universale e perciò la compattificazione di Bohr è unica a meno di isomorfismi (in **CAb**).

Vediamo ora come alcune proprietà dei gruppi compatti hanno un corrispettivo algebrico.

Teorema 7.9. *Le seguenti proprietà di un gruppo compatto G sono equivalenti:*
(a) *G è totalmente sconnesso;*
(b) *G^* è di torsione;*
(c) $\bigcap_{n>0} nG = 0$*;*
(d) *G è ridotto.*

Teorema 7.10. *Le seguenti proprietà di un gruppo compatto G sono equivalenti:*
(a) *G è connesso;*
(b) *G^* è senza torsione;*
(c) *G è divisibile.*

Questo teorema ha una conseguenza puramente algebrica.

Corollario 7.11. *Siano G un gruppo senza torsione e D un gruppo divisibile. Allora* $\mathrm{Hom}(G, D)$ *è divisibile.*

Dimostrazione. Possiamo immergere D in una potenza $\mathbf{T}^\Lambda$ (algebricamente); questa immersione spezza in quanto D è divisibile. Dunque $\mathrm{Hom}(G, D)$ è isomorfo a un addendo diretto di $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{T}^\Lambda) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathbf{T})^\Lambda$. Ma $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{T})$ è, con la topologia della convergenza puntuale, proprio G^* che quindi è divisibile, per il teorema. Allora ogni potenza è divisibile e lo stesso per ogni addendo diretto di queste. □

Si provi, per esercizio, a dare una dimostrazione diretta di questo corollario, dimostrando prima che, se A è divisibile e senza torsione, allora $\mathrm{Hom}(A, B)$ è divisibile e senza torsione, per ogni gruppo B.

Bibliografia

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and categories of modules*, second ed., Graduate texts in Mathematics, vol. 13, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1992.
[2] P. N. Ánh, *Morita duality for commutative rings*, Comm. Algebra **18** (1990), no. 6, 1781–1788.
[3] D. Dikranjan, E. Gregorio, A. Orsatti, *Kasch bimodules*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **85** (1991), 147–160.
[4] G. Favero, E. Gregorio, *Self-linearly compact rings and dualities*, Abelian groups, module theory, and topology (Padua, 1997), Dekker, New York, 1998, pp. 179–203.
[5] K. Morita, *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A **6** (1958), 83–142.
[6] B. J. Müller, *Linear compactness and Morita duality*, J. Algebra **16** (1970), 60–66.
[7] A. Orsatti, *Una introduzione alla teoria dei moduli*, Aracne, Roma, 1996.
[8] L. S. Pontryagin, *Topological groups*, 2 ed., Gordon and Breach, New York, 1966.