Capitolo 1

Categorie

1.1 Insiemi e classi

Una delle idee della teoria delle categorie è di studiare *tutti i gruppi* oppure *tutti gli spazi vettoriali complessi*, per caratterizzarne le proprietà comuni.

È evidente che non esiste l'insieme di tutti i gruppi: su ogni insieme si può infatti definire un'operazione che lo renda un gruppo. Se l'insieme X è finito, ci basta considerare il gruppo $\mathbb{Z}/|X|\mathbb{Z}$ delle classi resto modulo $|X|$ che ha $|X|$ elementi. Se $f\colon \mathbb{Z}/|X|\mathbb{Z} \to X$ è una biiezione, possiamo definire un'operazione di gruppo su X ponendo

$$ab = f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b)).$$

La verifica delle proprietà è banale. Usando lo stesso metodo, è sufficiente vedere che per ogni insieme infinito X esiste un gruppo G con $|G| = |X|$. Se X è numerabile, basta considerare $\mathbb{Z}$. Se X non è numerabile, è facile vedere che l'insieme $\mathbb{Z}^{(X)}$ delle funzioni $f\colon X \to \mathbb{Z}$ tali che

$$\{\, x \in X : f(x) \neq 0 \,\} \quad \text{è finito}$$

ha la stessa cardinalità di X ed è un gruppo definendo, per $f, g \in \mathbb{Z}^{(X)}$,

$$f + g\colon X \to \mathbb{Z}, \qquad x \mapsto f(x) + g(x).$$

Ritroveremo più avanti questo esempio.

Per essere rigorosi, un gruppo non è solo un insieme, ma una coppia (X, φ), dove X è un insieme e $\varphi\colon X \times X \to X$ un'operazione di gruppo su X. Se possibile, questo peggiora le cose! Su ogni insieme non vuoto (con più di un elemento, ovviamente) è possibile definire più operazioni di gruppo. Se non esiste l'insieme di tutti gli insiemi, tanto meno esiste l'insieme di tutti i gruppi.

Diventa allora necessario impiegare il concetto di *classe*: una classe è definita da una proprietà, ma non ci è consentito di asserirne l'appartenenza a un'altra classe. Una classe, infatti, è un insieme se e solo se appartiene a qualche classe.

Il fatto che ci interessa è che il concetto di funzione si può impiegare anche con le classi: una funzione è una *classe di coppie ordinate*. Si possono dare le solite definizioni di dominio e codominio. Userò il termine *funzione* quando non sarà implicita la *totalità*, mentre per un'*applicazione* si richiede che sia definita su tutto il dominio. Quasi sempre saranno specificati dominio e codominio.

Date due classi X e Y, possiamo considerare la classe prodotto $X \times Y$, i cui elementi sono le coppie ordinate di elementi di X e Y, al modo solito.

Dopo questa breve introduzione, ci dimenticheremo dei problemi di teoria degli insiemi, finché non sia necessario prendere qualche cautela.

1.2 Grafi orientati

Un grafo orientato Γ è una quaterna $\Gamma = (V, E, \partial_0, \partial_1)$ dove V ed E sono classi, e $\partial_0\colon E \to V$, $\partial_1\colon E \to V$ sono applicazioni. Se $e \in E$, diremo che e è un lato del grafo di estremi $\partial_0(e)$ e $\partial_1(e)$; gli elementi di V sono i vertici del grafo.

Notiamo che non c'è alcuna restrizione sul "numero" di lati da un vertice a un altro.

Esempio 1.2.1. Sia $*$ un oggetto qualunque; il grafo orientato associato all'insieme X ha come insieme dei vertici $\{*\}$, come insieme dei lati X. Non c'è bisogno di specificare le due applicazioni, che sono ovvie.

Esempio 1.2.2. Sia X un insieme con una relazione d'ordine R. Possiamo definire un grafo orientato

$$\Gamma = (X, R, \pi_0, \pi_1)$$

dove π_0 e π_1 sono le applicazioni che associano alla coppia $(a, b) \in R$ rispettivamente a e b.

Esempio 1.2.3. Sia $\mathscr{V}$ la classe degli spazi vettoriali complessi. Possiamo considerare il grafo

$$(\mathscr{V}, \mathscr{L}, \partial_0, \partial_1)$$

dove $\mathscr{L}$ è la classe di tutte le applicazioni lineari $f\colon V \to W$, con $V, W \in \mathscr{V}$; per una tale applicazione lineare, si definisce $\partial_0(f) = V$ e $\partial_1(f) = W$.

Notiamo qui l'esigenza di specificare dominio e codominio di un'applicazione lineare, proprio per definire le due funzioni.

Nel terzo esempio possiamo vedere che il grafo ha una struttura in più rispetto a quello del primo. Infatti sappiamo *comporre* due applicazioni lineari.

C'è un altro aspetto che risulta dal secondo esempio. Se Y è un altro insieme ordinato dalla relazione S e un'applicazione $f\colon X \to Y$ rispetta l'ordine, nel senso che, per ogni $a, b \in X$,

$$\text{se } (a, b) \in R, \text{ allora } (f(a), f(b)) \in S,$$

possiamo definire anche un'applicazione $\hat{f}\colon R \to S$. Se indichiamo con (X, R, π_0^X, π_1^X) e (Y, R, π_0^Y, π_1^Y), si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_0^X"'] & S \arrow[d, "\pi_0^Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_1^X"'] & S \arrow[d, "\pi_1^Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

cioè $\pi_0^Y \circ \hat{f} = f \circ \pi_0^X$ e $\pi_1^Y \circ \hat{f} = f \circ \pi_1^X$.

Più in generale, dati i grafi $\Gamma = (V, E, \partial_0, \partial_1)$ e $\Gamma' = (V', E', \partial'_0, \partial'_1)$ un *morfismo di grafi* $f\colon \Gamma \to \Gamma'$ è dato da una coppia di applicazioni

$$f'\colon V \to V', \qquad f''\colon E \to E'$$

tali che valgano le uguaglianze espresse dai due diagrammi

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "\partial_0"'] & E' \arrow[d, "\partial'_0"] \\ V \arrow[r, "f'"] & V' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "\partial_1"'] & E' \arrow[d, "\partial'_1"] \\ V \arrow[r, "f'"] & V' \end{tikzcd}$$

cioè $\partial'_0 \circ f'' = f' \circ \partial_0$ e $\partial'_1 \circ f'' = f' \circ \partial_1$.

Si vede immediatamente che un morfismo di grafi fra due che si ottengano come nel primo esempio è determinato da un'applicazione fra gli insiemi.

1.3 Categorie

L'idea di base per definire le categorie è di considerare "tutti i gruppi", che sono legati fra loro dagli omomorfismi: non è il concetto di gruppo che è importante (o non solo, se si vuole), ma il fatto che si possa studiare un gruppo per mezzo di tutti gli omomorfismi che hanno quel gruppo come dominio o codominio.

Una categoria sarà un grafo, ma con in più la 'composizione' fra lati: i vertici del grafo sono gli oggetti (i gruppi), i lati sono i morfismi (gli omomorfismi fra gruppi). Si possono comporre morfismi solo quando il vertice di arrivo del primo è quello di partenza del secondo.

Definizione. Una categoria $\mathbf{C}$ consiste di

1. una classe $\operatorname{obj}(\mathbf{C})$, gli oggetti;
2. una classe $\operatorname{mor}(\mathbf{C})$, i morfismi;
3. due applicazioni $\partial_0, \partial_1\colon \operatorname{obj}(\mathbf{C}) \to \operatorname{mor}(\mathbf{C})$;
4. una funzione (parziale)

   $$\operatorname{mor}(\mathbf{C}) \times \operatorname{mor}(\mathbf{C}) \to \operatorname{mor}(\mathbf{C}), \qquad (f, g) \mapsto gf$$

   che risulta definita per tutte le coppie (f, g) per le quali

   $$\partial_1(f) = \partial_0(g)$$

   e con
   $$\partial_0(gf) = \partial_0(f), \qquad \partial_1(gf) = \partial_1(g).$$

Devono inoltre essere soddisfatte le seguenti proprietà:

1. per ogni $A \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$ esiste $1_A \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$ tale che, per ogni $f \in \operatorname{mor}(\mathbf{C})$ con $\partial_1(f) = A$ e ogni $g \in \operatorname{mor}(\mathbf{C})$ con $\partial_0(g) = A$ si abbia

   $$1_A f = f, \qquad g 1_A = g;$$

2. per ogni $f, g, h \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ con $\partial_1(f) = \partial_0(g)$ e $\partial_1(g) = \partial_0(h)$ si abbia
$$h(gf) = (hg)f.$$

La seconda condizione si può esprimere con un diagramma:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "hg"] & \\
& C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}$$

dove si è posto $A = \partial_0(f)$, $B = \partial_1(f) = \partial_0(g)$, $C = \partial_1(g) = \partial_0 h$ e $D = \partial_1(h)$.

Un diagramma di questo genere va inteso nel senso che, 'seguendo le possibili strade' da un vertice all'altro ed eseguendo le composizioni via via incontrate, il risultato è lo stesso.

La prima condizione, espressa con i diagrammi, è

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_A f"'] & A \arrow[d, "1_A"] \\
& A
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_A"'] & C \\
A \arrow[ur, "g1_A"'] &
\end{tikzcd}$$

dove $B = \partial_0(f)$ e $C = \partial_1(g)$.

La prima cosa da verificare è l'unicità del morfismo (questo è il nome che daremo ai lati del grafo) la cui esistenza è asserita dalla prima condizione.

Siano infatti x e y morfismi con dominio e codominio A tali che valgano $xf = f$, $yf = f$, $gx = g$ e $gy = g$ per ogni $f \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ e ogni $g \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ tali che $\partial_1(f) = A$ e $\partial_0(g) = A$. Ciò vale in particolare per $f = y$ nella prima e $g = x$ nella quarta; otteniamo dunque
$$xy = y, \qquad xy = x$$
da cui $x = y$.

Il morfismo 1_A si chiama il *morfismo identità* sull'oggetto A.

Esempio 1.3.1. La categoria **Set** ha come classe degli oggetti obj(**Set**) la classe di tutti gli insiemi; la classe dei morfismi mor(**Set**) è la classe di tutte le applicazioni; ∂_0 e ∂_1 associano a ogni applicazione fra insiemi rispettivamente il suo dominio e il suo codominio.

La verifica delle proprietà è banale.

Esempio 1.3.2. La categoria **Grp** ha come classe degli oggetti obj(**Grp**) la classe di tutti i gruppi; la classe dei morfismi è formata dagli omomorfismi fra gruppi, con le stesse convenzioni di prima per dominio e codominio.

Non si deve pensare che i morfismi fra categorie siano sempre applicazioni.

Esempio 1.3.3. La categoria delle matrici, **Mat** ha come classe degli oggetti l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Un morfismo da n in m è una matrice $m \times n$ a coefficienti complessi; come composizione si usa la moltiplicazione di matrici. Se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $n \times p$, allora AB è una matrice $m \times p$ che definisce appunto un morfismo con dominio p e codominio m:

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r, "A"] & m \\
p \arrow[u, "B"] \arrow[ur, "AB"'] &
\end{tikzcd}$$

Il morfismo identità è la matrice identità. Fra le matrici mettiamo anche le matrici vuote, di forma $0 \times n$; il prodotto di due matrici di forma compatibile, di cui una vuota, è la matrice vuota.

I termini usati di 'dominio' e 'codominio' dovrebbero suggerire l'analogia con i casi delle cosiddette categorie concrete (per esempio, **Set** e **Grp**) in cui i morfismi sono vere applicazioni. Se ne possono costruire quante se ne vuole in cui i morfismi *non* sono applicazioni. Per indicare che $f \in \operatorname{mor}(\mathbf{C})$ con $\partial_0(f) = A$ e $\partial_1(f) = B$, si scrive spesso $f\colon A \to B$.

Esempio 1.3.4. Sia $\mathbf{C}$ una categoria e sia X un oggetto di $\mathbf{C}$. Definiamo una nuova categoria $\mathbf{C}{\to}X$ in cui gli oggetti sono coppie ordinate (A, f_A), dove $A \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$ e $f_A\colon A \to X$. I morfismi sono solo alcuni morfismi in $\operatorname{mor}(\mathbf{C})$: precisamente, se $g\colon A \to B$ in $\operatorname{mor}(\mathbf{C})$, allora $g\colon (A, f_A) \to (B, f_B)$ se e solo se $f_B g = f_A$.

La composizione e il morfismo identità sono definiti in modo ovvio.

Si costruisca analogamente una categoria $X{\to}\mathbf{C}$ (con morfismi da X).

Data la categoria $\mathbf{C}$ e due suoi oggetti A e B, si definisce

$$\mathbf{C}(A, B) = \{\, f \in \operatorname{mor}(\mathbf{C}) : \partial_0(f) = A, \partial_1(f) = B \,\}.$$

In tutti i casi interessanti si fa l'ipotesi supplementare che questa classe sia un insieme.

Esempio 1.3.5. Si possono costruire diverse categorie con la stessa classe di oggetti. Per esempio, date le relazioni $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$, possiamo definire la loro composizione come

$$SR = \{\, (a, c) : \text{esiste } b \in B \text{ con } (a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in S \,\}$$

La categoria **Rel** che ha come oggetti gli insiemi e come morfismi le relazioni, con questa composizione, è molto interessante. Per esempio, dati gli insiemi X e Y, possiamo definire in modo molto naturale una biiezione

$$\mathbf{Rel}(X, Y) \to \mathbf{Rel}(Y, X), \qquad R \mapsto R^{\#}$$

usando la relazione opposta: $R^{\#} = \{(a, b) : (b, a) \in R\}$. Anche qui il morfismo identità su X è l'applicazione identità (che è una relazione fra X e X).

Un altro esempio molto importante è dato dai 'sistemi di deduzione'. Fissiamo un linguaggio formale L e un insieme D di regole di deduzione. Consideriamo la categoria $\mathbf{L}_D$ in cui gli oggetti sono le formule del linguaggio L e i morfismi sono le dimostrazioni: ogni deduzione, secondo le regole in D, $\varphi \vdash \psi$ definisce un morfismo $f\colon \varphi \to \psi$. Si suppone che fra le regole ci sia che $\varphi \vdash \varphi$ e che l'ovvia concatenazione di due dimostrazioni $\alpha \vdash \beta$ e $\beta \vdash \gamma$ sia una dimostrazione di $\alpha \vdash \gamma$; queste condizioni forniscono il morfismo identità e la composizione di morfismi.

Un insieme parzialmente ordinato $X, \leq$ definisce una categoria $\mathbf{X}$ in cui l'insieme degli oggetti è X e, dati $a, b \in X$, si pone

$$\mathbf{X}(a, b) = \begin{cases} \{*\} & \text{se } a \leq b, \\ \emptyset & \text{se } a \not\leq b. \end{cases}$$

Qui $*$ indica un elemento qualsiasi, per esempio la stessa coppia (a, b); quindi avremmo $\operatorname{mor}(\mathbf{X}) = {\leq}$.

Molto spesso è conveniente dare i morfismi di una categoria in questo modo, specificando quali siano i morfismi di dato dominio e dato codominio. Nel caso dell'insieme ordinato X è ovvio quale sia la composizione: essa è definita perché la relazione $\leq$ è transitiva. La riflessività della relazione fornisce il morfismo identità. La proprietà antisimmetrica dice qualcosa di più, che non sarebbe richiesto per avere una categoria.

In generale un *preordine* è una categoria in cui l'insieme dei morfismi da un oggetto a un altro è vuoto oppure ha un solo elemento.

Un caso particolare di preordini sono le *categorie discrete*, in cui ci sono solo morfismi identità. Le più facili sono la categoria $\mathbf{0}$, in cui la classe degli oggetti è vuota (e tale è anche la classe dei morfismi); segue la categoria $\mathbf{1}$ che ha un solo oggetto e il solo morfismo identità necessario.

La più semplice categoria non discreta è un preordine: la denoteremo con $\mathbf{2}$; essa ha due oggetti: $\operatorname{obj}(\mathbf{2}) = \{0, 1\}$, i due necessari morfismi identità e un morfismo $0 \to 1$. Ovviamente si tratta della categoria costituita dall'insieme ordinato $2 = \{0, 1\}$ con l'ordine usuale. Analogamente si può considerare $\mathbf{n}$ che si ottiene dall'insieme ordinato $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Quanti morfismi ci sono in $\mathbf{n}$?

Esempio 1.3.6. Dato un oggetto X di $\mathbf{C}$ definiamo la categoria $\mathbf{C}{\downarrow}X$, i cui oggetti sono i morfismi in $\operatorname{mor}(\mathbf{C})$ con codominio X. I morfismi in $\mathbf{C}{\downarrow}X(a, b)$, dove $a\colon A \to X$ e $b\colon B \to X$ in $\mathbf{C}$ sono quegli elementi $f \in \mathbf{C}(A, B)$ tali che $bf = a$. Si definiscano i morfismi identità e la composizione, verificando le condizioni richieste.

Analogamente, si può costruire la categoria $\mathbf{C}{\uparrow}X$. Una descrizione astratta è $\mathbf{C}{\uparrow}X = (\mathbf{C}^{\mathrm{op}}{\downarrow}X)^{\mathrm{op}}$.

Date due categorie $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ possiamo definire la categoria prodotto $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ in cui la classe degli oggetti è $\operatorname{obj}(\mathbf{C}) \times \operatorname{obj}(\mathbf{D})$ e la classe dei morfismi è definita in modo ovvio. Lo si precisi e si scriva esplicitamente la regola di composizione.

1.4 Sottocategorie, categoria opposta, principio di dualità

Date due categorie $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ diremo che $\mathbf{D}$ è una *sottocategoria* di $\mathbf{C}$ se

1. $\operatorname{obj}(\mathbf{D}) \subseteq \operatorname{obj}(\mathbf{C})$,
2. per ogni $A, B \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$, $\mathbf{D}(A, B) \subseteq \mathbf{C}(A, B)$,
3. la composizione e le identità in $\mathbf{D}$ coincidono con quelli in $\mathbf{C}$.

La sottocategoria $\mathbf{D}$ è *piena* se, per ogni $A, B \in \mathbf{D}$ vale $\mathbf{D}(A, B) = \mathbf{C}(A, B)$. È evidente che per definire una sottocategoria piena basta specificare la sottoclasse degli oggetti.

Esempio 1.4.1. Non è detto che una sottocategoria sia piena. Non lo è **Set** come sottocategoria di **Rel**. Un'altra sottocategoria non piena di **Set** ha come oggetti tutti gli insiemi e come morfismi le applicazioni iniettive.

Se $\mathbf{X}$ è costruita da un insieme parzialmente ordinato X, una sua sottocategoria piena è semplicemente un sottoinsieme di X con l'ordine indotto.

Data una categoria $\mathbf{C}$ possiamo definirne un'altra, che denoteremo con $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, in cui le classi degli oggetti e dei morfismi sono le stesse, ma semplicemente scambiamo fra loro le applicazioni ∂_0 e ∂_1, rovesciando anche la notazione delle composizioni. Questa categoria è la *categoria opposta* di $\mathbf{C}$.

Per maggiore chiarezza, quando un oggetto $A \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$ e un morfismo $f \in \operatorname{mor}(\mathbf{C})$ sono considerati come oggetto e morfismo nella categoria opposta li denoteremo con A^{op} e f^{op}.

Se di due morfismi $f, g \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ esiste la composizione gf, allora esiste la composizione $g^{\mathrm{op}} f^{\mathrm{op}} \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})$ e si ha

$$f^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} = (gf)^{\mathrm{op}}.$$

I morfismi identità in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ sono gli stessi che in $\mathbf{C}$. L'etichetta '$^{\mathrm{op}}$' su oggetti e morfismi non ha alcun vero significato, serve solo a ricordare dove stiamo lavorando. Ovviamente $\mathbf{C}^{\mathrm{op}\,\mathrm{op}} = \mathbf{C}$.

La possibilità di definire la categoria opposta ha una conseguenza molto interessante: se un enunciato nel linguaggio della teoria delle categorie (non l'abbiamo precisato, ma non è difficile costruirlo) vale in ogni categoria, allora il suo enunciato duale, che si ottiene scambiando ∂_0 con ∂_1 e l'ordine nelle composizioni di morfismi, vale in ogni categoria.

Ovviamente questo non dice che di un certo enunciato valido in *una* categoria, il suo duale vale in quella categoria; sarà invece certamente valido nella categoria opposta.

1.5 Morfismi mono, epi e principali; isomorfismi

Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è iniettiva se e solo se, per ogni insieme A e ogni applicazione $g, h\colon A \to X$, se $fg = fh$, allora $g = h$.

Sia infatti f iniettiva; se $a \in A$, dall'ipotesi $fg(a) = fh(a)$ deduciamo che $g(a) = h(a)$. Viceversa, supponiamo vera la condizione e siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Possiamo considerare le applicazioni $g\colon \{0\} \to X$ e $h\colon \{0\} \to X$ definite da $g(0) = x_1$ e $h(0) = x_2$. Allora $fg = fh$, quindi $g = h$ e perciò $x_1 = x_2$.

Il succo di questo ragionamento è che possiamo definire il conccetto di applicazione iniettiva solo considerando le composizioni di applicazioni e non gli elementi. Perciò la definizione ha senso in ogni categoria.

Definizione. Un morfismo $f\colon X \to Y$ nella categoria $\mathbf{C}$ si dice un *monomorfismo* (per brevità, un *mono*) quando, per ogni $\alpha, \beta\colon A \to X$, da $f\alpha = f\beta$ segue $\alpha = \beta$.

Un morfismo $f\colon X \to Y$ nella categoria $\mathbf{C}$ si dice un *epimorfismo* (per brevità, un *epi*) quando, per ogni $\alpha, \beta\colon Y \to A$, da $\alpha f = \beta f$ segue $\alpha = \beta$.

È evidente che f è un mono in $\mathbf{C}$ se e solo se f^{op} è un epi in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.

Definizione. Un morfismo $f\colon X \to Y$ è un *isomorfismo* se esiste un morfismo $g\colon Y \to X$ tale che $gf = 1_X$ e $fg = 1_Y$. In tal caso diremo che X e Y sono oggetti isomorfi; la relazione di isomorfismo è di equivalenza. Scriveremo $X \cong Y$.

Chiaramente un isomorfismo è sia mono che epi (lo si verifichi). Tuttavia non è vero, in generale, che un morfismo mono e epi sia un isomorfismo.

Esempio 1.5.1. Nella categoria degli anelli **Ring** un isomorfismo è un morfismo biiettivo. Si può dimostrare che ogni mono è iniettivo. Tuttavia l'inclusione degli interi nei razionali è un epi che non è suriettivo.

Si costruisca un esempio di sottocategoria $\mathbf{D}$ di una categoria $\mathbf{C}$ in cui ci siano oggetti X e Y di $\mathbf{D}$ che siano isomorfi come oggetti di $\mathbf{C}$ ma non come oggetti di $\mathbf{D}$.

In una categoria concreta come **Ring** o **Grp**, ogni morfismo che sia iniettivo (suriettivo) come applicazione è mono (epi). Il viceversa, come si vede da **Ring** non è sempre vero.

Nella categoria $\mathbf{X}$ costruita da un insieme ordinato X, ogni morfismo è mono e epi; gli isomorfismi sono solo le identità.

Proposizione 1.5.2. *Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ morfismi in $\mathbf{C}$. Se f e g sono mono, allora gf è mono; se f e g sono epi, allora gf è epi. Se gf è mono, allora f è mono; se gf è epi, allora g è epi.*

Dimostrazione. Vediamo la prima asserzione, la seconda segue per dualità. Se $gf\alpha = gf\beta$, possiamo dire che $f\alpha = f\beta$ e quindi che $\alpha = \beta$.

Vediamo la quarta asserzione, la terza segue per dualità. Se $\alpha g = \beta g$ vale anche $\alpha gf = \beta gf$, da cui $\alpha = \beta$. □

Definizione. Un mono $f\colon A \to B$ si dice *spezzante* se esiste un morfismo $g\colon B \to A$ tale che $gf = 1_A$.

Un epi $f\colon A \to B$ si dice *spezzante* se esiste un morfismo $g\colon B \to A$ tale che $fg = 1_B$.

È facile verificare che, nel caso in cui f sia un mono spezzante con $gf = 1_A$, allora g è un epi spezzante. Infatti, se abbiamo $\alpha g = \beta g$, si ha anche $\alpha gf = \beta gf$, da cui $\alpha = \beta$. Dualmente nell'altro caso.

Un mono spezzante che sia epi è un isomorfismo. Per dualità, un epi spezzante che sia mono è un isomorfismo.

Definizione. Un morfismo $f\colon A \to B$ si dice *principale* se, per ogni $g\colon A \to B$, esiste $\varphi\colon A \to A$ tale che

$$g = f\varphi.$$

Proposizione 1.5.3. *Sia $f\colon A \to B$ nella categoria $\mathbf{C}$.*

1. *Se f è un epi spezzante, allora f è principale.*
2. *Se f è principale ed esiste $g\colon A \to B$ epi, allora f è epi.*

Dimostrazione. (1) Sia $h\colon B \to A$ tale che $fh = 1_B$ e sia $g\colon A \to B$. Allora $g = 1_B g = (fh)g = f(hg)$.

(2) Possiamo scrivere $g = f\varphi$. Siccome questa composizione è epi, anche f lo è per 1.5.2. □

1.6 Oggetti speciali

Un oggetto 0 nella categoria $\mathbf{C}$ si dice *iniziale* se, per ogni oggetto $A \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$ esiste un unico morfismo $f \in \mathbf{C}(0, A)$.

Due oggetti iniziali sono isomorfi. Infatti, se $0'$ è un altro oggetto iniziale, esistono un unico morfismo $f\colon 0 \to 0'$ e un unico morfismo $g\colon 0' \to 0$. Allora la composizione gf è l'unico morfismo $0 \to 0$, che deve essere il morfismo identità. Perciò $gf = 1_0$ e, analogamente, $fg = 1_{0'}$.

Esempio 1.6.1. Nella categoria **Ring** degli anelli esiste un oggetto iniziale, l'anello $\mathbb{Z}$ degli interi.

Nella categoria **Set** degli insiemi, l'oggetto iniziale è l'insieme vuoto.

Nella categoria **X** di un insieme parzialmente ordinato, l'oggetto iniziale, se esiste, è il minimo.

Nel secondo esempio l'oggetto iniziale è unico. In generale non si può asserirne l'esistenza; l'unicità vale solo a meno di isomorfismi.

La definizione duale è quella di oggetto terminale: un oggetto T si dice *terminale* se, per ogni oggetto A di $\mathbf{C}$ esiste un unico morfismo $A \to T$. Dualmente agli oggetti iniziali, anche quelli terminali sono unici, se esistono, a meno di isomorfismi.

Esempio 1.6.2. Nella categoria **Set** ogni insieme con un solo elemento è terminale.

Nella categoria **Ring** degli anelli, l'anello nullo con un unico elemento $0 = 1$ è terminale.

Nella categoria **X** di un insieme parzialmente ordinato, l'oggetto terminale, se esiste, è il massimo.

Nella categoria dei gruppi, un gruppo banale con un solo elemento è sia iniziale che terminale.

Un oggetto si dice *oggetto zero* se è sia iniziale che terminale. Se 0 è un oggetto zero in $\mathbf{C}$ e $A, B \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, esiste un unico morfismo $0_{AB}\colon A \to B$ che si fattorizza attraverso 0: basta prendere l'unico morfismo $A \to 0$ e l'unico morfismo $0 \to B$ e comporli; l'unicità è ovvia.

Il morfismo 0_{AB} così costruito non dipende dall'oggetto nullo impiegato. Sia infatti $0'$ un altro oggetto nullo. Indichiamo con $h\colon 0 \to 0'$, $h'\colon 0' \to 0$, $f\colon A \to 0$, $f'\colon A \to 0'$, $g\colon 0 \to B$ e $g'\colon 0' \to B$ i morfismi (unici) fra questi oggetti. Allora $1_0 = h'h$ e

$$0_{AB} = gf = g1_0f = g(h'h)f = (gh')(hf) = g'f',$$

infatti $hf\colon A \to 0'$, quindi $hf = f'$ e, analogamente, $gh' = g'$.

1.7 Prodotti e coprodotti

Dati due gruppi A e B, possiamo facilmente dotare l'insieme $A \times B$ di una struttura di gruppo, ponendo

$$(a, b)(a', b') = (aa', bb').$$

Verificare gli assiomi di gruppo per questa operazione è banale. La particolarità di questo gruppo è di essere essenzialmente determinato dai due morfismi $p_A\colon A\times B \to A$ e $p_B\colon A\times B \to B$. Infatti, se G è un gruppo con due morfismi $f_A\colon G \to A$ e $f_B\colon G \to B$, allora esiste un unico morfismo $f\colon G \to A \times B$ tale che

$$p_Af = f_A, \quad p_Bf = f_B.$$

Basta infatti definire $f(x) = (f_A(x), f_B(x))$. Che questo sia un morfismo di gruppi è facile da vedere; l'unicità è ovvia.

Di conseguenza, se Q è un gruppo, con due morfismi $q_A\colon Q \to A$ e $q_B\colon Q \to B$ con la stessa proprietà appena dimostrata per la terna $(A \times B, p_A, p_B)$, esistono

- un unico morfismo $\varphi\colon Q \to A \times B$ tale che $p_A\varphi = q_A$, $p_B\varphi = q_B$,
- un unico morfismo $\psi\colon A \times B \to Q$ tale che $q_A\psi = p_A$, $q_B\psi = p_B$.

Se componiamo, abbiamo

$$p_A\varphi\psi = q_A\psi = p_A, \quad p_B\varphi\psi = q_B\psi = p_B.$$

Ma siccome $p_A1_{A\times B} = p_A$ e $p_B1_{A\times B} = p_B$, dall'unicità abbiamo che $\varphi\psi = 1_{A\times B}$. Analogamente $\psi\varphi = 1_Q$.

Possiamo notare che nel ragionamento precedente, non abbiamo usato alcuna proprietà specifica dei gruppi, ma solo composizioni di morfismi e la proprietà del prodotto $A \times B$.

Definizione. Dati gli oggetti A e B nella categoria $\mathbf{C}$, un *prodotto* di A e B è una terna (P, p_A, p_B) dove $P \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, $p_A\colon P \to A$, $p_B\colon P \to B$ e, per ogni terna (C, f_A, f_B), con $C \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, $f_A\colon C \to A$ e $f_B\colon C \to B$, esiste un unico morfismo $f\colon C \to P$ tale che

$$p_Af = f_A, \quad p_Bf = f_B.$$

Questo unico morfismo f si denota con $\langle f_A, f_B\rangle_P$.

Il ragionamento precedente si può ripetere pari pari per dimostrare che, se la terna (Q, q_A, q_B) è un prodotto di A e B, allora

$$\langle q_A, q_B\rangle_P \colon Q \to P \quad \text{e} \quad \langle p_A, p_B\rangle_Q \colon P \to Q$$

sono isomorfismi inversi l'uno dell'altro. In altre parole un prodotto è determinato a meno di un unico isomorfismo.

Si usa, quando un prodotto di A e B esiste, denotarlo con $A \times B$, sottintendendo i due morfismi p_A e p_B e scrivendo $\langle f_A, f_B\rangle$ omettendo l'indice.

Un modo per ricordare la proprietà richiesta è di disegnarsi un diagramma:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[d, "\langle f_A, f_B\rangle"] \arrow[dr, "f_B"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B \end{tikzcd}$$

Esempio 1.7.1. Per la categoria degli insiemi, quella dei gruppi e quella degli anelli, il prodotto è dato dall'usuale prodotto insiemistico, aggiungendo la struttura di gruppo o di anello. C'è un motivo molto profondo per questo.

Sia X un insieme ordinato. Vogliamo capire che cosa sia, se esiste, un prodotto p fra a e b nella categoria $\mathbf{X}$. Abbiamo bisogno di morfismi $p \to a$ e $p \to b$, ciò che equivale a chiedere $p \le a$ e $p \le b$. Se poi abbiamo $q \to a$ e $q \to b$, deve esistere un morfismo $q \to p$ (le condizioni sulle composizioni qui sono superflue): se $q \le a$ e $q \le b$, dobbiamo avere $q \le p$. In altre parole, il prodotto, se esiste, è l'estremo inferiore di a e b.

Se esistono il prodotto di A e B e quello di C e D, dati i morfismi $f \colon A \to C$ e $g \colon B \to D$, abbiamo subito le composizioni $fp_A \colon A \times B \to C$ e $gp_B \colon A \times B \to D$. Con la proprietà del prodotto costruiamo dunque un unico morfismo $f \times g \colon A \times B \to C \times D$, per la precisione $f \times g = \langle fp_A, gp_B\rangle$, con la proprietà che $p_C(f \times g) = fp_A$ e $p_D(f \times g) = gp_B$. Il diagramma che riassume tutto questo è il seguente.

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] \arrow[dd, "f \times g"] & \\ A \arrow[dd, "f"'] & & B \arrow[dd, "g"] \\ & C \times D \arrow[dl, "p_C"] \arrow[dr, "p_D"'] & \\ C & & D \end{tikzcd}$$

Come ogni altro concetto nelle categorie, anche quello di prodotto ha un duale.

Definizione. Dati gli oggetti A e B nella categoria $\mathbf{C}$, un *coprodotto* di A e B è una terna (S, i_A, i_B) dove $S \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, $i_A \colon A \to S$, $i_B \colon B \to S$ e, per ogni terna (C, f_A, f_B), con $C \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, $f_A \colon A \to C$ e $f_B \colon B \to C$, esiste un unico morfismo $f \colon S \to C$ tale che

$$fi_A = f_A, \quad fi_B = f_B.$$

Questo unico morfismo f si denota con $\begin{pmatrix} f_A \\ f_B \end{pmatrix}_S$.

Come per i prodotti, useremo notazioni semplificate, quando un coprodotto esiste: ne denoteremo uno con $A \amalg B$. I diagrammi relativi si ottengono semplicemente rovesciando le frecce in quelli del prodotto.

Esempio 1.7.2. Il coprodotto nella categoria degli insiemi è l'unione disgiunta. Possiamo realizzare un coprodotto di A e B considerando l'insieme $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$.

Nella categoria **Ab** dei gruppi abeliani il coprodotto di due gruppi è, come oggetto, lo stesso del prodotto. Più complicato sarebbe descrivere il coprodotto in **Grp**.

In un insieme parzialmente ordinato il coprodotto coincide con l'estremo superiore.

Prodotti e coprodotti binari possono facilmente essere estesi a qualsiasi famiglia finita di oggetti. La proprietà che li definisce è evidente. Per induzione, affinché esistano tutti i prodotti finiti, è sufficiente che esistano tutti i prodotti binari.

Un prodotto 'unario' è semplicemente l'oggetto stesso. Che cos'è un 'prodotto di zero oggetti'? È un oggetto terminale. Come facciamo a capirlo? Il prodotto n-ario P di $A_1, \dots, A_n$ ha la proprietà che dati n morfismi $C \to A_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, esiste un unico morfismo $C \to P$ che soddisfa certe condizioni. Per un prodotto di zero fattori, i morfismi che vanno da C ai fattori non ci sono, ma ci deve essere un unico morfismo $C \to P$.

Definizione. Una categoria $\mathbf{C}$ è *cartesiana* quando ha tutti i prodotti finiti. Equivalentemente, quando ha tutti i prodotti binari e un oggetto terminale.

Esempio 1.7.3. Sia $\mathbf{EN}$ la categoria i cui oggetti sono coppie ordinate $A = (s(A), e_A)$, dove $s(A)$ è un insieme numerabile e $e_A \colon \omega \to s(A)$ è un'applicazione suriettiva. I morfismi $\mathbf{EN}(A, B)$ sono le applicazioni $f \colon s(A) \to s(B)$ per le quali esista una funzione ricorsiva totale $f' \colon \omega \to \omega$ tale che $e_B f' = f e_A$, cioè

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "e_A"'] & \omega \arrow[d, "e_B"] \\ s(A) \arrow[r, "f"] & s(B) \end{tikzcd}$$

Si dice che f' *rappresenta* f. Si ottiene un prodotto di due oggetti considerando una funzione ricorsiva biiettiva $\omega^2 \to \omega$, per esempio

$$h(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1.$$

Si espliciti la descrizione del prodotto in $\mathbf{EN}$.

Non è difficile scrivere la definizione di prodotto e coprodotto di un'arbitraria famiglia di oggetti.

1.8 Ugualizzatori

Supponiamo di avere due applicazioni lineari $f, g \colon V \to W$. È interessante conoscere dove queste applicazioni differiscono o, che è lo stesso, dove coincidono: poniamo

$$U = \{\, x \in V : f(x) = g(x) \,\}.$$

È evidente che U è un sottospazio di V; consideriamo l'applicazione (lineare) $i \colon U \to V$ di inclusione: è chiaro che $fi = gi$. Sia $h \colon X \to V$ un'altra applicazione lineare tale che $fh = gh$. Allora l'immagine di h è un sottospazio di U, quindi possiamo fattorizzare h come ih' definendo $h' \colon X \to U$ semplicemente come $h'(x) = h(x) \in U$. Si può facilmente notare che questa è l'unica fattorizzazione 'tramite i' di h.

La coppia (U, i) è univocamente determinata da questa proprietà, a meno di isomorfismi. Sia infatti (Y, j) è un'altra coppia con la proprietà che per ogni morfismo $h\colon X \to V$ tale che $fh = gh$ esiste un unico morfismo $h''\colon X \to Y$ con $jh'' = h$.

Allora, in particolare, $j = ih'$ e $i = jh''$. Quindi $i = ih'h''$; ma fra i morfismi $h\colon X \to V$ con $fh = gh$ c'è lo stesso i che ovviamente si fattorizza come $i = i1_U$. Per l'unicità, abbiamo allora $h'h'' = 1_U$. Analogamente $h''h' = 1_Y$.

Definizione. Siano $f, g\colon A \to B$ morfismi nella categoria $\mathbf{C}$. Un *ugualizzatore* di f e g è una coppia (E, i), con $i\colon E \to A$, tale che

- $fi = gi$;
- ogni morfismo $h\colon X \to A$ soddisfacente a $fh = gh$ si fattorizza in modo unico come $h = ih'$.

Lo stesso ragionamento di prima, che usa solo i morfismi e non la struttura di spazio vettoriale, mostra che un ugualizzatore, se esiste, è unico a meno di isomorfismi. Il diagramma che ricorda la definizione è il seguente, nel quale il pallino fra le due frecce parallele sta a indicare che quella parte di diagramma non è commutativa e la freccia tratteggiata è quella di cui si asserisce l'esistenza e unicità:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, dashed, "h'"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
E \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\bullet"] & B
\end{tikzcd}$$

Spesso ci si riferisce all'ugualizzatore solo specificando il morfismo i, come nella proposizione seguente.

Proposizione 1.8.1. *Ogni ugualizzatore è mono. Un ugualizzatore epi è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Supponiamo che $i\alpha = i\beta = \gamma$. Allora $f\gamma = g\gamma$, quindi γ si fattorizza in modo unico come $\gamma = i\gamma'$. Ne segue che $\gamma' = \alpha = \beta$.

Se i è epi, da $fi = gi$ segue $f = g$. Poiché allora $f1_A = g1_A$, esiste un unico morfismo h' tale che $ih' = 1_A$. Quindi i è un mono spezzante che è epi. □

La nozione duale è quella di *cougualizzatore*, definita dal diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\bullet"] & B \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "h"'] & & C \arrow[dl, dashed, "h'"] \\
& & X &
\end{tikzcd}$$

Ogni cougualizzatore è epi e un cougualizzatore mono è un isomorfismo.

Esempio 1.8.2. Nella categoria $\mathbf{Ab}$ dei gruppi abeliani basta calcolarsi un cougualizzatore di f e 0 (il morfismo nullo), perché è facile dimostrare che un cougualizzatore di f e g coincide con quello di $f - g$ e 0.

Sia allora $f\colon A \to B$ un morfismo di gruppi abeliani e si consideri allora il sottogruppo $H = f(A)$, l'immagine di f. La proiezione $p\colon B \to B/H$ è un cougualizzatore di f e 0.

Nella categoria $\mathbf{Set}$ il cougualizzatore di $f, g\colon A \to B$ si ottiene considerando l'insieme quoziente di B rispetto alla minima relazione di equivalenza su B che contiene tutte le coppie della forma $(f(a), g(a))$, per $a \in A$.

Molto legata alle nozioni di ugualizzatore e di prodotto è quella di prodotto fibrato (in inglese *pull back*). Vogliamo risolvere, in **Set** il problema schematizzato dal diagramma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "\varphi"] \arrow[ddr, bend right, "\psi"'] & & \\
& P \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
& B \arrow[r, "\beta"'] & C
\end{tikzcd}$$

in cui del morfismo denotato con la freccia tratteggiata si asserisce l'esistenza e l'unicità. Il quadrato inferiore sarà chiamato un *quadrato di prodotto fibrato*.

Cominciamo con il considerare solo i morfismi f e g; sappiamo allora che esiste un unico morfismo $k\colon X \to A \times B$ tale che $p_A k = \varphi$ e $p_B k = \psi$. Sappiamo inoltre che, per ipotesi, $\alpha\varphi = \beta\psi$.

Consideriamo dunque l'ugualizzatore (P, i) di αp_A e βp_B. Allora

$$\alpha p_A k = \alpha\varphi = \beta\psi = \beta p_B k$$

e dunque k si fattorizza in modo unico come $k = ih$, con $h\colon X \to P$. Perciò, ponendo $f = p_A i$ e $g = p_B i$, abbiamo risolto il problema.

Come in tutte le altre occasioni, si vede che la terna (P, f, g) è determinata a meno di isomorfismi. Notiamo anche che non abbiamo in alcun modo usato la categoria **Set**, solo il fatto che esistano i prodotti e gli ugualizzatori. Naturalmente, può accadere che in una categoria non esistano tutti i prodotti binari e tutti gli ugualizzatori, ma che un prodotto fibrato di una particolare coppia di morfismi $(\alpha\colon A \to C, \beta\colon B \to C)$ esista lo stesso. Tuttavia le categorie che ci interesseranno avranno prodotti e ugualizzatori, quindi il problema generale sarà poco rilevante.

Notiamo anche che, viceversa, l'esistenza di prodotti fibrati e di un oggetto terminale implicano l'esistenza di prodotti e di ugualizzatori. Per il prodotto basta considerare il diagramma di prodotto fibrato

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d] \\
B \arrow[r] & T
\end{tikzcd}$$

dove T è un oggetto terminale per rendersi conto che (P, f, g) è il prodotto di A e B. Per gli ugualizzatori, si considera il diagramma di prodotto fibrato

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "\langle 1_A, f\rangle"] \\
A \arrow[r, "\langle 1_A, g\rangle"] & A \times B
\end{tikzcd}$$

che esiste perché abbiamo già provato l'esistenza del prodotto. Ora

$$i = 1_A i = p_A \langle 1_A, f\rangle i = p_A \langle 1_A, g\rangle j = 1_A j = j.$$

La proprietà della coppia (E, i) di essere un ugualizzatore di f e g si verifica facilmente.

Il prodotto fibrato si scrive spesso come $A \times_C B$, sottintendendo i due morfismi $A \to C$ e $B \to C$.

Proposizione 1.8.3. *Dato il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

1. *se i due quadrati sono prodotti fibrati, anche il rettangolo esterno è un prodotto fibrato;*
2. *se il rettangolo esterno e il quadrato di destra sono prodotti fibrati, anche il rettangolo di sinistra è un prodotto fibrato.*

Proposizione 1.8.4. *Se il diagramma*

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & C \end{tikzcd}$$

è un prodotto fibrato e α è mono, allora anche g è mono.

Si lascia al lettore la definizione duale con i risultati relativi. Il concetto duale si chiama *coprodotto fibrato*, in inglese *push out*.

Si verifichi che il coprodotto fibrato di spazi vettoriali costruito sulla coppia di applicazioni $A \xleftarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B$ si può realizzare come lo spazio vettoriale $A \oplus B$ (che è isomorfo al prodotto), modulo il sottospazio $K = \{(\alpha(c), -\beta(c)) : c \in \mathbb{C}\}$.

Capitolo 2

Funtori e trasformazioni naturali

Lo scopo della teoria delle categorie non è di studiare una categoria alla volta, come quello della teoria dei gruppi non si limita alla classificazione di un gruppo per volta. Come per i gruppi si introduce il concetto di omomorfismo, così anche per le categorie è opportuno considerare come confrontarle fra loro.

Un omomorfismo di gruppi 'conserva la struttura'; analogamente possiamo vedere le applicazioni lineari, le applicazioni monotone fra insiemi ordinati, i morfismi di grafi e così via. La struttura di una categoria comprende oggetti, morfismi, composizione e identità. Dovremo quindi preservare questi: la definizione diventa allora molto naturale.

2.1 Funtori

Definizione. Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie. Un *funtore* da $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ è una coppia $F = (F_1, F_2)$, dove

$$F_1\colon \operatorname{obj}(\mathbf{C}) \to \operatorname{obj}(\mathbf{D}), \qquad F_2\colon \operatorname{mor}(\mathbf{C}) \to \operatorname{mor}(\mathbf{D})$$

sono applicazioni con le seguenti proprietà:

1. per ogni $f \in \operatorname{mor}(\mathbf{C})$, $\partial_0(F_2(f)) = F_1(\partial_0(f))$ e $\partial_1(F_2(f)) = F_1(\partial_1(f))$;
2. per ogni $A \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, $F_2(1_A) = 1_{F_1(A)}$;
3. se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ sono morfismi in $\mathbf{C}$, allora $F_2(gf) = F_2(g)F_2(f)$.

La prima condizione si esprime anche dicendo che $\partial_0 F_2 = F_1\partial_0$ e $\partial_1 F_2 = F_1\partial_1$. Un altro modo è di dire che F_2 induce applicazioni

$$F_2\colon \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{D}(F_1(A), F_1(B)).$$

Esempio 2.1.1. Il funtore 'distratto' $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ che 'dimentica' la struttura di gruppo, cioè associa a un gruppo l'insieme dei suoi elementi e a un morfismo sé stesso.

Se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono le categorie associate agli insiemi ordinati X e Y, un funtore $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ è semplicemente un'applicazione monotona $X \to Y$.

I funtori $\mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ sono particolarmente importanti. Ne possiamo definire molti; qui ha importanza l'assunzione che, per ogni coppia di oggetti A e B di $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}(A, B)$ sia un insieme.

Esempio 2.1.2. Sia X un oggetto fissato della categoria $\mathbf{C}$. Definiamo l'applicazione $F_1\colon \operatorname{obj}(\mathbf{C}) \to \operatorname{obj}(\mathbf{Set})$ ponendo
$$F_1(A) = \mathbf{C}(X, A).$$
Si tratta ora di definire l'applicazione F_2; dati $A, B \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, dobbiamo avere, per ogni $f\colon A \to B$, $F_2(f)\colon F_1(A) \to F_1(B)$, quindi un'applicazione che a ogni morfismo $X \to A$ associ un morfismo $X \to B$. La scelta è ovvia:
$$F_2(f)\colon \alpha \mapsto f\alpha.$$
La definizione è buona, perché dato $f\colon A \to B$ e $\alpha\colon X \to A$, si ha $f\alpha\colon X \to B$. Dunque si ha proprio $F_2(f)\colon \mathbf{C}(X, A) \to \mathbf{C}(X, B)$.

Se $f = 1_A$, è evidente che $F_2(1_A)$ è l'identità sull'insieme $\mathbf{C}(X, A) = F_1(A)$. La condizione sulla composizione è facile:
$$F_2(gf)(\alpha) = (gf)\alpha = g(f\alpha) = g(F_2(f)(\alpha)) = F_2(g)F_2(f)(\alpha),$$
cioè proprio $F_2(gf) = F_2(g)F_2(f)$.

Normalmente si omette la distinzione fra F_1 e F_2, usando semplicemente un simbolo. Il funtore dell'esempio precedente si denota spesso con $\mathbf{C}(X, -)$.

Esempio 2.1.3. Sia $\mathbf{Vett}_f$ la categoria degli spazi vettoriali di dimensione finita con le applicazioni lineari come morfismi. Sia data una scelta di basi in ciascuno spazio vettoriale (l'assioma di scelta per classi ce ne offre la possibilità): in altre parole abbiamo una funzione $\mathscr{B}$ che associa a ogni spazio vettoriale una sua base $\mathscr{B}(V)$. Definiamo un funtore $F_{\mathscr{B}}\colon \mathbf{Vett}_f \to \mathbf{Mat}$ associando a ogni spazio vettoriale la sua dimensione e a un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ la matrice associata rispetto alle basi $\mathscr{B}(V)$ e $\mathscr{B}(W)$.

Esempio 2.1.4. Un funtore $G\colon \mathbf{Mat} \to \mathbf{Vett}_f$ può essere definito assegnando all'oggetto $n \in \mathbb{N}$ lo spazio $\mathbb{C}^n$ e a una matrice l'applicazione lineare associata. Qui serve la convenzione sulle matrici vuote: l'applicazione lineare associata a una matrice vuota è l'applicazione nulla. Ovviamente $\mathbb{C}^0 = \{0\}$ è lo spazio vettoriale banale.

I due esempi precedenti sono legati: se facciamo la convenzione che la scelta delle basi operi sullo spazio $\mathbb{C}^n$ prendendone la base canonica, avremo che $GF(\mathbb{C}^n)$ è lo stesso $\mathbb{C}^n$ e, per ogni $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $GF(f) = f$. Analogamente, $FG(n) = n$ e $FG(A) = A$, per ogni matrice A. In generale, per uno spazio vettoriale, si ha che $GF(V)$ è isomorfo a V e l'isomorfismo è proprio quello che corrisponde alla scelta della base $\mathscr{B}(V)$.

Nel caso del funtore $\mathbf{C}(X, -)$, si 'tiene fissa la prima variabile'. È possibile con la seconda? Certamente, se Y è un oggetto di $\mathbf{C}$, possiamo considerare, per ogni oggetto A, l'insieme $\mathbf{C}(A, Y)$, solo che ora, dato $f\colon A \to B$, non c'è alcun modo evidente di definire un'applicazione
$$\mathbf{C}(A, Y) \to \mathbf{C}(B, Y).$$
Però possiamo definire un'applicazione
$$f^*\colon \mathbf{C}(B, Y) \to \mathbf{C}(A, Y), \qquad \beta \mapsto \beta f.$$
Non è complicato eseguire la verifica dei fatti seguenti:

1. 1_A^* è l'applicazione identità;
2. $(gf)^* = f^*g^*$.

Ne risulta che le proprietà funtoriali ci sono, purché consideriamo questo come un funtore $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

Definizione. Un funtore *controvariante* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un funtore $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}$.

Funtori controvarianti sorgono spessissimo, per questo è conveniente includerli negli ingredienti della teoria. In caso di ambiguità i funtori definiti prima si dicono *covarianti*.

Esempio 2.1.5. Associamo a ogni insieme A il suo insieme potenza $P(A)$. A un'applicazione $f\colon A \to B$ possiamo associare due applicazioni:

$$\begin{aligned} f^{\rightarrow}&\colon P(A) \to P(B) \qquad && U \mapsto f^{\rightarrow}(U) \\ f^{\leftarrow}&\colon P(B) \to P(A) \qquad && V \mapsto f^{\leftarrow}(V) \end{aligned}$$

Otteniamo così due funtori, il primo covariante che possiamo denotare con $P^{\rightarrow}$ o P_*, il secondo controvariante che possiamo denotare con $P^{\leftarrow}$ o P^*.

Possiamo 'mettere insieme' i due funtori $\mathbf{C}(X,-)$ e $\mathbf{C}(-,Y)$ in un unico funtore:

$$\mathbf{C}(-,-)\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

Non è difficile scriverne le definizioni esplicite.

Esempio 2.1.6. La trasposizione di matrici fornisce un esempio di funtore controvariante $\mathbf{Mat} \to \mathbf{Mat}$. Si noti che la composizione di questo funtore con sé stesso è il funtore identico.

A questo riguardo si deve dire che, con abuso di linguaggio, si identifica un funtore controvariante $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}$ con l'ovvio funtore associato $F^{\mathrm{op}}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}^{\mathrm{op}}$ e si usa uno dei due a seconda della convenienza. Con questa convenzione, applicata con giudizio, risulta che la composizione di due funtori controvarianti è covariante: dati $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}$ e $G\colon \mathbf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{E}$, si dovrebbe eseguire la composizione

$$F^{\mathrm{op}}G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{E},$$

oppure la

$$FG^{\mathrm{op}}\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{E}^{\mathrm{op}}$$

ma ci si dimentica di queste finezze e si esegue direttamente la composizione delle applicazioni sugli oggetti e sui morfismi, aggiustando a posteriori la covarianza e la controvarianza.

Quindi, per esempio, se abbiamo $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ (covariante) e $G\colon \mathbf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{E}$, la composizione sarà $GF\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{E}$ (controvariante).

Nella definizione seguente daremo un po' di terminologia riguardante i funtori.

Definizione. Un funtore $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ si dice:

- *fedele* se, per ogni $A, B \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, l'applicazione indotta $F\colon \mathbf{C}(A,B) \to \mathbf{D}(F(A),F(B))$ è iniettiva;

- *pieno* se, per ogni $A, B \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, l'applicazione indotta $F\colon \mathbf{C}(A,B) \to \mathbf{D}(F(A),F(B))$ è suriettiva;

- *denso* se, per ogni $B \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$, esiste $A \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$ tale che $F(A) \cong B$.

Fra i funtori già definiti si identifichino quali sono pieni, quali fedeli e quali densi.

Data una proprietà P (esprimibile nel linguaggio delle categorie), si dice che un funtore F *conserva* P se, quando un oggetto A o un morfismo f ha la proprietà P, anche $F(A)$ o, rispettivamente $F(f)$ ha la proprietà P. Per esempio, ogni funtore conserva gli isomorfismi. Più in generale, la proprietà P può essere espressa da diagrammi (come i prodotti fibrati); un funtore $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ trasforma diagrammi in $\mathbf{C}$ in diagrammi in $\mathbf{D}$. Si parlerà così, per esempio, di funtore che conserva gli ugualizzatori.

La proprietà di ugualizzatore si può esprimere con una successione di diagrammi:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, shift left, "\forall"] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\bullet"] & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\exists"] & \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\bullet"] & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl, dashed, "\exists!"'] \arrow[d, "\forall"] & \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\bullet"] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

Non voglio dare la sintassi precisa (in effetti l'ultimo diagramma dovrebbe essere sostituito da due), ma solo l'idea che sta sotto la 'conservazione delle proprietà'. Dovrebbe risultare chiaro perché un funtore, in generale, non conserva gli ugualizzatori: potrebbe non valere più l'unicità della fattorizzazione.

2.2 Universali

Il concetto di funtore permette di inquadrare meglio le nozioni di prodotto e di ugualizzatore, vedendole come aspetti di una stessa costruzione.

Come si fa a prendere due oggetti di una categoria $\mathbf{C}$ alla volta? La risposta ovvia è di considerare la categoria prodotto $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$; da $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ c'è il funtore diagonale

$$\Delta\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}, \quad \Delta(A) = (A, A), \quad \Delta(f) = (f, f).$$

Osserviamo che il prodotto di due oggetti A e B in $\mathbf{C}$, se esiste, lo si deve considerare insieme ai morfismi $p_A\colon A \times B \to A$ e $p_B\colon A \times B \to B$, che è come dire un morfismo

$$(p_A, p_B)\colon \Delta(A \times B) \to (A, B)$$

nella categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Data la categoria $\mathbf{C}$, consideriamo la nuova categoria $\mathbf{C}{\downarrow\downarrow}$ i cui oggetti sono coppie (f, g) di morfismi di $\mathbf{C}$ con dominio e codominio comuni: $f, g\colon A \to B$. I morfismi sono coppie di morfismi in $\mathbf{C}$: se abbiamo anche $f', g'\colon A' \to B'$, un morfismo $(f, g) \to (f', g')$ è una coppia di morfismi (α, β) dove $\alpha\colon A \to A'$ e $\beta\colon B \to B'$ in modo da avere i seguenti diagrammi:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
A' \arrow[r, "g'"] & B'
\end{tikzcd}
$$

Si lascia al lettore la definizione di composizione e la verifica degli assiomi.

Come nel caso del prodotto, esiste un ovvio funtore $\Gamma\mathbf{C} \to \mathbf{C}{\downarrow\downarrow}$, che all'oggetto A associa la coppia $(1_A, 1_A)$ e al morfismo $\alpha\colon A \to B$ la coppia (α, α).

Un ugualizzatore della coppia di morfismi (f, g) da A in B è, come sappiamo, una coppia (E, i), dove $i\colon E \to A$ è un morfismo per il quale $fi = gi$. Questo è esattamente come dire che abbiamo un morfismo $(i, i)\colon \Gamma(E) \to (f, g)$ in $\mathbf{C}{\downarrow\downarrow}$.

Il prodotto o l'ugualizzatore si possono vedere come una coppia (U, u), dove $u\colon G(X) \to Z$. Nel caso dei prodotti, $G = \Delta$ e $Z = (A, B)$; nel caso dell'ugualizzatore $G = \Gamma$ e $Z = (f, g)$.

La seconda proprietà (esistenza e unicità di un opportuno morfismo) si può esprimere 'allo stesso modo' sia nel caso del prodotto che dell'ugualizzatore: per ogni morfismo $h\colon G(X) \to Z$, esiste un *unico* morfismo $h'\colon X \to U$ in $\mathbf{C}$ tale che $u \circ G(h') = h$. Un diagramma che esprime la cosa è il seguente:

$$\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[dd, dashed, "\exists! h'\colon G(h')"'] \arrow[dr, "\forall h"] & \\
& Z \\
G(U) \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd} \tag{Univ}$$

L'unicità ci permette di asserire che due coppie (U, u) e (U', u') con quelle proprietà sono 'isomorfe', nel senso che esiste un *unico* isomorfismo $j\colon U \to U'$ tale che $u'G(j) = u$.

Si tratta di trovare, quando si ha una costruzione di quel tipo, l'opportuna categoria. Per i prodotti fibrati, la categoria da considerare è $\mathbf{C}^{\to\cdot\leftarrow}$, che ha come oggetti coppie di morfismi $(f\colon A \to C, g\colon B \to C)$ e come morfismi terne

$$(\alpha\colon A \to A', \beta\colon B \to B', \gamma\colon C \to C')$$

in modo da avere il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & & A' \arrow[dr, "f'"] & \\
& C \arrow[rr, "\gamma"] & & C' \\
B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\beta"] & & B' \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

Il funtore $G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{\to\cdot\leftarrow}$ da usare come i Δ e Γ di prima sarà quello che all'oggetto A associa la coppia $(1_A, 1_A)$ e al morfismo $f\colon A \to A'$ la terna (f, f, f). Si verifichi che un prodotto fibrato ha la proprietà espressa dal diagramma (Univ).

Definizione. Sia $G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtore e sia $D \in \mathrm{obj}(\mathbf{D})$. Un *universale da G a D* è una coppia (U, u) dove $U \in \mathrm{obj}(\mathbf{C})$ e $u\colon G(U) \to D$ in modo che, per ogni $h\colon G(X) \to D$, esista un unico morfismo $h'\colon X \to U$ per il quale $uG(h') = h$:

$$\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[dd, dashed, "\exists! h'\colon G(h')"'] \arrow[dr, "\forall h"] & \\
& D \\
G(U) \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd} \tag{Univ}$$

La coppia (U, u), se esiste, è determinata a meno di un unico isomorfismo nel senso visto prima.

La definizione duale è ovviamente interessante e ci procura, per esempio, i concetti di coprodotto e cougualizzatore.

Definizione. Sia $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtore e sia $D \in \mathrm{obj}(\mathbf{D})$. Un *universale da D a F* è una coppia (V, v) dove $V \in \mathrm{obj}(\mathbf{C})$ e $v\colon D \to F(V)$ in modo che, per ogni $h\colon D \to F(X)$ esista un unico morfismo $h' \colon V \to X$ per il quale $F(h')v = h$:

$$\begin{tikzcd} & F(V) \arrow[dd, dashed, "\exists! h' \colon F(h')"] \\ D \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "\forall h"'] & \\ & F(X) \end{tikzcd} \tag{Univ*}$$

Sia $G \colon \mathbf{C} \to \mathbf{1}$ l'unico funtore possibile. Un universale da 0 (l'unico oggetto di $\mathbf{1}$) a G è dato da una coppia (U, u) dove $U \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$ e $u \colon G(U) \to 0$. Quindi $u = 1_0$ e la proprietà di universalità dice che, per ogni morfismo $G(X) \to 0$ (che è 1_0), esiste un unico morfismo $X \to U$. Dunque U è un oggetto terminale in $\mathbf{C}$.

Analogamente, un universale da G a 0 è un oggetto iniziale di $\mathbf{C}$.

Se $\mathbf{0}$ denota la categoria vuota, c'è un unico funtore $\mathbf{0} \to \mathbf{C}$. Se $C \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, un universale da C al funtore vuoto è un oggetto iniziale, mentre un universale dal funtore vuoto a C è un oggetto terminale.

2.3 L'esempio

Consideriamo la categoria **Vett** degli spazi vettoriali complessi (ma un qualunque campo andrebbe bene ugualmente). Fissiamo uno spazio vettoriale Y e, per ogni spazio vettoriale V definiamo su $\mathbf{Vett}(V, Y)$ una struttura di spazio vettoriale ponendo, per $f, g \colon V \to Y$ lineari e per $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$f + g \colon v \mapsto f(v) + g(v), \qquad \alpha f \colon v \mapsto \alpha f(v).$$

È immediato verificare che $f + g \colon V \to Y$ e $\alpha f \colon V \to Y$ sono applicazioni lineari e che in questo modo $\mathbf{Vett}(V, Y)$ diventa uno spazio vettoriale.

Si può estendere questo a un funtore controvariante $\mathbf{Vett}(V, Y) \to \mathbf{Vett}(V, Y)$ ponendo, per $\varphi \colon V \to W$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Vett}(\varphi, Y) \colon \mathbf{Vett}(W, Y) &\to \mathbf{Vett}(V, Y) \\ f &\mapsto f\varphi \end{aligned}$$

e si verifica subito che questa è una buona definizione, nel senso che $\mathbf{Vett}(\varphi, Y)$ è un'applicazione lineare.

Per brevità indicheremo con D_Y questo funtore; nel caso speciale di $Y = \mathbb{C}$, il funtore si denota con D. Dato che $D_Y(V)$ è uno spazio vettoriale, possiamo applicare a questo il funtore D_Y, ottenendo $D_Y(D_Y(V)) = D_Y^2(V)$.

Questa costruzione era nota ben prima dell'introduzione delle categorie e dei funtori; si sapeva anche dell'esistenza di un'applicazione lineare 'naturale' $\omega_V \colon V \to D_Y^2(V)$, che possiamo definire così: si parte da $v \in V$ e si vuole ottenere $\omega_V(v) = \hat{v}$, elemento di $D_Y^2(V)$, cioè elemento di $\mathbf{Vett}(D_Y(V), Y)$. Quindi $\hat{v}$ deve essere un'applicazione lineare

$$\hat{v} \colon D_Y(V) \to Y.$$

Se prendiamo $f \in D_Y(V)$, è immediato considerare $f(v)$: dopo tutto, $f \colon V \to Y$, quindi $f(v) \in Y$ come desiderato!

Si verifica che $\hat{v}$ è lineare:

$$\begin{gathered} \hat{v}(f + g) = (f + g)(v) = f(v) + g(v) = \hat{v}(f) + \hat{v}(g), \\ \hat{v}(\alpha f) = (\alpha f)(v) = \alpha(f(v)) = \alpha\hat{v}(f). \end{gathered}$$

Inoltre ω_V è essa stessa lineare:

$$\omega_V(v_1+v_2)(f) = f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) = \omega_V(v_1)(f)+\omega_V(v_2)(f),$$
$$\omega_V(\alpha v)(f) = f(\alpha v) = \alpha(f(v)) = \alpha\omega_V(v)(f).$$

È evidente che l'applicazione ω_V è 'definita allo stesso modo' per tutti gli spazi V. Ma che significa questa frase? È proprio cercando di rendere esplicito questo significato che Eilenberg e Mac Lane, avendo trovato anche altre situazioni analoghe, introdussero i concetti di categoria e funtore. L'osservazione parte dal seguente diagramma (ricordo che D_Y^2 è un funtore covariante):

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f"'] \\ W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\omega_V"] \arrow[d, "f"'] & D_Y^2(V) \arrow[d, "D_Y^2(f)"] \\ W \arrow[r, "\omega_W"] & D_Y^2(W) \end{tikzcd}$$

Il funtore D_Y era usato principalmente per $Y=\mathbb{C}$ e per spazi vettoriali di dimensione finita. Il motivo è semplice: se $\{v_1;\dots;v_n\}$ è una base di V, le applicazioni lineari $\xi_i\colon V\to\mathbb{C}$ $(i=1,2,\dots,n)$ definite ponendo

$$\xi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j=i, \\ 0 & \text{se } j\neq i, \end{cases}$$

formano una base di $D(V)$. Questo, come la possibilità di definire gli stessi morfismi ξ_i discende dalla proprietà che un morfismo di spazi vettoriali è determinato non appena se ne fissa l'azione sugli elementi di una base. Perciò, se $f\colon V\to\mathbb{C}$ è lineare, poniamo $f(v_i)=\alpha_i$ ed è chiaro che

$$f = \alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\dots+\alpha_n\xi_n$$

calcolando proprio su v_j $(j=1,2,\dots,n)$:

$$(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\dots+\alpha_n\xi_n)(v_j) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\xi_i(v_j)) = \alpha_j = f(v_j).$$

Che $\{\xi_1;\xi_2;\dots;\xi_n\}$ sia anche linearmente indipendente è quasi ovvio.

Una base di $D(V)$ ha la stessa cardinalità di una base di V. Lo stesso, ovviamente, avviene per $D^2(V)$: $\dim V = \dim D^2(V)$. Ma il morfismo $\omega_V\colon V\to D^2(V)$ è iniettivo, infatti ogni vettore non nullo $v\in V$ può essere preso come $v=v_1$ in una base $\{v_1;\dots;v_n\}$ di V, ciò che definisce anche la base di $D(V)$; allora $\omega_V(v)(\xi_1)=\xi_1(v_1)=1\neq 0$. Dunque $\omega_V(v)\neq 0$.

Di conseguenza V è 'naturalmente isomorfo' a $D^2(V)$, nel senso che è possibile definire un isomorfismo in modo intrinseco, senza fare ricorso a basi, come nel caso di V e $D(V)$. Eilenberg e Mac Lane identificarono appunto in quel diagramma la spiegazione di questa 'naturalezza'.

Chiaramente questo non è l'unico esempio, né in tutte le situazioni si ha un isomorfismo. Non lo si ha per D_Y^2 con $\dim Y>1$, per esempio, né lo si ha per spazi vettoriali di dimensione infinita.

Sia $\mathbf{C}$ una categoria arbitraria e fissiamo un morfismo $f\colon X\to Y$. Abbiamo allora i funtori (covarianti)

$$\mathbf{C}(X,-)\colon\mathbf{C}\to\mathbf{Set},\quad \mathbf{C}(Y,-)\colon\mathbf{C}\to\mathbf{Set}.$$

Dato $\alpha\colon A \to B$ in $\mathrm{mor}(\mathbf{C})$, abbiamo quattro morfismi che possiamo combinare in un diagramma molto simile al precedente:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\alpha"'] \\
B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(Y,A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathbf{C}(Y,\alpha)"'] & \mathbf{C}(X,A) \arrow[d, "\mathbf{C}(X,\alpha)"] \\
\mathbf{C}(Y,B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathbf{C}(X,B)
\end{tikzcd}
$$

dove η_A è definito tramite $\eta_A(\gamma) = \gamma f$ e η_B è definito 'allo stesso modo'.

Infatti, calcolando, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}(Y,\alpha)\eta_A(\gamma) &= \mathbf{C}(Y,\alpha)(\gamma f) = \alpha\gamma f,\\
\eta_B\mathbf{C}(Y,\alpha)(\gamma) &= \eta_B(\alpha\gamma) = \alpha\gamma f.
\end{aligned}
$$

Abbiamo ottenuto una *trasformazione naturale* dal funtore $\mathbf{C}(Y,-)$ al funtore $\mathbf{C}(X,-)$.

2.4 Trasformazioni naturali

Cerchiamo di precisare la definizione intuitiva: supporremo dati due funtori $F, G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, entrambi covarianti, per il momento.

Definizione. Una *trasformazione naturale* $\eta\colon F \to G$ è un'applicazione $\eta\colon \mathrm{obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{mor}(\mathbf{D})$, denotata con $A \mapsto \eta_A$, tale che, per ogni morfismo $f\colon A \to B$ in $\mathbb{C}$, si abbia il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \\
B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

Se i funtori sono controvarianti, non c'è bisogno di dare la definizione, basta considerare come dominio $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$. Il diagramma diventa

$$
\begin{tikzcd}
A \\
B \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

A questo punto non ci resta che definire la composizione di trasformazioni naturali. È uno degli aspetti fondamentali della teoria delle categorie che definito un concetto si costruisca a partire da questo una nuova categoria o una classe di categorie.

Definizione. Siano F, G, H funtori $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e siano $\eta\colon F \to G$ e $\varepsilon\colon G \to H$ trasformazioni naturali. Allora, definendo $\zeta_A = \varepsilon_A\eta_A$, per ogni $A \in \mathrm{obj}(\mathbf{C})$, si ottiene una trasformazione naturale $\zeta\colon F \to H$, che si chiama spesso la loro *composizione verticale*.

La definizione appena data richiede una verifica, che è banale: si tratta di dimostrare la commutatività del rettangolo esterno nel seguente diagramma

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \\
B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"'] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[rr, bend left, "\zeta_A"] & G(A) \arrow[r, "\varepsilon_A"'] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[rr, bend right, "\zeta_B"'] & G(B) \arrow[r, "\varepsilon_B"] & H(B)
\end{tikzcd}
$$

che è ovvia dalla commutatività dei due quadrati.

È evidente che c'è sempre, da un funtore a sé stesso, la trasformazione naturale identità. Quindi, per esempio, le trasformazioni naturali del funtore F in sé formano un semigruppo.

In generale, se $id\colon F \to F$ denota la trasformazione identità, diremo che una trasformazione naturale $\eta\colon F \to G$ è un *isomorfismo naturale* se esiste $\varepsilon\colon G \to F$ tale che $\eta\varepsilon = id$ e $\varepsilon\eta = id$. (Comincerò a omettere, di tanto in tanto, indici che possono essere desunti dal contesto; per esempio, si dovrebbe scrivere id_F, per indicare la trasformazione identità di F; ma osservando dominio e codominio, è chiaro a quale ci si riferisca.)

Proposizione 2.4.1. *Una trasformazione naturale $\eta\colon F \to G$ è un isomorfismo naturale se e solo se, per ogni A, η_A è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Osserviamo che, definendo $\varepsilon_A = (\eta_A)^{-1}$, le composizioni richieste sono uguali, cioè che, con chiaro significato dei simboli,

$$F(f)\varepsilon_A = \varepsilon_B G(f).$$

Ora, $\eta_B F(f)\varepsilon_A = G(f)\eta_A\varepsilon_A = G(f)1_A = G(f)$. Dunque, componendo con ε_B a sinistra si ha l'uguaglianza desiderata. Quindi $\varepsilon\colon G \to F$ è una trasformazione naturale, il resto è facile. $\square$

Un funtore $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ si dice un'*equivalenza* (di categorie) se esistono un funtore $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ e isomorfismi naturali $\eta\colon id_{\mathbf{C}} \to GF$ e $\varepsilon\colon id_{\mathbf{D}} \to FG$.

A prima vista avrebbe più senso definire il concetto di isomorfismo di categorie, ma si vede subito che accade di rado un isomorfismo. Il fatto è che ogni categoria può essere arricchita senza cambiarne le proprietà sostanziali. Se, per esempio, dato un oggetto $A \in \mathrm{obj}(\mathbf{C})$ ne aggiungiamo un altro $\bar{A}$ e definiamo opportunamente i morfismi da $\bar{A}$ e verso $\bar{A}$ in modo che $\bar{A}$ sia una copia esatta di A, la nuova categoria potrebbe non essere isomorfa a quella di partenza, ma non ha proprietà diverse (a parte quella inessenziale di avere un oggetto in più).

Si può vedere lo stesso in altro modo. Data una categoria $\mathbf{C}$, ripartiamo la classe degli oggetti in classi di isomorfismo: l'isomorfismo fra oggetti è una relazione di equivalenza. Denotiamo con $\mathbf{S}$ la categoria che ha come oggetti un rappresentante per ogni classe di equivalenza; dati $A, B \in \mathrm{obj}(\mathbf{S})$ poniamo $\mathbf{S}(A, B) = \mathbf{C}(A, B)$. Dunque $\mathbf{S}$ è una sottocategoria piena di $\mathbf{C}$ ed è facile definire il funtore di inclusione $I\colon \mathbf{S} \to \mathbf{C}$. Non è difficile (ma un po' fastidioso, si precisino i dettagli) definire un funtore $P\colon \mathbf{C} \to \mathbf{S}$ che associa a ogni oggetto il rappresentante scelto della classe di isomorfismo; la definizione sui morfismi è lasciata al lettore. È facile verificare che I e P sono equivalenze di categorie; $\mathbf{S}$ si chiama uno *scheletro* di $\mathbf{C}$.

Si può dare la stessa nozione per funtori controvarianti, sempre con le consuete convenzioni per la composizione. In questo caso, invece che di equivalenza, si parla di *dualità*.

Il funtore controvariante $T\colon \mathbf{Mat} \to \mathbf{Mat}$ che è l'identità sugli oggetti e agisce per trasposizione sulle matrici, è una dualità: la categoria $\mathbf{Mat}$ è *autoduale*. Questa è una proprietà molto particolare, infatti ogni categoria è banalmente equivalmente a sé stessa, ma, in generale, una categoria non è duale di sé stessa.

Per esempio, la categoria definita da un ordine parziale con minimo e senza massimo non è autoduale. Anche la categoria **Set** non è autoduale, come vedremo dopo aver introdotto un paio di nozioni.

Definizione. Un oggetto C della categoria $\mathbf{C}$ di dice un

- *generatore* se, per ogni coppia di morfismi $f, g\colon A \to B$, se $f \neq g$, allora esiste $h\colon C \to A$ con $fh \neq gh$;

- *cogeneratore* se, per ogni coppia di morfismi $f, g\colon A \to B$, se $f \neq g$, allora esiste $h\colon B \to C$ con $hf \neq hg$.

È immediato verificare che ogni insieme con un solo elemento è un generatore in **Set**. Un tale insieme è anche un oggetto terminale. Se **Set** fosse autoduale, ogni oggetto iniziale dovrebbe essere un cogeneratore: ma l'insieme vuoto non è un cogeneratore.

Il funtore $D\colon \mathbf{Vett} \to \mathbf{Vett}$ non è una dualità: infatti, se V non ha dimensione finita, $D(V)$ non può essere isomorfo a V. Si potrebbe obiettare che non è obbligatorio prendere lo stesso D come 'inverso' di D, ma in realtà è così, per motivi che sarebbe lungo spiegare. Tuttavia c'è un'altra proprietà: dati V e W, c'è un isomorfismo 'naturale'

$$\mathbf{Vett}(W, D(V)) \to \mathbf{Vett}(V, D(W)),$$

che può essere definito considerando, per $f\colon W \to D(V)$ e $v \in V$,

$$\hat{f}(v)\colon w \mapsto f(w)(v) \in \mathbb{C}.$$

L'applicazione $\hat{f}\colon V \to D(W)$ è lineare e così l'applicazione $f \to \hat{f}$ è biiettiva, perché è definita allo stesso modo per ogni V e W: è immediato costruirne l'inversa.

Sia $f\colon B \to A$ un morfismo in $\mathbf{C}$. Allora f induce una trasformazione naturale $f^*\colon \mathbf{C}(A, -) \to \mathbf{C}(B, -)$ di funtori $\mathbf{C} \to \mathbf{Set}$. La possiamo definire facilmente per composizione:

$$f^*{}_C\colon \mathbf{C}(A, C) \to \mathbf{C}(B, C), \qquad f^*{}_C(\alpha) = \alpha f.$$

Lemma 2.4.2. *Le componenti della trasformazione naturale f^* sono tutte mono se e solo se f è epi, mentre le componenti di f^* sono tutte epi se e solo se f è un mono spezzante.*

Dimostrazione. Sia $C \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$; dire che $f^*{}_C$ è mono significa dire che è iniettiva, cioè che $f^*{}_C(\alpha) = f^*{}_C(\beta)$ se e solo se $\alpha = \beta$. Quindi che $\alpha f = \beta f$ se e solo se $\alpha = \beta$ che è la definizione di epi.

Se $f^*{}_C$ è epi, per ogni C, lo è in particolare per $C = B$. Quindi esiste $\alpha\colon A \to C$ tale che $\alpha f = 1_B$. Viceversa, se $\alpha f = 1_B$ e $\beta\colon B \to C$, abbiamo $f^*{}_C(\beta\alpha) = \beta\alpha f = \beta$, quindi $f^*{}_C$ è effettivamente suriettiva. $\square$

2.5 Funtori aggiunti

Siano $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ funtori. Vogliamo astrarre la situazione appena vista per il funtore D, nel contesto però dei funtori covarianti.

Definizione. La coppia di funtori (F, G) è un'*aggiunzione* se esiste un isomorfismo naturale di funtori $\mathbf{D}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$

$$\eta\colon \mathbf{C}(G(-), -) \to \mathbf{D}(-, F(-)).$$

In tal caso si dice che G è *aggiunto sinistro* di F e che F è un *aggiunto destro* di G; la terna (F, G, η) si chiama *aggiunzione*.

Una definizione del genere sembra intimidatoria. Vedremo che invece è una situazione molto comune. La condizione di naturalità si può esprimere con due diagrammi, invece dell'unico che sembrerebbe necessario. Infatti la naturalità 'in due variabili' equivale alla naturalità in ciascuna.

Dunque abbiamo biiezioni $\eta_{B,A}$ che a ogni morfismo $f\colon G(B) \to A$ associano un morfismo $\eta(f)\colon B \to F(A)$, in modo che, per ogni morfismo $h\colon A \to A'$ in $\mathbf{C}$ e ogni morfismo $k\colon B' \to B$ in $\mathbf{D}$, si abbia

$$\eta(hf) = F(h) \circ \eta(f), \qquad \eta(f \circ G(k)) = \eta(f) \circ k \tag{agg}$$

(ho usato il circoletto per denotare la composizione, per evitare ambiguità). Si può fare la stessa cosa con η^{-1}, partendo da $g\colon B \to F(A)$:

$$\eta^{-1}(F(h) \circ g) = h \circ \eta^{-1}(g), \qquad \eta^{-1}(gk) = \eta^{-1}(f) \circ G(k). \tag{agg^{-1}}$$

Per mostrare un esempio di aggiunzione facciamo una digressione sugli spazi vettoriali. Dato un insieme X consideriamo l'insieme $\mathbb{C}^{(X)}$ delle applicazioni $X \to \mathbb{C}$ che si annullano ovunque tranne che in un insieme finito di elementi di X. Nel caso particolare di $X = \emptyset$, si pone $\mathbb{C}^{\emptyset} = \{0\}$.

Questo insieme ha una struttura di spazio vettoriale ponendo, per $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (af)(x) = af(x), \qquad (x \in X, a \in \mathbb{C}).$$

Se infatti $\mathrm{Supp}(f) = \{\, x \in X : f(x) \neq 0\}$, si ha

$$\mathrm{Supp}(f + g) \subseteq \mathrm{Supp}(f) \cup \mathrm{Supp}(g), \quad \mathrm{Supp}(af) \subseteq \mathrm{Supp}(f).$$

Le proprietà di spazio vettoriale si verificano facilmente. Dato $x \in X$ definiamo $e_x\colon X \to \mathbb{C}$ ponendo $e_x(x) = 1$ e $e_x(y) = 0$ se $y \neq x$; evidentemente $e_x \in \mathbb{C}^{(X)}$. Inoltre, se $f \in \mathbb{C}^{(X)}$, $\mathrm{Supp}(f) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $f(x_i) = a_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, si ha

$$f = a_1 e_{x_1} + a_2 e_{x_2} + \dots + a_n e_{x_n}.$$

Se poi una tale espressione è la funzione costantemente nulla, è evidente che i coefficienti devono essere tutti nulli. Dunque gli elementi $e_x \in \mathbb{C}^{(X)}$ ne formano una *base* (infinita, in generale). Indichiamo con $i_X\colon X \to \mathbb{C}^{(X)}$ l'applicazione $x \mapsto e_x$.

Lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^{(X)}$ ha una proprietà molto particolare: data una funzione qualunque $\alpha\colon X \to V$ esiste una e una sola applicazione lineare $\hat{\alpha}\colon \mathbb{C}^{(X)} \to V$ tale che $\hat{\alpha} i_X = \alpha$. Basta definire

$$\hat{\alpha}\left(\sum_{x \in X} a_x e_x\right) = \sum_{x \in X} a_x \alpha(x)$$

tenendo conto che la somma, apparentemente infinita, va considerata solo su un insieme finito di indici.

Usando questo fatto, possiamo costruire un funtore $G\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Vett}$ ponendo $G(X) = \mathbb{C}^{(X)}$ e, se $\alpha\colon X \to Y$ è un morfismo in $\mathbf{Set}$,

$$G(\alpha) = \widehat{i_Y \alpha}.$$

Le verifiche sulle composizioni sono lunghe e noiose, ma banali.

Consideriamo ora il funtore distratto $F\colon \mathbf{Vett} \to \mathbf{Set}$. Data un'applicazione $\alpha\colon X \to F(V)$, possiamo considerare $\alpha\colon X \to V$ e costruire $\hat{\alpha}\colon \mathbb{C}^{(X)} \to V$. Viceversa, data un'applicazione lineare $\beta\colon \mathbb{C}^{(X)} \to V$, possiamo comporre con i_X, ottenendo $\beta i_X\colon X \to V = F(V)$. Non è affatto complicato verificare che abbiamo scritto due applicazioni biiettive

$$\begin{gathered}\mathbf{Set}(X, F(V)) \to \mathbf{Vett}(G(X), V),\\ \mathbf{Vett}(G(X), V) \to \mathbf{Set}(X, F(V)),\end{gathered}$$

una inversa dell'altra. Che siano naturali è chiaro dal fatto che sono 'definite allo stesso modo' per ogni X e V. Dunque G è un aggiunto sinistro del funtore distratto.

Per essere precisi, questo è non solo un esempio di aggiunzione, ma anche di equivalenza di categorie. Questo tipo di aggiunzione si può costruire per molti funtori distratti.

Esempio 2.5.1. Sia **Smg** la categoria dei semigruppi (con 1). Anche qui vogliamo trovare un aggiunto sinistro del funtore distratto $F\colon \mathbf{Smg} \to \mathbf{Set}$. Dato un insieme X vogliamo costruire 'nel modo più generale possibile' un semigruppo che abbia fra i suoi elementi quelli di X. Perciò, dati $a, b \in X$ ci serve saperli 'moltiplicare'. Dal momento che abbiamo ampia libertà d'azione, aggiungiamo semplicemente un elemento che sia il prodotto di a e b, che identificheremo con la successione finita ab.

Una successione finita di elementi di X si denoterà con $\langle a_1, a_2, \dots, a_m\rangle$; fra esse c'è anche la successione vuota $\langle\rangle$. L'insieme di tutte le successioni finite di elementi di X si denoterà con $W(X)$ (parole nell'alfabeto X) e su $W(X)$ definiamo l'operazione

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m\rangle\langle b_1, b_2, \dots, b_n\rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n\rangle$$

con l'ovvio significato per la parola vuota. Con una facile induzione si dimostra che si tratta di un'operazione associativa che ha la parola vuota come elemento neutro. Dunque $W(X)$ è un semigruppo con 1. Preferiamo non considerare X come sottoinsieme di $W(X)$, ma definiamo l'applicazione $i_X\colon X \to W(X)$ (di insiemi) ponendo $i_X(a) = \langle a\rangle$. È immediato estendere questo a un funtore: se $f\colon X \to Y$, si pone

$$W(f)(\langle a_1, a_2, \dots, a_m\rangle) = \langle f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)\rangle$$

e $W(f)(\langle\rangle) = \langle\rangle$. Con facili calcoli si verifica che $W(f)$ è un morfismo di semigruppi.

La proprietà richiesta di aggiunzione segue dal fatto che, per ogni insieme X e ogni semigruppo S, ogni applicazione $f\colon X \to S$ (di insiemi) definisce un unico morfismo di semigruppi $\hat{f}\colon W(X) \to S$ tale che $\hat{f} i_X = f$:

$$\hat{f}(\langle a_1, a_2, \dots, a_m\rangle) = f(a_1)f(a_2)\dots f(a_n).$$

L'unità dell'aggiunzione è proprio $i_X\colon X \to FW(X)$, mentre la counità è

$$\mu_S\colon WF(S) \to S, \qquad \langle a_1, a_2, \dots, a_m\rangle = a_1 a_2 \dots a_n$$

(con $\mu_S(\langle\rangle) = 1$).

Nel caso di $X = \{*\}$, un insieme con un solo elemento, la proprietà di $W(X)$ si enuncia dicendo che, per ogni semigruppo S e ogni $s \in S$ esiste un unico morfismo di semigruppi $\eta_s\colon W(\{*\}) \to S$ tale che $\eta_s(*) = s$. Naturalmente questo dice esattamente che $W(\{*\})$ è isomorfo al semigruppo dei numeri naturali rispetto all'addizione.

In particolare questo semigruppo è un generatore di **Smg**, perché se $f, g\colon S \to S'$ sono morfismi distinti, esiste $s \in S$ tale che $f(s) \neq g(s)$; dunque $f\eta_s \neq g\eta_s$.

Si può dare una descrizione alternativa del semigruppo libero, che si può adattare anche a operazioni non associative, ma è più complicata. Invece dell'insieme delle parole su X consideriamo l'insieme $T(X)$ dei *termini*. Prima di tutto introduciamo due simboli ν e μ che non appartengono a X e poi definiamo i termini secondo le regole ricorsive seguenti:

1. ogni termine è una concatenazione finita e non vuota di elementi di $X \cup \{\nu, \mu\}$;
2. ogni elemento di X è un termine;
3. ν è un termine;
4. se s e t sono termini, allora μst è un termine;
5. niente altro è un termine.

Definiamo un'operazione su $T(X)$ con $(s,t) \mapsto \mu st$ che è effettivamente un'operazione su $T(X)$ per la regola (4). Il problema è che quest'operazione non è associativa: se $a, b, c \in X$, per esempio, abbiamo certamente

$$\mu a \mu bc \neq \mu \mu abc.$$

Tuttavia possiamo considerare la minima relazione di equivalenza $\sim$ su $T(X)$ tale che, per ogni $a, b, c \in X$ si abbia

$$\mu a \mu bc \sim \mu \mu abc, \qquad \mu \nu a \sim a, \qquad \mu a \nu \sim a, \qquad \mu \nu \nu \sim \nu$$

Non è troppo difficile dimostrare che $\sim$ è una congruenza, nel senso che, se $s, s', t, t' \in T(X)$, $s \sim s'$ e $t \sim t'$, allora $st \sim s't'$. Perciò l'operazione su $T(X)$ induce un'operazione su $\Phi(X) = T(X)/\sim$ che è associativa e ha come elemento neutro la classe di equivalenza di ν. Si verifica che $\Phi(X)$ è un semigruppo isomorfo a $W(X)$.

Possiamo infatti definire un morfismo $\hat{h} \colon W(X) \to \Phi(X)$ ponendo $h(a) = a$ ed estendendo mediante la proprietà universale di $W(X)$. Non è difficile capire come dimostrare che $\hat{h}$ è suriettivo, meno facile è provarne l'iniettività. Si può anche verificare che $\Phi(X)$ ha la proprietà universale di $W(X)$.

Esempio 2.5.2. Sia $F \colon \mathbf{ComRing} \to \mathbf{Ab}$ il funtore distratto che dimentica la moltiplicazione di un anello commutativo. Per trovarne un aggiunto sinistro vorremmo, come prima con gli spazi vettoriali, associare a un gruppo K (che scriveremo in notazione moltiplicativa) un anello $G(K)$ in modo che a ogni morfismo di gruppi $K \to R$ (dove R è un anello di cui però consideriamo solo la struttura additiva) sia associato un ben determinato morfismo di anelli $G(K) \to R$.

La risposta è molto simile a quella per gli spazi vettoriali. Si prende l'anello 'più facile', quello $\mathbb{Z}$ degli interi, e si costruisce l'insieme $\mathbb{Z}[K]$ delle applicazioni $K \to \mathbb{Z}$ che non si annullano che in un sottoinsieme finito di K. Questo insieme diventa un gruppo rispetto a un'addizione definibile facilmente come prima per gli spazi vettoriali. Per la moltiplicazione definiamo

$$f * g \colon x \mapsto \sum_{yz=x} f(y)g(z).$$

La somma è solo apparentemente infinita; si verifica che $f * g \in \mathbb{Z}[K]$. Il resto delle verifiche che $\mathbb{Z}[K]$ sia un anello commutativo è il solito esercizio noioso. Come definiamo, a partire da un morfismo di gruppi $\alpha \colon K \to R$ un morfismo di anelli $\hat{\alpha} \colon \mathbb{Z}[K] \to R$? Si pone

$$\hat{\alpha}(f) = \sum_{x \in K} \alpha(f(x)).$$

La verifica che sia un morfismo di anelli è lasciata come esercizio. Nel caso in cui $K = \{1\}$ sia il gruppo banale, chi è $\mathbb{Z}[K]$? Non dovrebbe essere sorprendente che si tratti dell'anello dei polinomi a coefficienti interi.

Da questo è facile costruirsi l'aggiunzione, cioè l'isomorfismo naturale fra $\mathbf{ComRing}(G(-), -)$ e $\mathbf{Ab}(-, F(-))$.

Ci sono altri modi per caratterizzare un'aggiunzione (F, G, η). Dati $A \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$ e $B \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$, abbiamo un isomorfismo (fra insiemi)

$$\eta_{B,A} \colon \mathbf{C}(G(B), A) \to \mathbf{D}(B, F(A)).$$

In particolare, possiamo prendere $B = F(A)$ e quindi possiamo porre

$$\rho_A = (\eta_{F(A),A})^{-1}(1_{F(A)}) \colon GF(A) \to A.$$

Analogamente, possiamo prendere $A = G(B)$ e considerare

$$\sigma_B = \eta_{B,G(B)}(1_{G(B)}) \colon B \to FG(B).$$

Il fatto che η e quindi anche η^{-1} siano naturali dice che ρ e σ sono trasformazioni naturali

$$\rho \colon GF \to id_{\mathbf{C}}, \qquad \sigma \colon id_{\mathbf{D}} \to FG.$$

Queste trasformazioni naturali non sono, in generale, isomorfismi e sono legate strettamente l'una all'altra. Per esempio, dato $A \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, abbiamo $\rho_A \colon GF(A) \to A$ e a questo possiamo applicare F, ottenendo $F(\rho_A) \colon FGF(A) \to F(A)$. Siccome $F(A) \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$, abbiamo $\sigma_{F(A)} \colon F(A) \to FGF(A)$. Cerchiamo di calcolare la composizione $F(\rho_A)\sigma_{F(A)}$ usando (agg) con $h = \eta^{-1}(1_{F(A)})$ e $f = 1_{G(B)}$:

$$F(\rho_A)\sigma_{F(A)} = F(\eta^{-1}(1_{F(A)}))\eta(1_{G(B)}) = \eta(\eta^{-1}(1_{F(A)})1_{G(B)}) = 1_{F(A)}.$$

Analogamente, con la (agg^{-1}), si ha

$$\rho_{G(B)}F(\sigma_B) = 1_{G(B)}.$$

La trasformazione naturale $\sigma \colon id \to FG$ si chiama *unità* dell'aggiunzione, mentre $\rho \colon GF \to id$ è la *counità*.

Ciò che è forse più interessante è che le due trasformazioni naturali, con le identità

$$F(\rho_A)\sigma_{F(A)} = 1_{F(A)}, \qquad \rho_{G(B)}F(\sigma_B) = 1_{G(B)} \tag{(co)unità}$$

definiscono la η. Infatti, senza entrare troppo nei dettagli, possiamo partire da $f \colon G(B) \to A$, applicare F e comporre con σ_B, ottenendo appunto $F(f)\sigma_B \colon B \to F(A)$. Viceversa, applicando G a $g \colon B \to F(A)$ e componendo con ρ_A si ha $\rho_A G(g) \colon G(B) \to A$.

Se eseguiamo la seconda costruzione a $g = F(f)\sigma_B$, abbiamo

$$\rho_A G(g) = \rho_A G(F(f)\sigma_B) = \rho_A GF(f)G(\sigma_B) = f\rho_{GB}G(\sigma_B) = f.$$

Analogamente, partendo da g si ritorna a g. Quindi le due applicazioni sono una l'inversa dell'altra e la loro naturalità è evidente. Abbiamo quindi provato che

$$\eta_{B,A}(f) = F(f)\sigma_B, \qquad \eta^{-1}_{B,A}(g) = \rho_A G(g).$$

Nel caso dell'aggiunzione degli spazi vettoriali, l'unità $\sigma_X : X \to V^{(X)} = FG(X)$ è proprio quella che abbiamo indicato con i_X; la counità $\rho_V : V^V = GF(V) \to V$ è l'applicazione definita ponendo, per $f\colon V \to V$ con $\operatorname{Supp}(f)$ finito,

$$\rho_V(f) = \sum_{v\in V} f(v)$$

che è una somma solo apparentemente infinita.

Esempio 2.5.3. Siano X e Y insiemi ordinati. Un'aggiunzione (F, G, η) fra le corrispondenti categorie è data da due applicazioni monotone $F\colon X \to Y$ e $G\colon Y \to X$ tali che, per ogni $x \in X$ e $y \in Y$, si abbia

$$G(y) \le x \quad \text{se e solo se} \quad y \le F(x).$$

Situazioni del genere sono state studiate ben prima dell'introduzione delle categorie sotto il nome di *connessioni di Galois*. L'unità e la counità diventano le asserzioni

$$x \le FG(x), \qquad GF(y) \le y$$

per ogni $x \in X$ e $y \in Y$, mentre le identità ((co)unità) diventano

$$F(x) = FGF(x), \qquad GFG(y) = y.$$

Se X è un'algebra di Boole, possiamo considerare $G_a\colon X \to X$ definita da $G_a(y) = a \wedge y$, dove $a \in X$ è fissato. Ne cerchiamo un aggiunto destro, cioè $F_a\colon X \to X$ monotona e tale che $G_a(y) = a \wedge y \le x$ se e solo se $y \le F_a(x)$.

Dimostriamo che, se $F_a(x)$ esiste, esso è il massimo fra gli elementi $z \in X$ tali che $a \wedge z \le x$. Infatti

$$a \wedge F_a(x) = G_aF_a(x) \le x;$$

inoltre, se $a \wedge z \le x$, allora $G_a(z) \le x$, quindi $z \le F_a(x)$. Dimostriamo che tale elemento è $F_a(x) = a' \vee x$. Infatti,

$$a \wedge (a' \vee x) = (a \wedge a') \vee (a \wedge x) = 0 \vee (a \wedge x) = a \wedge x \le x.$$

Viceversa, se $a \wedge z \le x$, si ha

$$z = (a \vee a') \wedge z = (a \wedge z) \vee (a' \wedge z) \le x \vee (a' \wedge z) = (x \vee a') \wedge (x \vee z) \le a' \vee x.$$

Un'*algebra di Heyting* è un reticolo limitato X in cui ogni applicazione del tipo $G_a : y \mapsto a \wedge x$ ha un aggiunto destro F_a, cioè tale che, per ogni $a, b \in X$, esiste

$$a \to b = \max\{\, x \in X : a \wedge x \le b \,\}.$$

In questa struttura si può definire *pseudocomplemento* di a l'elemento $\neg a = a{\to}0$. Un elemento a si dice *regolare* se $\neg\neg a = a$, relazione che, in generale, non vale.

L'esempio tipico di algebra di Heyting è quello degli aperti di uno spazio topologico o l'algebra di Lindenbaum della logica proposizionale intuizionistica.

In alcuni degli esempi risultava che la counità dell'aggiunzione fosse epi: lo era nel caso degli spazi vettoriali. Ciò accade per un fatto molto generale.

Teorema 2.5.4. *Sia $(F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}, \eta)$ un'aggiunzione, con unità σ e counità ρ. Allora:*

1. *G è fedele se e solo se, per ogni $A \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$, σ_A è epi;*
2. *G è pieno se e solo se, per ogni $A \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$, σ_A è un mono spezzante;*
3. *G è pieno e fedele se e solo se σ è un isomorfismo naturale.*

Dimostrazione. Supponiamo che G sia fedele.

¡¡Occorre Yoneda¿¿ □

2.6 Prodotto tensoriale

Dati due spazi vettoriali V e W, l'insieme delle applicazioni lineari di V in W diventa uno spazio vettoriale con le operazioni

$$f+g\colon x\mapsto f(x)+g(x), \qquad af\colon x\mapsto af(x),$$

dove $f,g\colon V\to W$ sono lineari. Si verifica facilmente che $f+g$ e af sono lineari e che le operazioni definite rendono $\mathbf{Vett}(V,W)=\mathrm{Hom}(V,W)$ uno spazio vettoriale; si preferisce la scrittura $\mathrm{Hom}(V,W)$ per indicare che questo non è solo un insieme, ma uno spazio vettoriale.

Sappiamo già che $\mathbf{Vett}(V,-)$ è un funtore verso $\mathbf{Set}$; ma, per ogni $g\colon W_1\to W_2$ lineare, l'applicazione

$$g_*\colon \mathrm{Hom}(V,W_1)\to\mathrm{Hom}(V,W_2), \qquad g_*(\varphi)=g\varphi$$

è lineare rispetto alle operazioni introdotte prima. Dunque possiamo considerare $\mathrm{Hom}(V,-)$ come funtore $\mathbf{Vett}\to\mathbf{Vett}$.

Di questo funtore vogliamo trovare un aggiunto sinistro, cioè un funtore $G\colon\mathbf{Vett}\to\mathbf{Vett}$ tale che, per ogni $U,W\in\mathrm{obj}(\mathbf{Vett})$,

$$\mathrm{Hom}(G(U),W)\cong\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$$

possibilmente come spazi vettoriali, oltre che come insiemi.

Data $f\colon U\to\mathrm{Hom}(V,W)$ lineare, possiamo considerare l'applicazione $\hat f\colon U\times V\to W$ definita ponendo

$$\hat f(u,v)=f(u)(v).$$

Questa applicazione è *bilineare*, nel senso che

$$\begin{aligned}\hat f(a_1u_1+a_2u_2,v)&=a_1\hat f(u_1,v)+a_2\hat f(u_2,v),\\ \hat f(u,b_1v_1+b_2v_2)&=b_1\hat f(u,v_1)+b_2\hat f(u,v_2),\end{aligned}$$

per ogni $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{C}$, $u,u_1,u_2\in U$ e $v,v_1,v_2\in V$.

Viceversa, data $g\colon U\times V\to W$ bilineare, possiamo definire

$$\breve g\colon U\to\mathrm{Hom}(V,W),$$

dove, per $u\in U$, si pone $\breve g(u)(v)=g(u,v)$ per $v\in V$. È immediato verificare che $\breve g(u)\colon V\to W$ è lineare e che $\breve g$ è anch'essa lineare.

Il nostro problema è dunque di 'linearizzare' un'applicazione bilineare. Cerchiamo allora uno spazio vettoriale $U\otimes V$ e un'applicazione bilineare $t\colon U\times V\to U\otimes V$ in modo che, per ogni applicazione bilineare $g\colon U\times V\to W$, esista un'unica applicazione lineare $g'\colon U\otimes V\to W$ tale che $g't=g$.

Una possibile costruzione è la seguente. Si considera lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^{(U\times V)}$; l'applicazione ovvia

$$U\times V\to\mathbb{C}^{(U\times V)}, \qquad (u,v)\mapsto e_{(u,v)}$$

non è bilineare. Il problema è, per esempio, che

$$e_{(u_1+u_2,v)}\neq e_{(u_1,v)}+e_{(u_2,v)},$$

dal momento che questi tre elementi in $\mathbb{C}^{(U\times V)}$ sono linearmente indipendenti. Per evitare scritture di difficile lettura, scriverò $[\![u,v]\!]$ invece di $e_{(u,v)}$.

Consideriamo il sottospazio K di $\mathbb{C}^{(U\times V)}$ generato da tutti gli elementi della forma

$$\begin{gathered}[\![u_1+u_2,v]\!]-[\![u_1,v]\!]-[\![u_2,v]\!], \quad [\![u,v_1+v_2]\!]-[\![u,v_1]\!]-[\![u,v_2]\!],\\ [\![au,v]\!]-a[\![u,v]\!], \qquad [\![u,bv]\!]-b[\![u,v]\!],\\ u,u_1,u_2\in U, \quad v,v_1,v_2\in V, \quad a,b\in\mathbb{C}.\end{gathered}$$

Poniamo allora

$$U\otimes V=\mathbb{C}^{(U\times V)}/K$$

e indichiamo con $u\otimes v$ la classe di equivalenza dell'elemento $[\![u,v]\!]$ rispetto alla relazione che definisce quel quoziente:

$$x\sim y \quad \text{se e solo se} \quad x-y\in K.$$

Dalla teoria generale segue che $\mathbb{C}^{(U\times V)}/K$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione

$$t_U\colon U\times V\to U\otimes V, \qquad (u,v)\mapsto u\otimes v$$

è bilineare *per costruzione*.

Sia ora $g\colon U\times V\to W$ un'applicazione bilineare. Per le proprietà del funtore $X\mapsto\mathbb{C}^{(X)}$, esiste un'unica applicazione lineare $\hat{g}\colon\mathbb{C}^{(U\times V)}\to W$ tale che, per $u\in U$ e $v\in V$, si abbia

$$\hat{g}([\![u,v]\!])=g(u,v).$$

Ma è chiaro, dalla bilinearità di g, che se $x-y\in K$, per $x,y\in\mathbb{C}^{(U\times V)}$, allora $\hat{g}(x)=\hat{g}(y)$, perché ciò accade per tutti i generatori del sottospazio K. Dunque $\hat{g}$ induce un'unica applicazione lineare $g'\colon U\otimes V\to W$ tale che $g't_U=g$.

Si tratta ora di dimostrare che possiamo definire un'opportuna azione sui morfismi in modo da completare l'azione $G(U)=U\otimes V$ a un funtore che sarà, evidentemente, l'aggiunto sinistro di $\operatorname{Hom}(V,-)$.

Se abbiamo $\varphi\colon U\to U'$ lineare, possiamo definire $\bar{\varphi}\colon U\times V\to U'\otimes V$ con la posizione

$$\bar{\varphi}(u,v)=(\varphi(u))\otimes v.$$

È evidente che $\bar{\varphi}$ è bilineare e quindi esiste un'unica applicazione lineare $G(\varphi)\colon U\otimes V\to U'\otimes V$ tale che $G(\varphi)t_U=\bar{\varphi}$. Si verifichino le proprietà richieste perché $\varphi\mapsto G(\varphi)$ sia l'azione di un funtore sui morfismi.

Lo spazio $U\otimes V$ si chiama *prodotto tensoriale* di U e V.

Potrebbe sembrare che la definizione sia asimmetrica e, in un certo senso, lo è, almeno per quanto riguarda certe generalizzazioni. Però possiamo osservare che l'insieme delle applicazioni bilineari $U\times V\to W$ è 'naturalmente isomorfo' allo spazio delle applicazioni bilineari $V\times U\to W$ (si scambi l'ordine degli argomenti).

Ne segue che possiamo considerare $-\otimes-$ come un funtore

$$\mathbf{Vett}\times\mathbf{Vett}\to\mathbf{Vett}$$

e, data una coppia $(f\colon U\to U', g\colon V\to V')$, l'azione del funtore produce l'unica applicazione lineare

$$f\otimes g\colon U\otimes V\to U'\otimes V'$$

tale che, per $u\in U$ e $v\in V$,

$$f\otimes g(u\otimes v)=f(u)\otimes g(v).$$

Si esplicitino i dettagli passando attraverso le opportune applicazioni bilineari.

Cerchiamo ora una base di $U\otimes V$. È evidente che, se $\{u_i : i\in I\}$ e $\{v_j : j\in J\}$ sono basi di U e V rispettivamente, gli elementi $u_i\otimes v_j$ generano $U\otimes V$.

Con δ_{ij} si indica il simbolo di Kronecker, che vale 1 se $i=j$ e 0 altrimenti.

Proposizione 2.6.1. *Sia V uno spazio vettoriale e sia $X = \{v_i : i \in I\}$ un insieme di vettori di V. Se $\{f_i : i \in I\}$ è un insieme di elementi di V^* e $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, per ogni $i, j \in I$, allora X è linearmente indipendente.*

Dimostrazione. Sia $\sum_j a_j v_j = 0$. Allora,

$$0 = f_i\left(\sum_j a_j v_j\right) = a_i.$$

Dunque tutti i coefficienti sono nulli. □

Consideriamo allora, per $i \in I$ e $j \in J$, le applicazioni $\theta_{ij} : U \to V*$ definite, sugli elementi della base di U, da

$$\theta_{ij}(u_k) = \begin{cases} \xi_j & \text{se } k = i, \\ 0 & \text{se } k \neq i. \end{cases}$$

Ricordiamo che $\xi_j(v_l) = \delta_{jl}$. Se $f \in \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}))$, denotiamo con $\hat{f}$ la corrispondente applicazione in $\mathrm{Hom}(U \otimes V, \mathbb{C})$, tramite l'aggiunzione:

$$\hat{f}(u \otimes v) = f(u)(v).$$

Allora si ha

$$\hat{\theta}_{ij}(u_k \otimes v_l) = \theta_{ij}(u_k)(v_l) = \begin{cases} \xi_j(v_l) & \text{se } i = k, \\ 0 & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Dunque $\hat{\theta}_{ij}(u_k \otimes v_l) = 1$ se $i = k$ e $j = l$, altrimenti $\hat{\theta}_{ij}(u_k \otimes v_l) = 0$. Per la proposizione precedente, l'insieme $\{u_i \otimes v_j : i \in I, j \in J\}$ è linearmente indipendente.

In particolare, se $\dim U = m$ e $\dim V = n$ sono finite, si ha che $\dim U \otimes V = mn$.

In generale è difficile trattare direttamente con $U \otimes V$, perché gli elementi sono somme di *tensori elementari*, cioè espressioni del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \qquad (x_i \in U, y_i \in V).$$

Con l'aggiunzione si ottengono però i risultati desiderati.

2.7 Completamenti di spazi metrici

Uno spazio metrico è una coppia (X, d), dove $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ (la *metrica*) ha le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) \geq 0$, per ogni $x, y \in X$;
2. $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (disuguaglianza triangolare).

Se $a \in X$ e $r > 0$, si pone $B_d(a, r) = \{\, x \in X : d(a, x) < r \,\}$.

Un'applicazione $f : X \to Y$, dove (X, d) e (Y, e) si dice *continua in* a ($a \in X$) se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\text{per ogni } x \in X, \text{ se } x \in B_d(a, x), \text{ allora } f(x) \in B_e(f(x), e).$$

Si dice che f è *continua* se è continua in a, per ogni $a \in X$. Si dovrebbe, per precisione, parlare di d-e-continuità, ma useremo il linguaggio meno preciso, se è chiaro di quali metriche si tratta.

Un sottoinsieme $A \subset X$ si dice *aperto* se, per ogni $a \in A$, esiste $r > 0$ tale che $B_d(a, r) \subseteq A$. Insiemi aperti esistono, perché $B_d(a, r)$ è tale, per ogni $a \in X$ e ogni $r > 0$ (si usa la disuguaglianza triangolare): se $b \in B_d(a, r)$, allora $B_d(b, \varepsilon) \subseteq B_d(a, r)$ per una scelta opportuna di ε. Infatti, se $d(b, c) < \varepsilon$, allora

$$d(a, c) \le d(a, b) + d(b, c) < d(a, b) + \varepsilon$$

e basta prendere $\varepsilon = r - d(a, b) > 0$.

Proposizione 2.7.1. *Siano (X, d) e (Y, e) spazi metrici. Un'applicazione $f : X \to Y$ è continua se e solo se, per ogni aperto $B \subseteq Y$, $f^{\leftarrow}(B)$ è aperto in X.*

Da questa proposizione è chiaro che l'identità su X è continua e che la composizione di applicazioni continue è continua. Quindi possiamo definire la categoria (concreta) **Met** che ha come oggetti gli spazi metrici e come morfismi le applicazioni continue.

Esempi di spazi metrici sono: la retta reale $\mathbb{R}$ con la metrica *usuale*, $d_1(x, y) = |x - y|$; il piano $\mathbb{R}^2$ con la metrica *euclidea*

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2};$$

l'insieme X con la metrica *discreta*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \ne y; \end{cases}$$

Su $\mathbb{R}^2$ si può definire una metrica ponendo

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = d_1(x_1, y_1) + d_1(x_2, y_2).$$

Si provi che è effettivamente una metrica e che l'identità di $\mathbb{R}^2$ è un isomorfismo $(\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, d)$. Si usi l'idea per trovare il prodotto di due spazi metrici, come oggetti di **Met**.

Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X si dice:

- *convergente a* $a \in X$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > k$, $x_n \in B_d(a, \varepsilon)$;
- *di Cauchy* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n > k$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Diremo che una successione è *convergente* se è convergente a qualche elemento di X.

Si dimostri che un successione non può essere convergente a più di un elemento di X e che ogni successione convergente è di Cauchy. Il viceversa, in generale, non è vero. Infatti esistono successioni di Cauchy in $(\mathbb{Q}, d_1)$ che non sono convergenti (spazio dei numeri razionali con la metrica usuale).

La continuità si può esprimere con la convergenza: un'applicazione $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se, per ogni successione (x_n) in X, se (x_n) converge a a, allora $(f(x_n))$ converge a $f(a)$.

In particolare, ma era ovvio anche prima, ogni applicazione che abbia come dominio un insieme con la metrica discreta è continua. In uno spazio di questo tipo le successioni convergenti e quelle di Cauchy sono la stessa classe e coincidono con le successioni *definitivamente costanti*.

Un sottoinsieme di uno spazio metrico, con la metrica indotta, è esso stesso uno spazio metrico e si usa il termine di *sottospazio*. Può accadere che un sottospazio sia completo, per esempio se consiste di un solo elemento.

Supponiamo che il sottospazio S di X sia completo. Allora ogni successione in S che sia convergente come successione in X è di Cauchy e quindi converge a un elemento di S.

Diciamo che un sottoinsieme C di X è *chiuso* se ogni successione in C che converge a un elemento di X converge a un elemento di C. Si dimostra facilmente che C è chiuso se e solo se $X \setminus C$ è aperto.

Proposizione 2.7.2. *Un sottospazio completo di uno spazio metrico è chiuso. Un sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo è completo.*

Purtroppo, in generale, un'applicazione continua di spazi metrici non trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy. Per esempio, si prenda

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

La successione $x_n = 1 - 1/n$ è di Cauchy nel dominio, ma la trasformata è illimitata.

Consideriamo allora la sottocategoria piena **UMet** di **Met** i cui oggetti sono tutti gli spazi metrici, ma i morfismi sono le applicazioni uniformemente continue, cioè che trasformano ogni successione di Cauchy in una successione di Cauchy. Dato $r > 0$, si ponga

$$V_X(r) = \{(x_1, x_2) \in X \times X : d(x_1, x_2) < r\}$$

(dove (X, d) è uno spazio metrico). Si dimostri l'asserzione seguente.

Proposizione 2.7.3. *L'applicazione $f\colon X \to Y$ fra gli spazi metrici X e Y è uniformemente continua se e solo se, per ogni $r > 0$ esiste $s > 0$ tale che*

$$(f \times f)^{\to}(V_X(s)) \subseteq V_Y(r).$$

In particolare ogni applicazione uniformemente continua è continua.

Se indichiamo con **CUMet** la sottocategoria piena di **UMet** che ha come oggetti gli spazi metrici completi, il funtore di inclusione $I\colon \mathbf{CUMet} \to \mathbf{UMet}$ ha un aggiunto sinistro che vogliamo costruire; per ogni spazio metrico X ci serve uno spazio metrico completo $c(X)$ in modo che, per ogni spazio metrico completo Y,

$$\mathbf{Met}(X, i(Y)) \cong \mathbf{CMet}(c(X), Y).$$

Consideriamo l'insieme $C(X)$ di tutte le successioni di Cauchy in X, sul quale possiamo definire la relazione di equivalenza

$$(x_n) \sim (y_n) \quad \text{sta per} \quad \lim_n d(x_n, y_n) = 0$$

dove il limite è calcolato in $\mathbb{R}$ al modo usuale. Che si tratti di una relazione di equivalenza è immediato. Data una successione $x = (x_n)$, indicheremo con x_* la sua classe di equivalenza e chiameremo $c(X)$ l'insieme quoziente. Se $x_* \in c(X)$, denoteremo con (x_n) una qualunque delle successioni in x_*. Su $c(X)$ vogliamo definire una metrica:

$$d_*(x_*, y_*) = \lim_n d(x_n, y_n).$$

Dal fatto che le successioni sono di Cauchy e che $\mathbb{R}$ è completo, segue che il limite esiste (lo si dimostri) e che non dipende dai rappresentanti delle classi di equivalenza. Non è difficile giustificare che d_* è una metrica su $c(X)$ e che $(c(X), d_*)$ è uno spazio metrico completo: se $(x_*^{(n)})$ è una successione di Cauchy in $c(X)$, si verifica subito che $y = (x_n^{(n)})$ è una successione di Cauchy in X e che la successione in $c(X)$ converge proprio all'elemento y_* di $c(X)$.

Abbiamo evidentemente l'applicazione $j_X\colon X \to c(X)$ che a ogni elemento di X associa la classe di equivalenza della successione costante relativa a quell'elemento. Si tratta, è chiaro, di un'applicazione uniformemente continua e anzi isometrica: $d(j_X(a), j_X(b)) = d(a, b)$.

Attraverso questa applicazione j_X possiamo identificare X con un sottospazio di $c(X)$ e la proprietà fondamentale è la seguente.

Teorema 2.7.4. *Ogni applicazione uniformemente continua $f\colon X \to Y$, dove Y è uno spazio metrico completo, può essere estesa in modo unico a un'applicazione $\hat{f}\colon c(X) \to Y$.*

Se non si vuole fare l'identificazione, la proprietà si enuncia dicendo che $\hat{f} j_X = f$. Attraverso questa proprietà si può definire un'azione sui morfismi, che rende c un funtore $\mathbf{UMet} \to \mathbf{CUMet}$ che è il richiesto aggiunto sinistro dell'inclusione.

2.8 Funtori aggiunti e universali

Supponiamo di avere un funtore $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ che abbia un aggiunto sinistro $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$; denotiamo con σ e ρ l'unità e la counità dell'aggiunzione e con η l'aggiunzione. Dato un oggetto $D \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$ vorremmo trovare un universale da D a F, quindi una coppia (V, v) dove $V \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$ e $v\colon D \to F(V)$.

Viene spontaneo pensare a $V = G(D)$ e $v = \sigma_D\colon D \to FG(D) = F(V)$. Dobbiamo verificare la proprietà espressa dal diagramma (Univ*). Sia dunque $h\colon D \to F(X)$. Allora $h' = \eta_{D,X}(h)\colon G(D) = V \to X$ e, inoltre, $F(h')v = F(\eta_{D,X}(h))\sigma_D = h$. Infatti sappiamo che $\eta_{D,X}(h) = \rho_X G(h)$ e quindi

$$F(h')v = F(\rho_X G(h))\sigma_D = F(\rho_X)FG(h)\sigma_D = F(\rho_X)\sigma_X h = h.$$

Viceversa, se $k\colon V \to X$ ha la proprietà che $F(k)v = h$, abbiamo $h = F(k)\sigma_D$, dunque

$$h' = \eta_{D,X}(h) = \rho_X G(h) = \rho_X G(F(k)\sigma_D) = \rho_X GF(k)G(\sigma_D) = k\rho_D G(\sigma_D) = k$$

e perciò il morfismo h' è l'unico che rende commutativo il diagramma. Si noti come abbiamo usato le proprietà sia dell'unità che della counità.

Teorema 2.8.1. *Sia $(F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}, \eta)$ un'aggiunzione, con unità σ e counità ρ. Allora, per ogni $D \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$, la coppia $(G(D), \sigma_D)$ è un universale da D a G. Dualmente, per ogni $C \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, la coppia $(F(C), \rho_C)$ è un universale da G a C.*

Da quanto visto risulta l'intima connessione fra universali e aggiunzione: l'esistenza di un aggiunto (dalla parte giusta) fornisce tutti gli universali. Possiamo dimostrare anche il viceversa.

Teorema 2.8.2. *Sia $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtore e supponiamo che, per ogni $D \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$ esista un universale (V,v) da D a F. Allora F ha un aggiunto sinistro.*

Dimostrazione. Per ogni $D \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$ fissiamo un universale (V_D, v_D) da D a F. La definizione di un funtore sugli oggetti è ovvia: $G(D) = V_D$. Si tratta ora di definire l'azione sui morfismi. Sia $f\colon D \to D'$ un morfismo. Allora $v_{D'}f\colon D \to F(V_{D'})$ e quindi, per l'universalità, esiste un unico morfismo $f'\colon V_D \to V_{D'}$ tale che $v_{D'}f = F(f')v_D$.

Per via di questa unicità possiamo definire $G(f) = f'$. Occorre verificare che questa azione è effettivamente un funtore.

Se $f = 1_D$, è evidente che $F(1_{V_D})v_D = v_D 1_D$ e quindi $G(1_D) = 1_{G(D)} = 1_{V_D}$.

Siano $f\colon D \to D'$ e $g\colon D' \to D''$. Allora si ha
$$F(f')v_D = v_{D'}f, \qquad F(g')v_{D'} = v_{D''}g$$
e quindi
$$F(g'f')v_D = F(g')F(f')v_D = F(g')v_{D'}f = v_{D''}gf = v_{D''}(gf);$$
per l'unicità, risulta $G(gf) = G(g)G(f)$.

La dimostrazione che abbiamo un'aggiunzione sarà completa se esibiamo l'unità e la counità con le proprietà richieste. Poniamo allora $\sigma_D = v_D\colon D \to F(V_D) = FG(D)$. Siccome $F(C) \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$, è stato scelto l'universale $(V_{F(C)}, v_{F(C)})$. Per definizione di universale, esiste un unico morfismo $\rho_C\colon F(V_{F(C)}) \to F(C)$ tale che $F(\rho_C)v_{F(C)} = 1_{F(C)}$.

Si tratta di vedere che σ e ρ sono trasformazioni naturali e che le composizioni che garantiscono l'aggiunzione sono proprio i morfismi identità. I dettagli sono lasciati al lettore. □

È evidente che si ottiene anche il teorema duale.

Teorema 2.8.3. *Sia $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ un funtore. Se, per ogni $C \in \operatorname{obj}(\mathbf{C})$, esiste un universale da G a C, allora G ha un aggiunto destro.*

Esempio 2.8.4. Data la categoria $\mathbf{C}$ consideriamo il funtore *diagonale* $\Delta\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ definito da
$$\Delta(A) = (A,A), \qquad \Delta(f) = (f,f).$$
Ne cerchiamo un aggiunto destro, cioè un funtore $F\colon \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ in modo che, per ogni $A,B,C \in \mathbf{C}$, si abbia
$$\mathbf{C} \times \mathbf{C}(\Delta(C),(A,B)) \cong \mathbf{C}(C, F(A,B)).$$
Un morfismo $\Delta(C) \to (A,B)$ è una coppia (f,g) di morfismi $f\colon C \to A$, $g\colon C \to B$. A ciascuna di queste deve essere associato un unico morfismo $C \to F(A,B)$: l'idea dovrebbe sorgere spontanea.

Dimostriamo che, se F è un aggiunto destro di Δ, allora, per ogni $A,B \in \mathbf{C}$, $F(A,B)$ è un prodotto di A e B. Siano σ e ρ l'unità e la counità; più interessante è la seconda, perché si ha
$$\rho_{(A,B)}\colon \Delta F(A,B) \to (A,B),$$
quindi possiamo pensarlo come una coppia di morfismi $p_A\colon F(A,B) \to A$, $p_B\colon F(A,B) \to B$. Siano dati $f_A\colon C \to A$ e $f_B\colon C \to B$; allora abbiamo il morfismo $f = (f_A, f_B)\colon \Delta(C) \to (A,B)$ in $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$

Consideriamo allora $F(f)\colon F\Delta(C) \to F(A,B)$ e $\hat{f} = F(f)\sigma_C\colon C \to F(A,B)$. Allora $\rho_{(A,B)}\Delta(\hat{f}) = f$, che equivale esattamente a dire che $p_A\hat{f} = f_A$ e $p_B\hat{f} = f_B$. Rimarrebbe da dimostrare l'unicità, lo si lascia per esercizio, secondo la dimostrazione precedente.

Viceversa, se nella categoria $\mathbf{C}$ ci sono tutti i prodotti binari, si può costruire un aggiunto destro del funtore diagonale 'scegliendo' per ogni coppia di oggetti un loro prodotto.

Dall'esempio risulta che la definizione di categoria cartesiana potrebbe essere data con maggiore precisione.

Definizione. Una categoria $\mathbf{C}$ è si dice *cartesiana* se ha un oggetto terminale e il funtore diagonale $\Delta\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ ha un aggiunto destro.

Con la stessa tecnica si verifica che l'esistenza di un aggiunto sinistro al funtore diagonale equivale all'esistenza di tutti i coprodotti binari.

L'esempio suggerisce anche un'altra conclusione: l'aggiunto destro (o sinistro) di un funtore, se esiste, è unico a meno di isomorfismi naturali.

Teorema 2.8.5. *Sia $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e siano (F, G, η) e (F, G', η') aggiunzioni. Allora esiste un isomorfismo naturale $\varphi\colon G \to G'$.*

Dimostrazione. Dato $B \in \mathbf{D}$, possiamo considerare $1_{G'(B)}$ e quindi $\eta'(1_{G'(B)})\colon B \to FG'(B)$; di conseguenza abbiamo $\eta^{-1}(\eta'(1_{G'(B)}))\colon G(B) \to G'(B)$. Si tratta di vedere che è un isomorfismo, ma l'inverso è facilmente calcolabile eseguendo gli stessi passi a partire da $1_{G(B)}$ e applicando le equazioni (agg) e (agg^{-1}) a η e η'. $\square$

Supponiamo ora di essere in una categoria cartesiana; l'aggiunto destro del funtore diagonale si indicherà con $(A, B) \mapsto A \times B$, sugli oggetti, e $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ sui morfismi. Fissando uno dei due oggetti si ottiene allora un funtore $A \times -\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. In molte categorie significative questo funtore ha un aggiunto destro, per esempio in **Set**.

Dobbiamo trovare, per ogni B, un oggetto $F(B)$ e una biiezione

$$\mathbf{Set}(A \times C, B) \to \mathbf{Set}(C, F(B)).$$

Data $f\colon A \times C \to B$, possiamo definire un'applicazione $\hat{f}$ da C all'insieme B^A delle applicazioni $A \to B$ ponendo $\hat{f}(c)(a) = f(a, c)$. Viceversa, data $g\colon C \to B^A$, possiamo definire $\breve{g}\colon A \times C \to B$ ponendo $\breve{g}(a, c) = g(c)(a)$. Che l'assegnazione $B \mapsto B^A$ possa essere completata a un funtore è evidente: se abbiamo $f\colon B_1 \to B_2$, definiamo, per ogni $\varphi \in B_1^A$, $f^A(\varphi) = f\varphi \in B_2^A$.

La counità di questa aggiunzione è l'applicazione di valutazione $ev\colon A \times B^A \to B$ definita da

$$ev(a, \varphi) = \varphi(a).$$

Di fatto l'assegnazione $(A, B)\colon B^A$ è un funtore $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, cioè controvariante nella prima variabile e covariante nella seconda. Inoltre ev è naturale sia nella prima che nella seconda variabile, come si verifica subito.

Definizione. Una categoria cartesiana $\mathbf{C}$ si dice *cartesiana chiusa* (CCC) se

1. esiste un funtore $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, denotato sugli oggetti con $(A, B) \mapsto B^A$ in modo che, per ogni $A \in \mathrm{obj}(\mathbf{C})$, $-^A$ sia aggiunto destro di $A \times -$;

2. esiste una trasformazione naturale $ev\colon F \to G$, dove

$$F(A, B) = A \times B^A, \qquad G(A, B) = B$$

in modo che, per ogni A, $ev_{(A,-)}\colon A \times -^A \to id$ sia la counità dell'aggiunzione fra $-^A$ e $A \times -$.

Possiamo vedere che anche altri concetti si ottengono da aggiunzioni. Data una categoria $\mathbf{C}$ esiste un unico funtore $!\colon \mathbf{C} \to \mathbf{1}$; un aggiunto destro F di questo funtore deve avere la proprietà che

$$\mathbf{1}(!(A), 0) \cong \mathbf{C}(A, F(0))$$

cioè $F(0)$ è un oggetto terminale di $\mathbf{C}$. Analogamente un oggetto iniziale 'è' un aggiunto sinistro del funtore !. Una categoria ha tutti i coprodotti binari se e solo se il funtore diagonale ha un aggiunto sinistro.

2.9 Conservazione di universali

Sia $(F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}, \eta)$ un'aggiunzione con unità σ e counità ρ. Sia $H\colon \mathbf{E} \to \mathbf{C}$ un funtore e sia (U, u) un universale da H a $E \in \operatorname{obj}(\mathbf{E})$. Possiamo evidentemente cercare un universale da $HG\colon \mathbf{E} \to \mathbf{D}$ a E. Questo deve essere una coppia (U', u'), con $U' \in \mathbf{D}$ e $u'\colon HGU' \to E$.

È abbastanza naturale prendere $U' = F(U)$ e $u' = u \circ H(\rho_U)$, perché almeno hanno le proprietà richieste. Dimostriamo che la coppia così fatta è l'universale cercato.

Sia $h\colon HG(X) \to E$, dove $X \in \operatorname{obj}(\mathbf{D})$. Per l'universalità di (U, u), esiste un unico morfismo $\bar{h}\colon G(X) \to U$ per il quale $uH(\bar{h}) = h$. Possiamo allora considerare $h' = F(\bar{h})\sigma_X\colon X \to F(U) = U'$. Allora

$$u'HG(h') = uH(\rho_U)HGF(\bar{h})HG(\sigma_X) = uH(\rho_U GF(\bar{h})G(\sigma_X)) = uH(\bar{h}\rho_{G(X)}G(\sigma_X)) = uH(\bar{h}) = h.$$

Sia poi $k\colon X \to F(U) = U'$ tale che $u'HG(k) = h$. Allora

$$h = uH(\rho_U)HG(k) = uH(\rho_U G(k))$$

e quindi, per l'unicità di $\bar{h}$, si ha $\bar{h} = \rho_U G(k)$, da cui

$$h' = F(\rho_U G(k))\sigma_X = F(\rho_U)FG(k)\sigma_X = F(\rho_U)\sigma_{F(U)}k = k.$$

Teorema 2.9.1. *Sia (F, G, η) un'aggiunzione con unità σ e counità ρ. Se $H\colon \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ è un funtore dal dominio di F, $E \in \operatorname{obj}(\mathbf{E})$ e (U, u) è un universale da H a E, allora*

$$(F(U), u \circ H(\rho_U))$$

è un universale da GH a E.

Si può ovviamente enunciare (senza bisogno di dimostrarlo) il teorema duale.

Teorema 2.9.2. *Sia (F, G, η) un'aggiunzione con unità σ e counità ρ. Se $H\colon \mathbf{E} \to \mathbf{D}$ è un funtore al codominio di G, $E \in \operatorname{obj}(\mathbf{E})$ e (V, v) è un universale da E a H, allora*

$$(G(V), H(\sigma_V) \circ v)$$

è un universale da E a HF.

In particolare, se (F, G, η) è un'aggiunzione e $A, B \in \mathbf{C}$ hanno un prodotto $(A \times B, p_A, p_B)$, allora

$$(F(A \times B), F(p_A), F(p_B))$$

è un prodotto di $F(A)$ e $F(B)$ in $\mathbf{D}$. Analogamente per i coprodotti in $\mathbf{D}$. Lo stesso si può dire per prodotti e coprodotti arbitrari.

Ancora, se T è un oggetto terminale in $\mathbf{C}$, allora $F(T)$ è un oggetto terminale in $\mathbf{D}$; se (E, i) è un ugualizzatore dei morfismi f e g in $\mathbf{C}$, allora $(F(E), F(i))$ è un ugualizzatore di $F(f)$ e $F(g)$. Analogamente per i cougualizzatori in $\mathbf{D}$.

2.10 Esempi di CCC

Sia X un insieme ordinato. Un suo sottoinsieme D è *diretto* se, per ogni $a, b \in D$, esiste $c \in D$ tale che $a \le c$ e $b \le c$. Diremo che X è *completo* se ogni suo sottoinsieme diretto ha estremo superiore. In particolare X ha minimo, perché l'insieme vuoto è banalmente diretto.

Un elemento di X si dice *compatto* se, per ogni sottoinsieme diretto D tale che $x \le \sup D$, esiste $y \in D$ con $x \le y$. Indichiamo con $\operatorname{comp}(X)$ l'insieme degli elementi compatti di X.

L'insieme ordinato completo X si dice *algebrico* se, per ogni $x \in X$, l'insieme

$$x{\downarrow} = \{\, y \in \operatorname{comp} X : y \le x \,\}$$

è diretto e $\sup(x{\downarrow}) = x$. L'insieme ordinato completo X si dice un *dominio di Scott* se è algebrico e ogni sottoinsieme limitato (superiormente) ha estremo superiore.

Un'applicazione $f\colon X \to Y$ fra domini di Scott si dice *continua* se, per ogni sottoinsieme diretto D di X,

$$f(\sup D) = \sup\{\, f(d) : d \in D \,\}.$$

Notiamo che un'applicazione continua è monotona: se $a \le b$ in X, allora $\{a, b\}$ è diretto e il suo estremo superiore è b; dalla continuità segue che $f(b) = \sup\{f(a), f(b)\}$, cioè che $f(a) \le f(b)$. Viceversa, se f è monotona, l'immagine di ogni sottoinsieme diretto è un insieme diretto.

È banale verificare che la categoria che ha per oggetti i domini di Scott e per morfismi le applicazioni continue ha prodotti binari e un oggetto terminale.

L'esponenziale Y^X si può definire come l'insieme delle applicazioni continue $X \to Y$ con l'ordine 'puntuale': se $f, g\colon X \to Y$ sono continue,

$$f \le g \quad \text{sta per} \quad f(x) \le g(x), \text{ per ogni } x \in X.$$

Che questa sia una relazione d'ordine è ovvio. Che la funzione costante 0 sia il minimo è altrettanto ovvio, quanto che sia continua. Dimostriamo che un insieme A superiormente limitato da g ha estremo superiore. Per ogni x, l'insieme $\{f(x) : f \in A\}$ è superiormente limitato da $g(x)$, quindi possiamo definire

$$h(x) = \sup\{f(x) : f \in A\}$$

e resta da provare che h è continua: infatti, che sia l'estremo superiore di A è evidente. Sia D un insieme diretto in X: allora

$$\begin{aligned}
h(\sup D) &= \sup\{f(\sup D) : f \in A\} && \text{Definizione}\\
&= \sup\{\sup f(D) : f \in A\} && \text{Continuità di } f\\
&= \sup_{x \in D} \sup_{f \in A}(f(x)) &&\\
&= \sup_{x \in D} h(x) && \text{Definizione di } h.
\end{aligned}$$

Dobbiamo ora calcolare gli elementi compatti di Y^X. Dati $a \in \operatorname{comp}(X)$ e $b \in \operatorname{comp}(Y)$ definiamo

$$\mathit{step}_{a,b}(x) = \begin{cases} b & \text{se } a \le x,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

...

2.11 Categorie da categorie

La categoria $\cdot \rightrightarrows \cdot$ ha due oggetti e due morfismi non identità come indicato. Un funtore $\cdot \rightrightarrows \cdot \to \mathbf{C}$ è essenzialmente la scelta di due oggetti in $\mathbf{C}$ e di due morfismi con questi rispettivamente come dominio e codominio.

La categoria $\mathrm{Fun}(\cdot \rightrightarrows \cdot, \mathbf{C})$ ha come oggetti quei funtori[1] e come morfismi le trasformazioni naturali. La possiamo quindi immaginare come l'insieme dei diagrammi in $\mathbf{C}$ che abbiano la forma $\cdot \rightrightarrows \cdot$.

In effetti la conosciamo già sotto il nome di $\mathbf{C}{\downarrow}{\downarrow}$; l'aggiunto destro del funtore 'diagonale' è quello che definisce, se esistono tutti, gli ugualizzatori.

In generale, se $\mathbf{J}$ è una categoria *piccola*, cioè se la classe dei morfismi (e quindi quella degli oggetti) è un insieme, allora è possibile definire la categoria $\mathrm{Fun}(\mathbf{J}, \mathbf{C})$ che ha come oggetti i funtori $\mathbf{J} \to \mathbf{C}$ e come morfismi le trasformazioni naturali.

Se $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ possiamo definire un funtore $\mathrm{Fun}(\mathbf{J}, F) = F_*\colon \mathrm{Fun}(\mathbf{J}, \mathbf{C}) \to \mathrm{Fun}(\mathbf{J}, \mathbf{D})$ tramite la composizione. Si definisca l'azione sui morfismi in modo adeguato.

Si provi che, data l'aggiunzione $(F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}, \eta)$, si ha un'aggiunzione (F_*, G_*, η_*), definendo opportunamente η_*.

2.12 Morfismi parziali

Siano $A, B \in \mathrm{obj}(\mathbf{C})$. Consideriamo la classe $\mathrm{Prt}(A, B)$ i cui elementi sono coppie ordinate di morfismi
$$(m\colon S \to A, f\colon S \to B)$$
dove $S \in \mathrm{obj}(\mathbf{C})$ e m è mono. Su $\mathrm{Prt}(A, B)$ definiamo la relazione
$$(m\colon S \to A, f\colon S \to B) \sim (m'\colon D' \to A, f'\colon D' \to B)$$
se esiste un isomorfismo $k\colon S \to S'$ tale che $m'k = m$ e $f'k = f$. Indicheremo con $[m, f]$ un rappresentante di ciascuna classe di equivalenza e supporremo che questi rappresentanti formino un insieme. Questo rappresentante si chiama anche un *morfismo parziale* $[m, f]\colon' C \to D$.

Nel caso degli insiemi, un morfismo parziale è proprio la scelta di un sottoinsieme S di A e di un'applicazione $S \to B$, perché abbiamo modo di scegliere in modo 'canonico' il mono $S \to A$. In una categoria non concreta questo può non essere possibile.

Vogliamo definire una composizione fra morfismi parziali e per questo abbiamo bisogno che la categoria $\mathbf{C}$ abbia i prodotti fibrati (binari).

Dati $[m, f]\colon' A \to B$ e $[n, g]\colon' B \to C$, possiamo considerare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
S \times_B T \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "n'"'] & T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"] & C \\
S \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "m"'] & B & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

[1]Non ci sono grandi problemi di carattere insiemistico, perché gli oggetti della categoria dominio sono un insieme.

nel quale il quadrato è un prodotto fibrato. Il morfismo n' è mono e quindi possiamo considerare la coppia $(n'm\colon S \times_B T \to A, gf'\colon S \times_B T \to C)$ che appartiene a $\mathrm{Prt}(A, C)$. Si definisce allora

$$[n, g][m, f] = [n'm, gf'].$$

Negli insiemi il risultato è abbastanza evidente: S è un sottoinsieme di A e T un sottoinsieme di B; il prodotto fibrato non è altro che $f^{\leftarrow}(T)$, sul quale possiamo appunto definire la composizione fra le opportune restrizioni.

Non è difficile verificare che $[1_A, 1_A]$ si comporta da identità su A per questa composizione e che la composizione è associativa, usando i teoremi sui prodotti fibrati. Diremo che $[m, f]$ è *totale* se m è un isomorfismo. È abbastanza ovvio verificare che $A \mapsto A$ e $f \mapsto [1_{\partial_0(f)}, f]$ definisce un funtore con dominio $\mathbf{C}$ e codominio la categoria $\mathbf{pC}$ che ha come classe di oggetti $\mathrm{obj}(\mathbf{C}) = \mathrm{obj}(\mathbf{pC})$ e come classe di morfismi i morfismi parziali.

Si verifichi che, se $[m, f]$ è l'inverso in $\mathbf{pC}$ di un morfismo totale, allora $[m, f]$ è totale.

Sia $\mathbf{Set}_*$ la categoria i cui oggetti sono coppie (A, a), dove $a \in A$, e come morfismi $(A, a) \to (B, b)$ le applicazioni $f\colon A \to B$ tali che $f(a) = b$. Dato un insieme A, possiamo considerare $A^* = A \cup \{A\}$. Si definisca un funtore

$$F\colon \mathbf{pSet} \to \mathbf{Set}_*$$

ponendo $F(A) = A^*$ e, data la coppia $\varphi = (i_S\colon S \to A, f\colon S \to B) \in \mathrm{Prt}(A, B)$, definiamo $F(\varphi)\colon A^* \to B^*$ ponendo

$$F(\varphi)(x) = \begin{cases} B & \text{se } x = A, \\ B & \text{se } x \in A \setminus S, \\ f(x) & \text{se } x \in S. \end{cases}$$

Si verifichi che F è in effetti un funtore, anzi che è un'equivalenza di categorie.

Nel caso generale non è possibile un'interpretazione così facile dei morfismi parziali.

Nel caso di $\mathbf{X}$ costruita da un insieme ordinato X, ogni morfismo è mono, quindi un elemento di $\mathrm{Prt}(a, b)$ corrisponde a un elemento $s \le a$ e $s \le b$, quindi a un minorante di $\{a, b\}$. Poiché gli isomorfismi sono solo le identità, la relazione di equivalenza è banale, dunque i morfismi parziali sono le terne (s, a, b) con $s \le a$ e $s \le b$.

Sappiamo che $\mathbf{X}$ ha prodotti fibrati se X ha estremi inferiori binari (ogni prodotto fibrato è un prodotto). Supponiamo di essere in questa situazione. Dati i morfismi parziali (s, a, b) e (t, b, c), la loro composizione è $(s \wedge t, a, c)$. Notiamo che la categoria $\mathbf{pX}$ non è più un preordine, in generale.