Informatica Quantistica

Esercizi d'Esame

Esercizio 1. Verifica che solo uno dei due insiemi

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(i\,|0\rangle - |1\rangle) \right\},$$

$$\left\{ \frac{1}{2}(|0\rangle + \sqrt{3}\,|1\rangle), \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,|0\rangle - |1\rangle) \right\}$$

è una base computazionale. Calcola i risulati e le probabilità di misurare $\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ in quella base computazionale.

Esercizio 2. Un registro di due qubit si trova nel seguente stato

$$\frac{3\,|00\rangle + 4\,|11\rangle}{5}.$$

Il primo qubit viene misurato. Qual'è la probabilità che il secondo qubit si trovi nello stato $|0\rangle$ dopo la misurazione?

Esercizio 3. Considera un registro di due qubit nello stato

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(3\,|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle).$$

Supponiamo che Alice e Bob possano operare rispettivamente sul primo e sul secondo qubit.

(i) Qual'è la probabilità che sia Alice che Bob ottengano 1 come risultato della misurazione del proprio qubit?

(ii) Se Alice e Bob applicano **H** ciascuno al proprio qubit, prima di misurarlo, qual'è la probabilità che entrambi ottengano come risultato 1?

(iii) Se solo Alice applica **H** al suo qubit, qual'è la probabilità che dopo la misurazione Alice ottenga il valore 0 e Bob il valore 1?

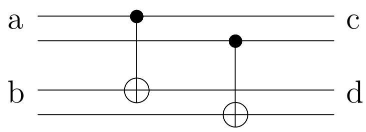


Figure 1: Circuito 1

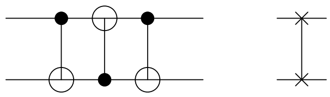


Figure 2: Circuito 2

(iv) Se solo Bob applica $\mathbf{H}$ al suo qubit, qual'è la probabilità che dopo la misurazione Alice ottenga il valore 1 e Bob il valore 0?

La risposta agli ultimi tre punti risulta più agevole dopo aver dimostrato che $|\phi\rangle$ si può anche scrivere come:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(2\,|00\rangle - \mathbf{H}_a\mathbf{H}_b\,|11\rangle),$$

dove $\mathbf{H}_a$ e $\mathbf{H}_b$ indicano Hadamard applicato al primo qubit (Alice) e Hadamard applicato al secondo qubit (Bob), rispettivamente.

Esercizio 4. Verifica che

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

è unitaria. Calcola l'azione di A e A^2 su un generico qubit. Che cosa calcola A? Esiste una sua controparte classica?

Esercizio 5.

- Verifica che se $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono due stati di Bell, allora gli stati $|c\rangle$ e $|d\rangle$ ottenuti mediante il Circuito 1 sono entrambi entangled.
- Verifica che il Circuito 2 effettua lo 'swap' di due qubit. Qual'è la sua matrice di rappresentazione nella base computazionale?
- Verifica che il Circuito 3 inverte il secondo quibit se il primo qubit è zero e scrivi la matrice che lo rappresenta nella base computazionale.

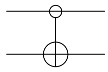


Figure 3: Circuito 3

Esercizio 6. Definire una matrice a due livelli. Esemplificare la definizione e costruire un circuito che implementi la matrice esempio usando solo `CNOT` e operazioni su 1 qubit.

Esercizio 7. Data una funzione booleana f definita su uno spazio di dimensione $N = 4$, diciamo che un elemento x dello spazio è una soluzione se $f(x) = 1$. Descrivere l'operatore di Grover $\mathbf{G}$ e applicarlo per la ricerca di soluzioni in questo spazio. Assumendo che il numero di soluzioni sia $M = 1$, calcolare il numero di iterazioni di $\mathbf{G}$ necessarie per massimizzare la probabilità di successo dell'algoritmo e calcolare tale probabilità.

Esercizio 8. Si consideri un registro di due qubit nello stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{11}}\,|00\rangle + \sqrt{\frac{5}{11}}\,|01\rangle + \sqrt{\frac{2}{11}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{3}{11}}\,|11\rangle\,.$$

Calcolare la probabilità di misurare 0 nel primo qubit e stabilire lo stato del secondo qubit dopo che la misurazione ha dato tale esito.

Esercizio 9. Descrivere un circuito per il teletrasporto di un generico stato $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, supponendo che lo stato iniziale sia $|\psi\rangle \otimes |\beta_{01}\rangle$, dove $\beta_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, e che il ricevente abbia a disposizione le operazioni X e Z definite dalle matrici

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 10. Descrivere i passi dell'algoritmo di Shor ed simularne l'esecuzione per la fattorizzazione del numero 15. Commentare in dettaglio l'uso della trasformata di Fourier quantistica in questo algoritmo.

Esercizio 11. Mostrare che il circuito in Figura 4 effettua lo scambio di due qubit.

Scrivere la matrice di rappresentazione dell'operatore implementato da questo circuito nella base computazionale standard.

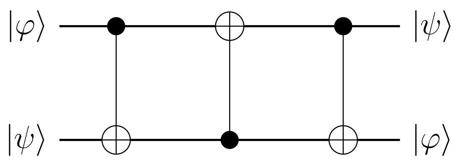


Figure 4: Swap

Esercizio 12. Costruire un circuito quantistico che implementa la matrice unitaria

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

usando solo operazioni $C^2(\texttt{NOT})$ e $C^2(A)$, dove $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Esercizio 13. Definire la trasformata di Fourier quantistica per un generico $N = 2^n$ e scrivere la matrice che la rappresenta nella base computazionale standard per $n = 1$ e $n = 2$.

Esercizio 14. Si consideri l'algoritmo di Grover per la ricerca in uno spazio di dimensione 2^n. Definire un oracolo che implementa la funzione booleana associata al problema di ricerca, e descrivere il suo effetto all'interno dell'operatore di Grover.

Esercizio 15.

a) Considera il registro di due qubit

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + |11\rangle .$$

(i) Calcola la probabilità di ottenere 1 dalla misurazione del primo qubit e determina lo stato del registro dopo una misurazione con questo esito.

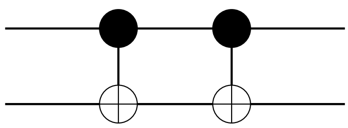
(ii) Dopo aver ottenuto 1 dalla misurazione del primo qubit, misura il secondo qubit. Calcola le probabilità di ottenere il risultato 0 e il risutato 1 e determina lo stato finale del registro in entrambi i casi.

(iii) Calcola la probabilità che l'esito della misurazione de secondo qubit sia 0 nel caso in cui la misurazione del primo qubit sia risulatata in 0 e determina lo stato finale del registro in questo caso.

b) È necessario misurare il secondo qubit del registro per conoscerne il suo valore dopo aver misurato il primo? Motivare la risposta.

Esercizio 16. Determinare la matrice M corrispondente al seguente circuito, dimostrare che è unitaria e descrivere l'evoluzione del sistema

$$|\psi_{out}\rangle = M\,|\psi_{in}\rangle$$

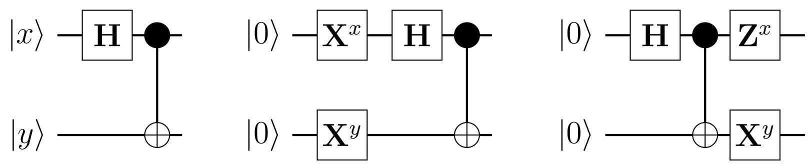


Esercizio 17. Considera la funzione definita da

$$f(k) = x^k (mod\ N),$$

dove x e N sono interi positivi. Dimostra che f è periodica e descrivi i passi principali di un algoritmo quantistico polinomiale per trovare il periodo della funzione f.

Esercizio 18. Mostra che i seguenti circuiti sono equivalenti.



Quali stati vengono prodotti?

Esercizio 19. Costruisci un circuito quantistico che implementa la matrice unitaria

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

usando solo operazioni $\mathbf{C}^2(\mathbf{NOT})$ e $\mathbf{C}^2(\mathbf{A})$, dove $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Esercizio 20. Data la funzione booleana $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, considera l'algoritmo di Grover per trovare un $x \in \{0,1\}$ tale che $f(x) = 1$. Dato lo stato iniziale $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle$:

(i) Dimostra che $R_{|\psi\rangle} = 2\,|\psi\rangle\,\langle\psi| - I$ è una riflessione intorno a $|\psi\rangle$.

(ii) Dimostra che se U è un operatore unitario, allora $UR_{|\psi\rangle}U^{-1} = R_{U|\psi\rangle}$.

(iii) Assumendo che il numero di x tali che $f(x) = 1$ sia 2^{n-2}, determinare il numero di iterazioni richieste per massimizzare la probabilità di successo dell'algoritmo e calcolare tale probabilità.

Esercizio 21. Considera l'algoritmo di Shor per fattorizzare l'intero 21. Fornisci due esecuzioni dell'algoritmo di cui una ha successo e l'altra fallisce.

Esercizio 22. Descrivi un circuito quantistico che implementa l'operazione di Toffoli e che utilizza solo `CNOT` e `X`, cioe' l'operazione di `NOT` quantistico.

Esercizio 23. Definisci le due matrici che rappresentano la trasformata di Fourier e la sua inversa per un registro quantistico di 2 qubits. Dimostra inoltre che sono unitarie.

Esercizio 24. Dimostra che una qualsiasi operazione classica si può implementare in modo *reversibile* usando l'operazione di Toffoli.

Esercizio 25. Illustra l'algoritmo quantistico per trovare l'ordine di un numero e applicalo per calcolare l'ordine di 3 modulo 11.

Esercizio 26. Costruisci un circuito che esegue una misurazione nella base di Bell.